

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

$$2: \sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$2 \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = -1 \quad | : \cos^2 \alpha \neq 0$$

$$4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 = 0$$

$$4 \operatorname{tg} \alpha = -2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | : \cos^2 \alpha \neq 0$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha = -1$$

$$4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 0$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4 \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$2 \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = -2 \end{cases}$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

~~tg α - опре~~
tg α - определён ⇒
⇒ cos α ≠ 0

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$$1: x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$$

$$x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$(x-2y)^2 = xy - 2y - x + 2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - xy + 2y + x - 2 = 0$$

$$x^2 - 5xy + x + 2y + 4y^2 - 2 = 0$$

$$(-x+y+1)(-x+4y-2) = 0$$

$$\begin{cases} -x+y+1=0 \\ -x+4y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = y+1 \\ x = 4y-2 \end{cases}$$

$$x = 4y - 2$$

$$(4(y-1))^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$25(y-1)^2 = 25$$

$$\begin{cases} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ - не подходит. } \text{подходит}$$

$$\text{Ответ: } (6; 2), \left(\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}}; \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\text{Огранич: } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \\ x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases} \quad y \leq \frac{x}{2} \text{ (м.к. } x-2y \geq 0)$$

$$2: x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 12$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$x = y + 1$$

$$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = \frac{25}{10}$$

$$\begin{cases} y-1 = \frac{5}{\sqrt{10}} + 1 \\ y-1 = -\frac{5}{\sqrt{10}} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} - \text{не подходит. } \text{подходит} \\ y = \frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ x = \frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$, тогда $f(1) = f(t) + f(\frac{1}{t})$, где t - какое-то ненулевое рациональное число.

Также $f(1) + f(a) = f(a) \Rightarrow f(1) = 0$, значит

$$f(t) + f(\frac{1}{t}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{t}) = -f(t), \text{ тогда}$$

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$$

Рассмотрим, какие значения принимает $f(a)$ в зависимости от a .

| | | |
|---------------|----------------|--------------------------|
| $a=1, f(a)=0$ | $a=9, f(a)=0$ | $a=17, f(a)=4$ |
| $a=2, f(a)=0$ | $a=10, f(a)=1$ | $a=18, f(a)=0$ |
| $a=3, f(a)=0$ | $a=11, f(a)=2$ | $a=19, f(a)=4$ |
| $a=4, f(a)=0$ | $a=12, f(a)=0$ | $a=20, f(a)=\cancel{5}1$ |
| $a=5, f(a)=1$ | $a=13, f(a)=3$ | $a=21, f(a)=1$ |
| $a=6, f(a)=0$ | $a=14, f(a)=1$ | $a=22, f(a)=2$ |
| $a=7, f(a)=1$ | $a=15, f(a)=1$ | $a=23, f(a)=5$ |
| $a=8, f(a)=0$ | $a=16, f(a)=0$ | $a=24, f(a)=0$ |

$f(a)=0$ при 11 знач. a

$f(a)=1$ при 7 знач. a

$f(a)=2$ при 2 знач. a

$f(a)=3$ при 1 знач. a

$f(a)=4$ при 2 знач. a

$f(a)=5$ при 1 знач. a

Если $f(x)=0$, то есть 7+2+1+2+1 знач. y , что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Если $f(x)=1$, то есть 2+1+2+1 знач. y , что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Если $f(x)=2$, то есть 1+2+1 знач. y , что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Если $f(x)=3$, то есть 2+1 знач. y , что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Если $f(x)=4$, то есть 1 знач. y , что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Всего таких пар x и y :

$$11 \cdot (7+2+1+2+1) + 7 \cdot (2+1+2+1) + 2 \cdot (1+2+1) + 1 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 = 143 + 42 +$$

$$+ 8 + 3 + 2 = 198$$

Ответ: 198

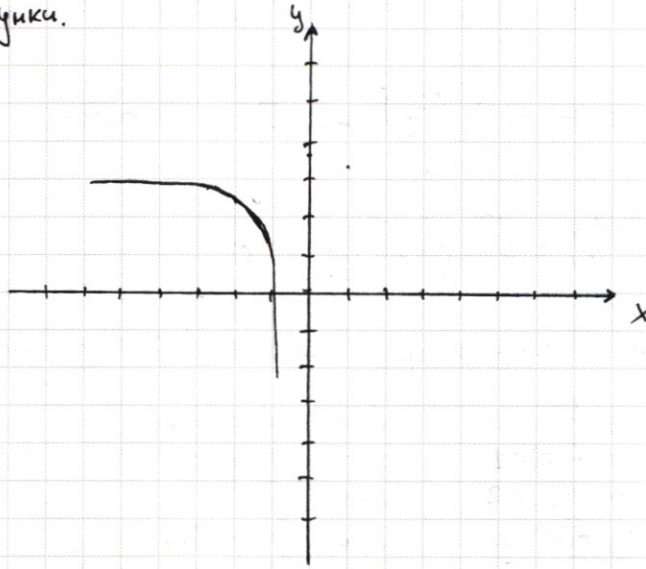
№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \text{ - гипербла}$$

$y = -8x^2 - 30x - 17$ - парабла с вершиной в т. $(-\frac{15}{8}; \frac{89}{8})$, ветви
напр. вниз.

$y = ax+b$ - лин. функ.



~~при x~~

Функция $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ при уменьшении x будет стремиться к 3, но
не будет равна \Rightarrow чтобы $y = ax+b$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f(p) = \lfloor p/4 \rfloor$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(a) + f(b) = f(-a) + f(-b)$$

$Z < 0,5$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 0$$

$$f(4) = f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f(8) = f(2) + f(5) = 1$$

$$f(1) = 0 = f(10) + f\left(\frac{1}{10}\right) = -1$$

$$f(1) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$$

| | | | | | | |
|--|---|---|--|--|--|--|
| $\begin{matrix} 0 \\ * 1 & 5 \\ 0 \\ 2 & 10 \\ 0 \\ 3 & 15 \\ 0 \\ 4 & 20 \\ & 4 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 7 \\ 0 \\ 2 & 14 \\ 0 \\ 3 & 21 \\ & 3 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 11 \\ 0 \\ 2 & 22 \\ & 2 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 13 \\ 2 & 13 \\ & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 17 \\ 2 & 17 \\ & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 19 \\ & 1 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 \\ 1 & 23 \\ & 1 \end{matrix}$ |
|--|---|---|--|--|--|--|

$$4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$$

$$-8x^2 - 30x - 17$$

$$x_0 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$$

$$y_0 = -\frac{8 \cdot 15^2}{648}$$

$$7 \cdot (2+1+2+1) = 42$$

$$2 \cdot (1+2+1) = 8$$

$$3 \cdot (2+1) = 3$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$11 \cdot (7+2+1+2+1) = 143$$

$$55 + 143 = 198$$

$$8x^2 + 30x + 17 = (2x - 1)(4x + 17)$$

$$8\left(x^2 + \frac{15}{4} \frac{30}{8}x + \frac{17}{8}\right) = 8\left(x^2 + 2 \cdot \frac{15}{8}x + \frac{225}{64}\right) +$$

$$-\frac{863}{64} = \frac{8 \cdot 639}{8} \left(x + \frac{15}{8}\right)^2$$

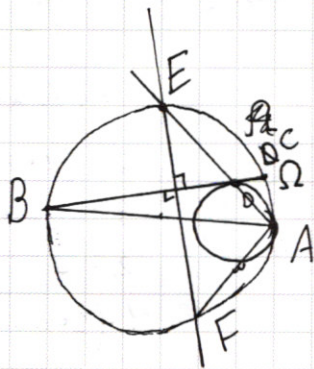
$$\frac{12x + 141}{4x + 3} = 3 + \frac{2}{4x + 3}$$

$$8x^2 + 30x + 17 = 0$$

$$D = 15^2 - 8 \cdot 17 = 225 - 136 = 89$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$$

нч

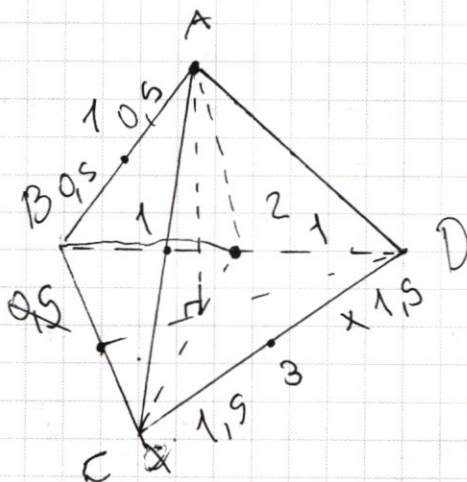


Ω

R-? r-? $\angle AFE$ -? S_{AEF} -?

$$CD=8 \quad BD=17$$

$$8x^2 + 30x + 17 = 2\left(4x^2 + 15x + \frac{17}{2}\right) = 2\left(2x^2 + 2 \cdot 7,5x + (7,5)^2 - 47,75\right) = 2(2x^2 + 7,5)^2 - 95,5$$



$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 18} - 18x$$

$$y = -8x^2 - 30x - 17$$

$$x_0 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$$

$$y_0 = \frac{-8 \cdot 15^2}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{15^2}{8} - 17 =$$

$$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{89}{8}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \underline{64} \\ 68 \\ \underline{102} \\ 1088 \\ \underline{-225} \\ 863 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 17 \\ \underline{8} \\ 136 \\ \underline{225} \\ 97 \\ 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ \underline{8} \\ 236 \\ \underline{136} \\ 5625 \\ \underline{-8,5} \\ 47,75 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 75 \\ \underline{75} \\ 375 \\ \underline{525} \\ 5625 \\ \underline{-8,5} \\ 47,75 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = \\ & = \sin 2\alpha \cdot (2 \cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha \cdot 2 \sin 2\beta \cos 2\beta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sin 2\alpha \cdot 2 \cos^2 2\beta + 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = 2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \\ & + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = 2 \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\cos 2\beta = + \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} & 2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \\ & 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha = -1 \quad | : \cos^2 \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4 \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ & \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1 = -1$$

$$| : \cos^2 \alpha \neq 0 \text{ (м.к. } \operatorname{tg} \alpha \text{ оп.)}$$

$$4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 = 0$$

$$2 \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \quad ? \quad 3 \text{ зна.}$$

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$$1: \begin{aligned} x-2y &= \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x-2y &= \sqrt{(x-2)(y-1)} \end{aligned}$$

$$x^2-4xy+4y^2 = xy-2y-x+2$$

$$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2=0$$

$$\begin{aligned} (-x+4y+1)(x+8y+2) &= \\ = x^2+4y^2-2xy-x-4x+4y+2x-2y &= x^2+4y^2-2xy-x-2y+2 \end{aligned}$$

$$(y-x+1)(4y-x-2)=0$$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = \frac{x+2}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = y+1 \\ yx = 4y-2 \end{cases}$$

~~$$(x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25$$~~

~~$$(x-2)^2 = \frac{25}{10}$$~~

~~$$x = (y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$~~

~~$$10(y-1)^2 = 25$$~~

~~$$(y-1)^2 = \frac{5}{2}$$~~

$$\begin{cases} y = \frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \left(\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}, \frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) \\ y = \frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} & \left(\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}}, \frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) \end{cases}$$

Озр:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases} & \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \end{cases} & \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$2: x^2+9y^2-4x-18y=12$$

$$x(x-4)+9y(y-2)=12$$

$$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$$

$$(x-2)(9y-3) = -3y-x$$

$$x^2-4x+4-4 = -9y^2+18y+9-9+12$$

$$(x-2)^2-4 = -(3y-3)^2+21$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin\beta\cos\beta = \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

~~$$(x-2)^2 + 9\left(\frac{x-6}{4}\right)^2 = 25$$~~

~~$$(4y-8)^2 + 9(4y-1)^2 = 25$$~~

~~$$25(y-1)^2 = 25$$~~

~~$$(y-1)^2 = 1$$~~

~~$$\begin{cases} y=2 & (6; 2) \\ y=0 & (-2; 0) \end{cases}$$~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)