

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром S , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x + 2y) - \sqrt{3} \sin(x + 2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, грани $ABCD$ и $CDD_1 C_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$, плоскости CDD_1 , а также плоскости ABC в точке A . Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M . Найдите $\angle BB_1 C_1$ и объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1 M = 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20 \end{cases} \rightarrow$$

$$4x - y = 64$$

$$y^2 - 16x^2 = (y - 4x)(y + 4x) = -64(y + 4x)$$

$$\begin{cases} 4x + 4\sqrt[3]{y + 4x} = 44 \\ y + 4\sqrt[3]{y + 4x} = -20 \end{cases} +$$

$$(4x + y) + 8\sqrt[3]{y + 4x} = 24$$

$$\downarrow t = \sqrt[3]{y + 4x} \rightarrow$$

$$t^3 + 8t - 24 = 0$$

~~Ожидаем целые корни~~ $t = 2$ - корень \rightarrow

$$\frac{t^3 + 8t - 24}{t^3 - 8} \Big| t - 2$$

$$\frac{t^3 + 0t^2 + 8t - 24}{t^3 - 2t^2} \Big| t - 2$$

$$\begin{array}{r} 2t^2 + 8t \\ - 2t^2 - 4t \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -12t - 24 \\ + 12t - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(t - 2)(t^2 + 2t + 12) = 0$$

$$D = 1 - 12 < 0$$

$$t = \sqrt[3]{y + 4x} = 2$$

$$y + 4x = 8$$

$$\begin{cases} y + 4x = 8 \\ 4x - y = 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8x = 72 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow$$
$$y = 8 - 36 = -28$$

Ответ: (9; -28)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\log_{3x} + 4} \leq \log_{3x} \frac{1}{t+2}$$

$$2 \sqrt{\log_{3x} + 4} \leq -2 \log_{3x} t$$

$$\sqrt{\log_{3x} + 4} \leq -\log_{3x} t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3x} + 4 \leq \log_{3x}^2 t \\ \log_{3x} t \geq 0 \\ -\log_{3x} t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{t+1} \geq 0 \\ -\frac{t}{t+2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_{3x} x \leq \frac{\log_{3x}^2 t}{\log_3 t}$$

$$\log_{3x} t = \frac{\log_3 x}{\log_3(t)+1}$$

$$\log_{3x} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 t + 2}$$

$$\frac{t}{t+1} \leq \left(\frac{t}{t+2}\right)^2$$

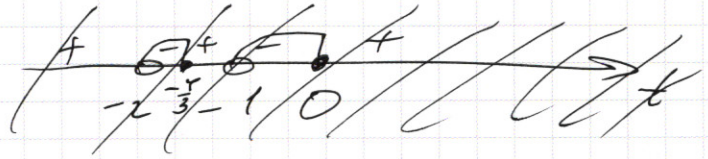
$$\frac{t^2}{(t+2)^2} - \frac{t}{t+1} \geq 0$$

$$t \left(\frac{t}{t^2 + 4t + 4} - \frac{1}{t+1} \right) \geq 0$$

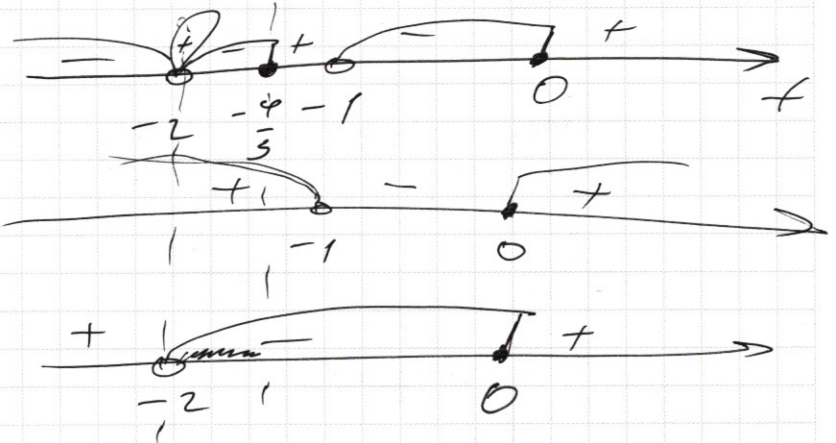
$$t \cdot \frac{t^2 + t - t^2 - 4t - 4}{(t+1)(t+2)^2} \geq 0$$

$$f \cdot \frac{-3t-4}{(t+2)^2(t+1)} \geq 0$$

$$\frac{t \left(t + \frac{4}{3} \right)}{(t+2)^2(t+1)} \leq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} -2 < t \leq -\frac{4}{3} \\ -1 < t \leq 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} t < -2 \\ -2 < t \leq -\frac{4}{3} \\ -1 < t \leq 0 \end{array} \right.$$

$$1) \log_3 x \leq 2 \frac{t}{t+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{t+2} \leq 0$$

$$C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t \leq -\frac{4}{3} \\ t = 0 \end{array} \right.$$

$$1) \log_3 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

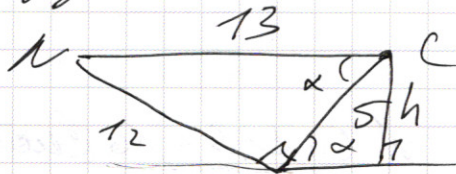
$$2) -2 < \log_3 x \leq -\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{9} < x \leq \frac{1}{3^{4/3}}$$

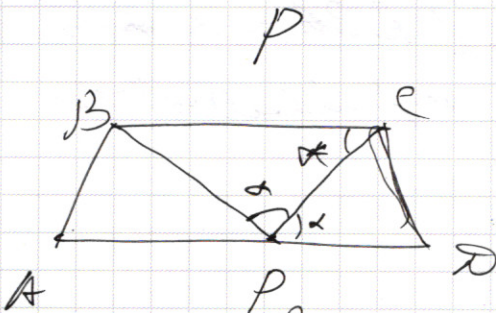
$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3^{4/3}} \right] \cup \{1\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

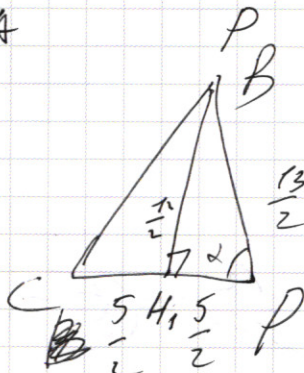
~ 4
~~Все рис~~ Чертеж зауряможен, поэтому
будем использовать векторы



$$h = 5 \sin \alpha = 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{5 \cdot 12}{13}$$

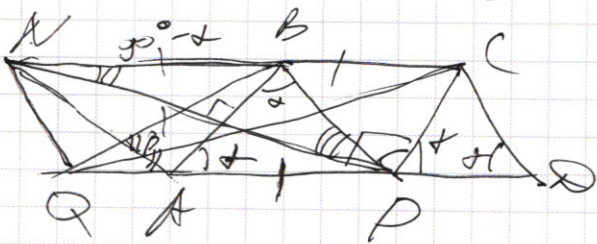


ω вписана в $\angle BPD \Rightarrow$
ею центр лежит на биссектрисе \Rightarrow
 $\angle BPC = \angle CPD = \angle BPD \Rightarrow$
 $\triangle BCP$ - равностор.



$\triangle BPH_1 \sim \triangle KPH_2$ (по двум углам) \Rightarrow
 $BP = \frac{13}{2} = AP$, $BC \parallel AP \Rightarrow$
 $ABCP$ - параллелограм (по трем) \Rightarrow
 $\angle CPD = \angle BAP = \angle APC =$
 $= \alpha = \arctan \frac{12}{5}$

Аналогично, $\angle BQC = \angle CQD = \beta$



$$CP = AB$$

по теореме синусов в $\triangle ABQ$:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{QB}{\sin \alpha}$$

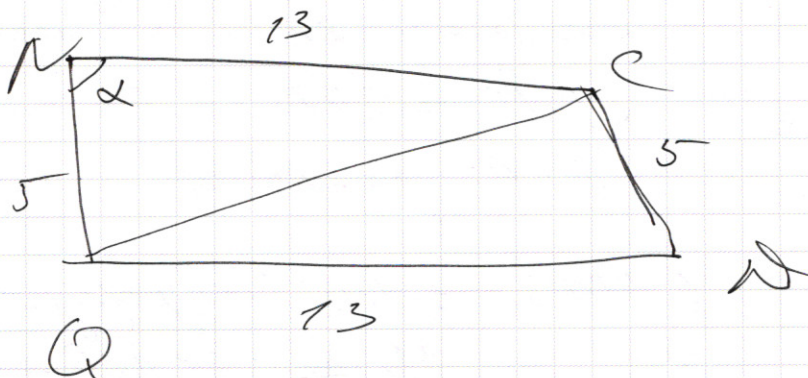
$$\frac{5}{\sin 2\beta} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{6} \Rightarrow$$

$$\sin 2\beta = \frac{20}{169}$$

$AB \parallel CP \Rightarrow AB \perp NP$

Заметим, что $APBN$ — ромб, т.к. все стороны равны.

Т.к. $BQ = AN = \frac{13}{2}$, то $AQNB$ — равнобедр. трапеция $\Rightarrow \angle BQA = \angle QBA = \alpha \Rightarrow$
 $= \angle CPD \Rightarrow NCPQ$ — ~~исправлено~~



$$S_{NCPQ} = QD \cdot h = \frac{13}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{13} = 60$$

$$\triangle NQC \sim \triangle NPC \Rightarrow \angle NQC = 90^\circ$$

Ответ: $\angle APC = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$; $\angle NQC = 90^\circ$; $S_{NCPQ} = 60$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq \sqrt{-\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{5} + \frac{49}{4}}$$

~ 5

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 9 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3} \sin(x+2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x+2y) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x+2y) = -8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(x+2y + \frac{\pi}{3}\right) = -8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(x+y)}{9}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{9} = -\frac{\cos\left(x+2y + \frac{\pi}{3}\right)}{8}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x + \cos y}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = -8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\sin(x+y) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x+2y + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{x+y + \frac{\pi}{6} - x - 2y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y - \frac{\pi}{6} - x - 2y}{2}\right) = -\cos\left(x+2y + \frac{\pi}{3}\right)$$

прообразованные как кор. 1/2

~3

abcdefg

1) $\bar{g} + \overline{fg} + \overline{efg} \Rightarrow \emptyset$, т.к. не выполняется истинности

2) $\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12345 =$
 $= 3g + 20f + 200e + 1000d = 12345$

$g = 5$

$f = 1$

$e = \frac{3}{2} \Rightarrow \emptyset$

3) $\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12345$

$g = 5$

$f = 1$

$e = 1$

$d = 1$

$c = 1$

$\Rightarrow \overline{c11115} \Rightarrow$

то есть в такие числа:

$g \cdot 10 = 50$
или ~~какие-то значения~~ e (все, кроме 0)

при увеличении увеличиваем
остаток и увеличиваем сумму
получается как шестидесяти
значие.

Ответ: 50.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

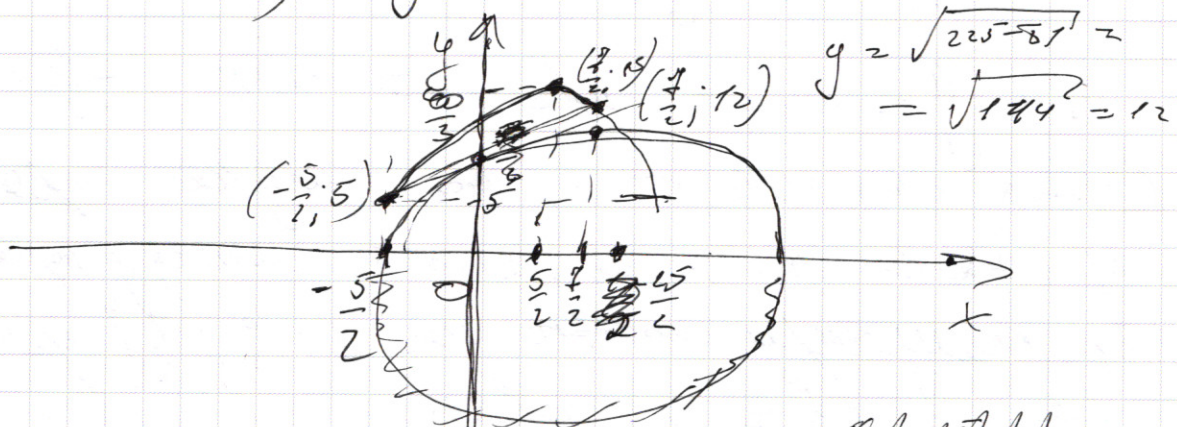
$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

$y \geq 0$

$$y^2 = -x^2 + 25x + \frac{275}{4}$$

$$\left(x^2 - 25x + \frac{625}{4}\right) + y^2 = \frac{275}{4} + \frac{625}{4}$$

$$\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + y^2 = 225 = 15^2$$



$$y^2 = -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

$$x_c = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{5}{3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{2}$$

$$y_c = -\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{45}{4} = -\frac{25}{12} + \frac{25}{6} + \frac{45}{4} = \frac{25 + 45}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6}$$

$$y_c^2 = 225 - 100 = 125 \quad \vee y_c^2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 125 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$125 \vee \frac{1600}{9} \Rightarrow y_c > y_c'$$

$$1125 < 1600$$

$$-\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4} = 0$$

$$y_c\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{49}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} + \frac{45}{4} =$$

$$= -\frac{49}{12} + \frac{35}{6} + \frac{3 \cdot 45}{4} =$$

$$= \frac{135 - 49 + 70}{12} = \frac{135 + 21}{12}$$

$$= \frac{156}{12} = \frac{78}{6} = \frac{39}{3} = 13$$

2) $y = ax + b$ проходит через $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$

Стоит отметить, что все рисунки касания $y = ax + b$ дотронула линия между касательной и полукругом касаются на $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ при введенных условиях.

$$\frac{7}{2} = 5a + b \Rightarrow b = \frac{7}{2} - 5a$$

$$y = ax + \frac{7}{2} - 5a = a\left(x + \frac{7}{5}\right) + \frac{7}{2}$$

$$x^2 - 25x + \frac{645}{4} + \left(a\left(x + \frac{7}{5}\right) + \frac{7}{2}\right)^2 = 225 \quad \frac{275}{4}$$

$$x^2 - 25x + \left(ax + \left(\frac{5a}{2} + \frac{7}{2}\right)\right)^2 = 275$$

$$x^2 + 25x + a^2x^2 + 2ax\left(\frac{5a}{2} + \frac{7}{2}\right) + \frac{25a^2}{4} + 25a + \frac{49}{4} = 275$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(25 + 2a(5a + 7)) + \left(\frac{25a^2}{4} + 25a + \frac{49}{4}\right) = 275$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x(25 + 2a(5a + 7)) + \left(\frac{25a^2}{4} + 25a - \frac{125}{4}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$2(25 - 4) - (a^2 + 1)(25 + 5a - \frac{25}{2})$$~~

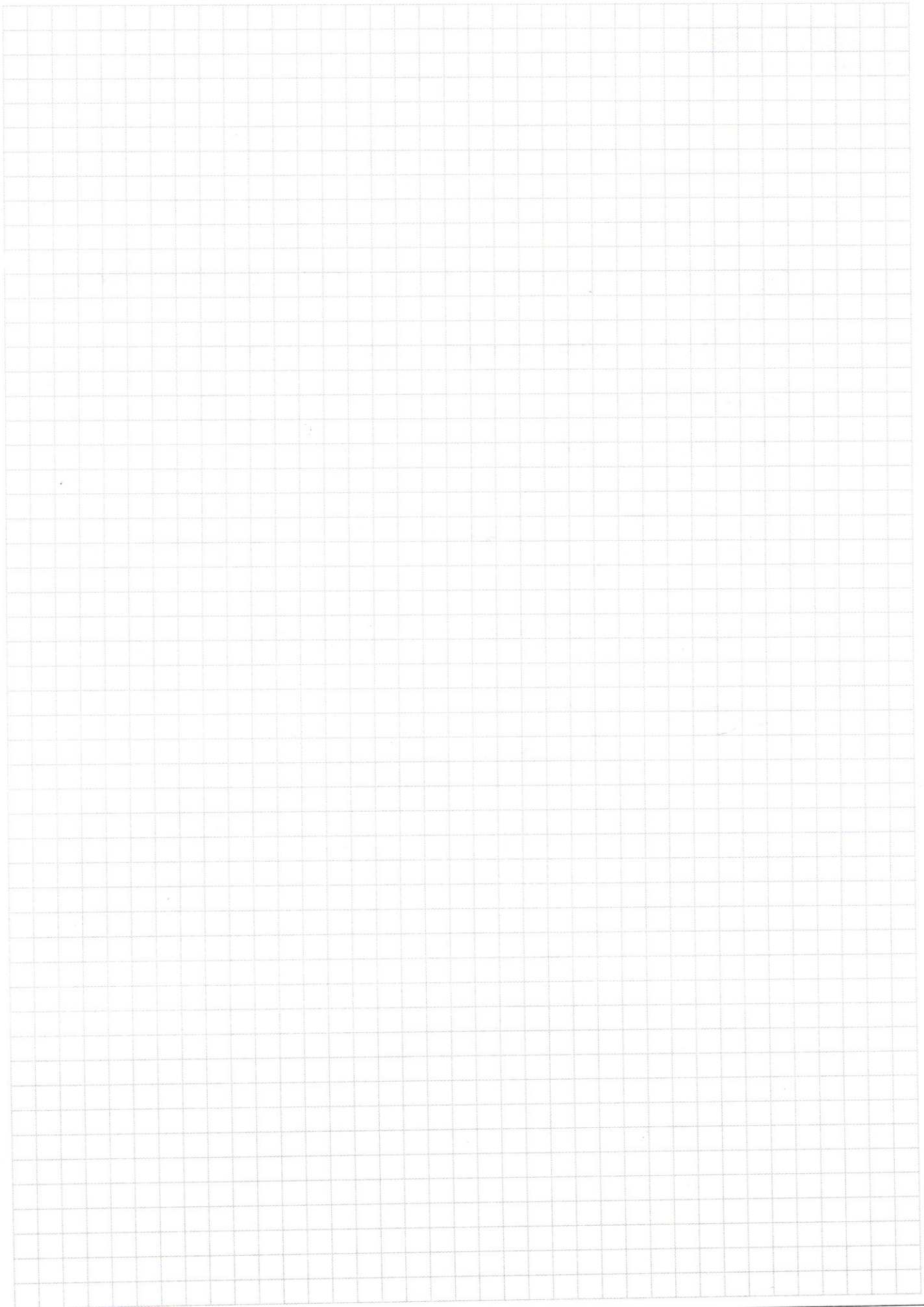
~~можно убедиться, что при подстановке~~

Проверим, проходит ли прямая,
прошедшая через $(-\frac{5}{2}, 5)$ и $(\frac{7}{2}, 13)$:
проходит, т.е. $D=0$.

$$\begin{cases} 13 = \frac{7}{2}a + b \\ 5 = -\frac{5}{2}a + b \end{cases} \rightarrow b = 6a \rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$b = 5 + \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = 5 + \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$$

Ответ: $(\frac{4}{3}, \frac{25}{3})$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin(x + 2y) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - y\right) \cos(x + y) = 0$$

$$y = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$1) \quad \text{tg } k - \text{tg } y = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

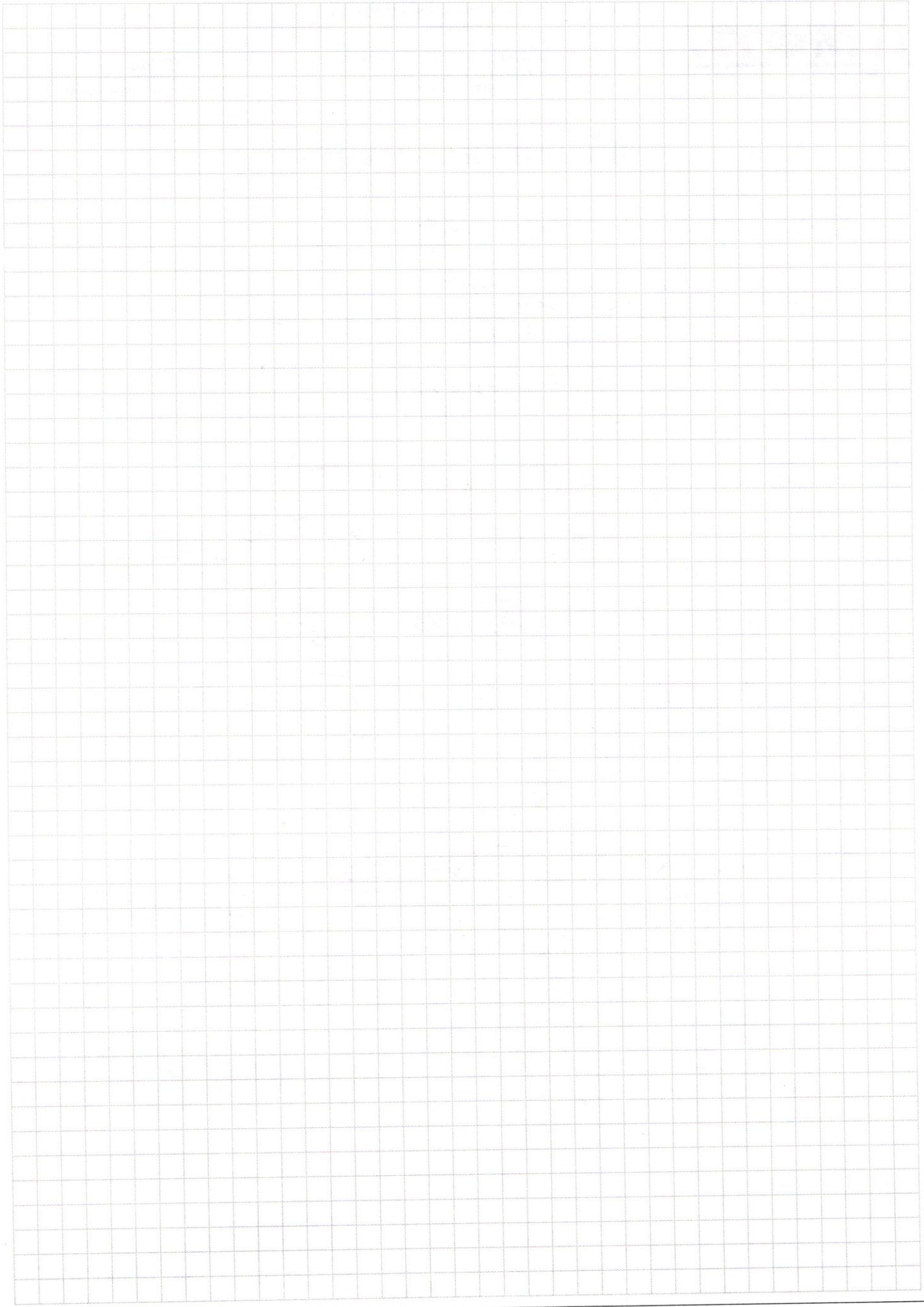
$$2) \quad x = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 9 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3} \sin(x+2y) = -10 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$8 \sin(x+y) = -8 \cos\left(x + 2y + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + 2y + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$8(\sin(x+y) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - (x+2y)\right)) = -\cos\left(x + 2y + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$8 \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{2x+3y}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + 2y + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$8 \sin(x+y) + 9 \cos\left(x + 2y + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - 12} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{95}{4}$$

1) ~~275 + 25x~~

$$ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{95}{4}$$

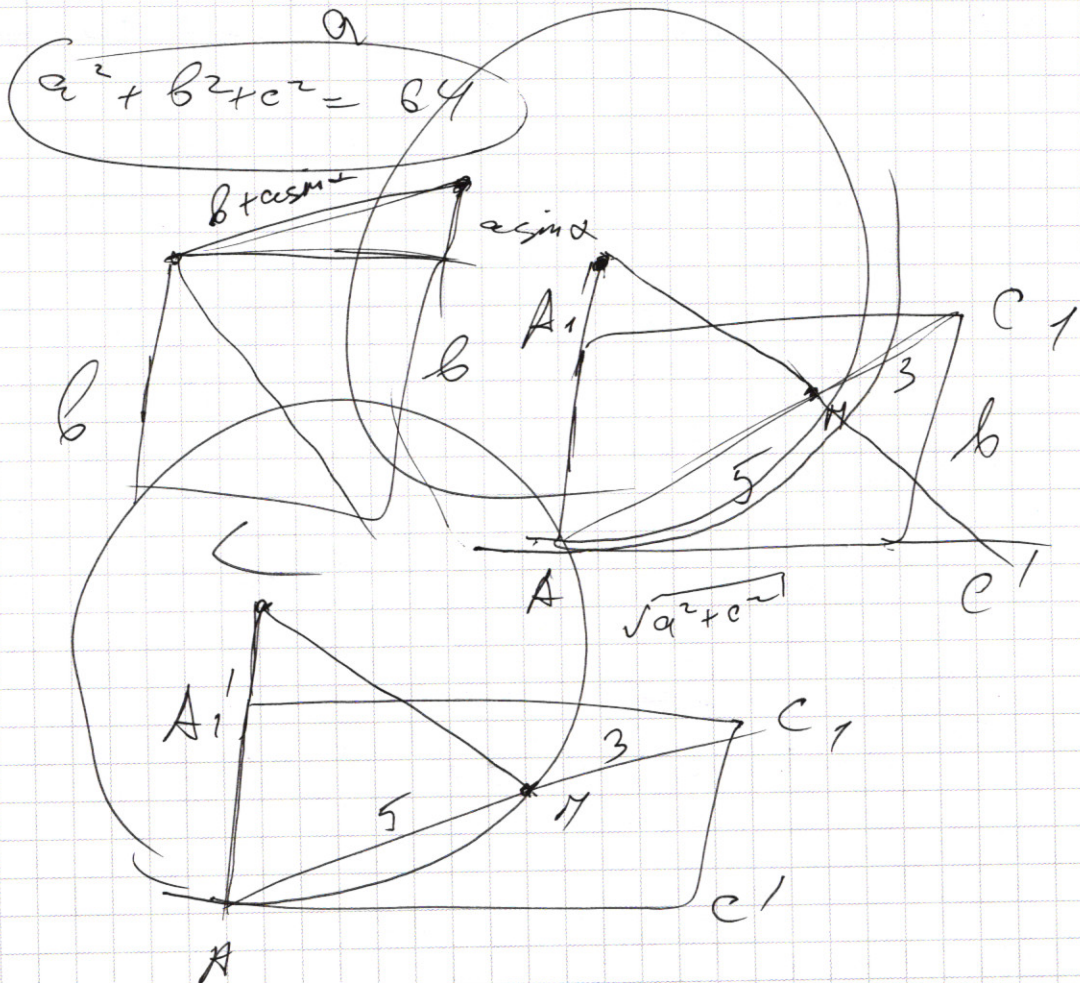
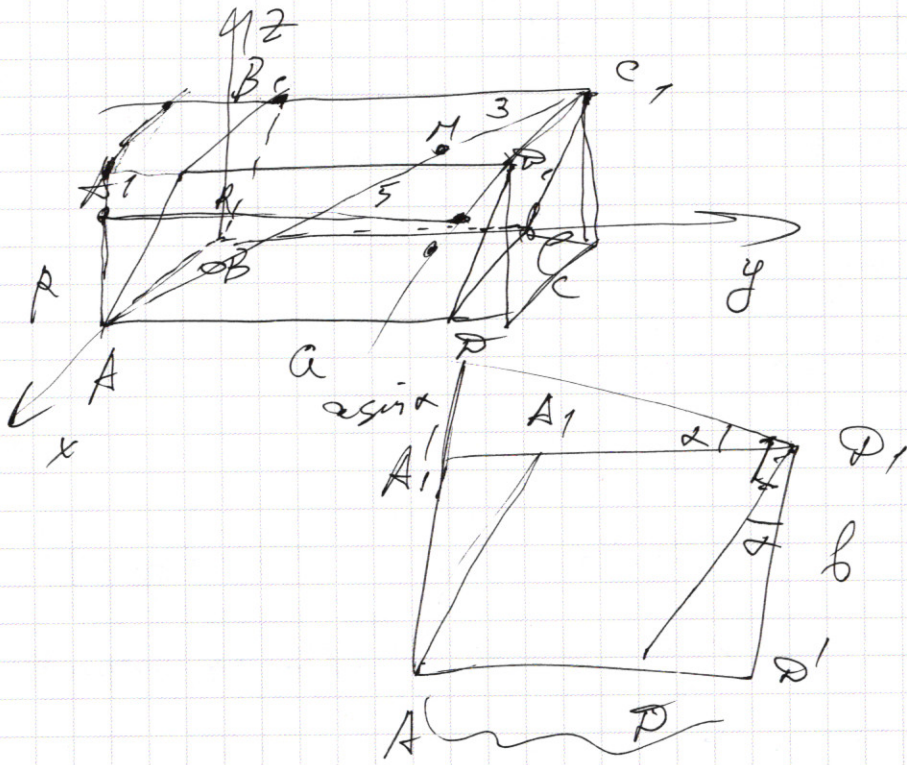
$$3ax + 3b \leq -x^2 + 5x + 95$$

$$(x^2 + x(3a-5) + 3(b-95)) \leq 0$$

$$-\frac{2x_0}{3} + \frac{5}{3} = 0 \quad x_0 = \frac{5}{2}$$

abcdefg

$$\overline{g+fg} + \overline{efg} = 12345$$



$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 6x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 6x^2} = -20 \end{cases}$$

$$y^2 - 6x^2 = -4(y + 4x)$$

~~abcd~~

$$\begin{cases} 4x + 4\sqrt[3]{y+4x} = 44 \\ y + 4\sqrt[3]{y+4x} = -20 \end{cases}$$

abcdefg

efg + defg + cdefg

$$4x + y + 8\sqrt[3]{y+4x} = 24$$

$$t^3 + 8t - 24 = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

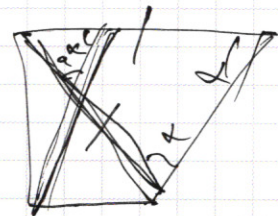
$$(t^2 + 2t + 12)(t - 2) = t^3 - 2t^2 + 4t^2 - 4t + 12t - 24 =$$

$$t^3 + 8t - 24$$

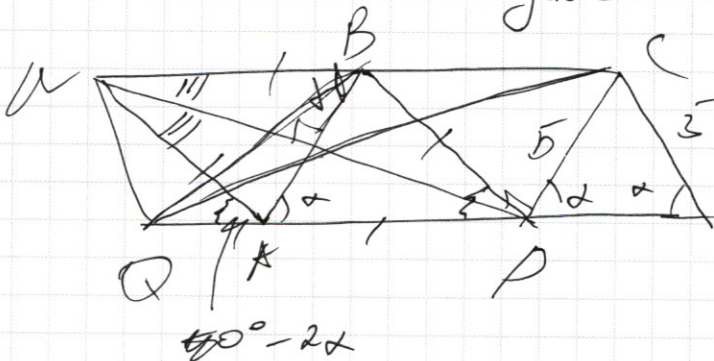
$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq -2 \log_{9x} x$$

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq$$



$$\log_{9x} x = \frac{\log_{3x} x}{\log_{3x} 3x} = \frac{\log_{3x} x}{1 + \log_{3x} 3}$$



$$y = -\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{25}{3} =$$

$$y = -\frac{5}{3} + \frac{25}{3} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$h = 5 \sin \alpha = 5 \cdot \frac{12}{13}$
 $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$
 $144 + 25 = 169$