МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

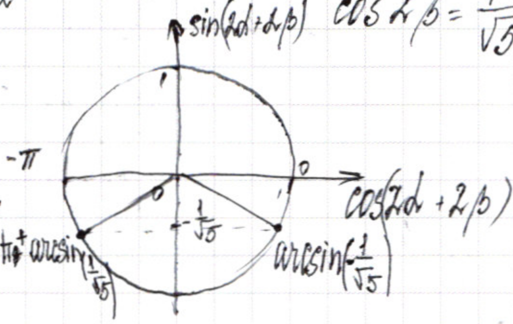
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \qquad tg\alpha - ?$$

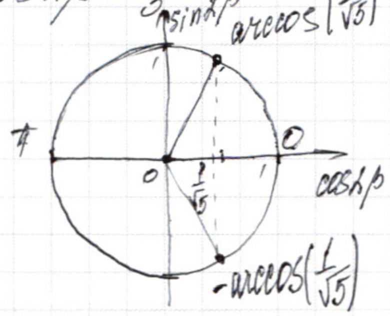
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$



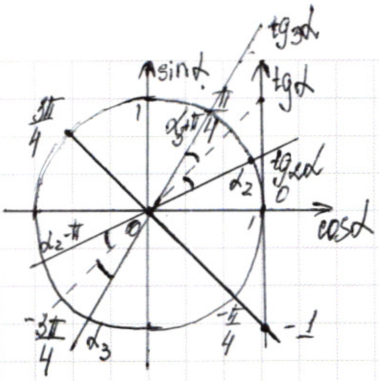


$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = -\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ 2\beta = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -\frac{3\pi}{2} + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha_3 = -\frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \alpha_4 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$



$tg_1\alpha = -1.$

$tg_2\alpha = tg\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)$

$tg_3\alpha = tg\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right))$.

Пусть $\gamma = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) \Rightarrow \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt5}$; $\cos\gamma = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\gamma = \frac{1}{2}$. Тогда $tg_2\alpha = tg\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\gamma}{1 + tg\frac{\pi}{4}tg\gamma} =$

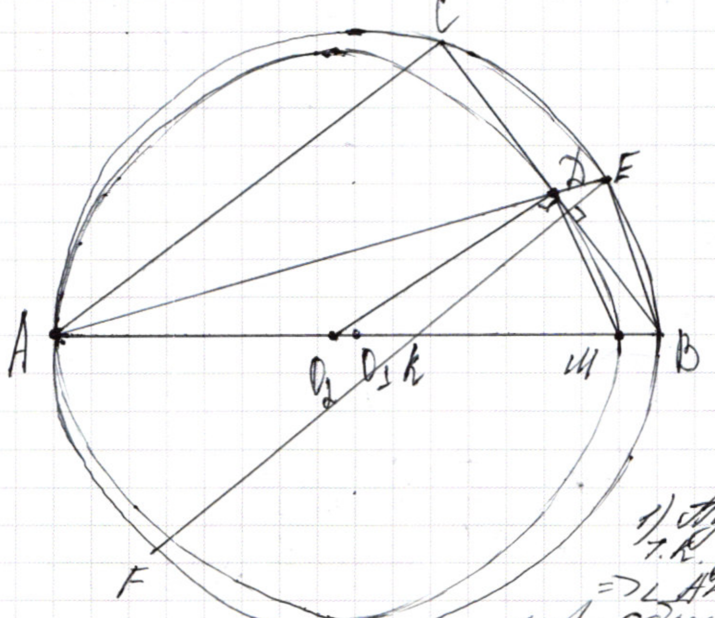
$= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$; $tg_3\alpha = tg\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\gamma}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\gamma} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-1\cdot\frac{1}{2}} = 3.$

Ответ: $tg_1\alpha = -1.$

$tg_2\alpha = \frac{1}{3}$

$tg_3\alpha = 3.$

№4



Дано: ω; Ω - окр-ти

ω кас. $\Omega = A$

AB - диам. Ω

$C \in \Omega$;

BC кас. $\omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

$F \in \Omega$; $EF \perp BC$

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

$\omega = (O_2; r)$; $\Omega = (O_1; R)$

Найти: радиусы ω и Ω;

$\angle AFE$.

$S_\triangle AEF$.

Решение:

1) Пусть $EF \cap AB = K$. $EF \perp BC$; $O_2D \perp BC$, т.к. радиус в т-ку кас-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle AEK$ т.к. соответственные, $\angle A$ - общий $\Rightarrow \triangle ADO_2 \sim \triangle AEK \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_2A}{AK} = \frac{AD}{AE}$

2) Пусть $AB \cap \omega = M \Rightarrow AM$ - диаметр $\Rightarrow \angle ADM = \angle AEB = 90°$ т.к. опир-ся на диаметр $\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle AEB$ ($\angle A$ - общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{O_2A}{AK} = \frac{r}{R} \Rightarrow AK = R = AO_1 \Rightarrow K \equiv O_1.$

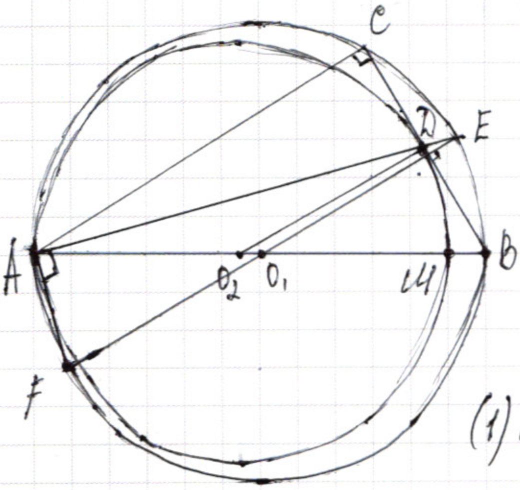
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3) BD - кас-я ; BA - секущая =>

$BD^2 = AB \cdot MB = (2R - 2r) \cdot 2R = \frac{289}{4}$ (1)

4) $\angle BCA$ опирается на диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ ($\angle B$ - общий)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{17 \cdot 2}{2(17+15)} = \frac{17}{32}$ (2)

(1) и (2): $\begin{cases} \frac{289}{4} = 4R(R - r) \\ 17 \cdot R = 16(2R - r) \end{cases}$ $\begin{cases} 16r = 15R \\ 289 = 16R(R - r) \end{cases}$

$\begin{cases} r = \frac{15}{16}R \\ 289 = 16 \cdot \frac{R^2}{16} \end{cases}$ $R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16} = 15\frac{15}{16}$.

5) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$:

$\frac{DO_2}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32} \Rightarrow AC = \frac{32}{17} \cdot DO_2 = \frac{32r}{17} = \frac{32 \cdot 15 \cdot 17}{16 \cdot 17} = 30$.

6) $\triangle ACD$: По т. Пифагора $AD = \sqrt{15^2 \cdot 4 + \frac{15^2}{4}} =$

$= \frac{15}{2}\sqrt{17}$.

7) $\triangle ADO_2 \sim \triangle AEO_1 \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R} = \frac{15}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{15\sqrt{17} \cdot 16}{2 \cdot 15} = 8\sqrt{17}$.

8) $\triangle AFE$: $\angle EAF$ опир-ся на диам. $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

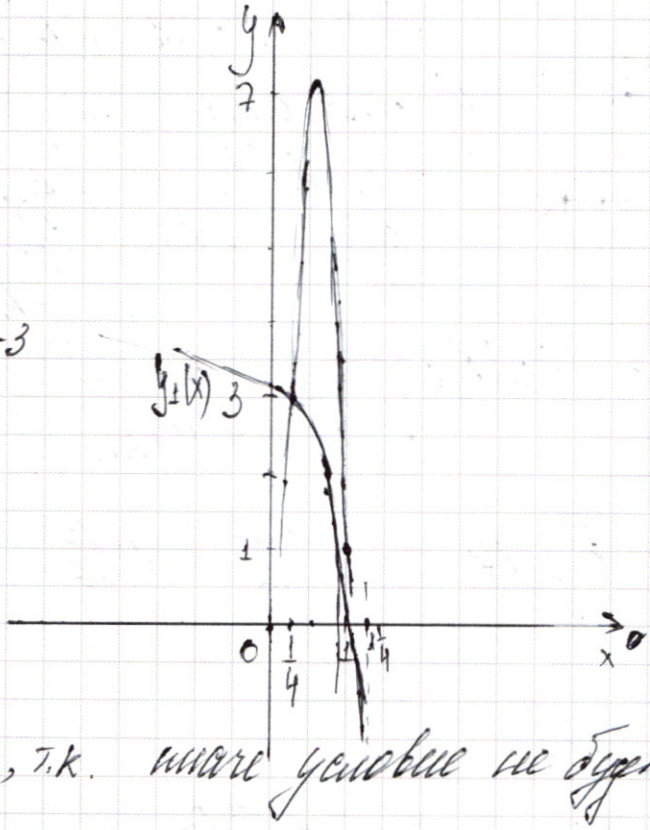
9) По т. Пифагора в $\triangle AFE$: $AF = \sqrt{4 \cdot 17^2 - 64 \cdot 17} =$

$= \sqrt{17\cdot 4}\cdot\sqrt{17-16} = 2\sqrt{17} \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{17} = 8\cdot 17 = 136.$

Ответ: 17; $15\frac{15}{16}$; $\mathrm{arctg}\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$; 136.

№6.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$ $\left[\frac{1}{4};1\right].$



$y_1 = \frac{16x-16}{4x-5}$

$y_1 = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}.$

$y_2 = -32x^2+36x-3$

$x_b = \frac{9}{16}$

$y_b = 7\frac{1}{8}.$

$y_3 = ax+b.$

$M\left(\frac{1}{4};3\right) \in y_3(x)$, т.к. иначе условие не будет выполняться.

№5

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\left[\frac{p}{4}\right] < 0$ при $\frac{p}{4} < 0$, т.е. $p<0 \Rightarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ при $f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$,

т.е. либо $x<0$ либо $\frac{1}{y}<0$,

но $y; x \in [2;25] \Rightarrow x>0, \frac{1}{y}>0 \Rightarrow 0$

Ответ: 0.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-(12y+6)=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90 \end{cases}$$

~~x-12y~~
$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2-12(2y-1)(x-6)+36(2y-1)^2=(x-6)(2y-1) \\ x-12y\geq 0 \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2-13(2y-1)(x-6)+36(2y-1)^2=0 & (1) \\ x\geq 12y & (2) \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 & (3) \end{cases}$$

$(1): (x-6)^2-13(2y-1)(x-6)+36(2y-1)^2=0$

а) $2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$; $(x-6)^2=0 \Rightarrow x=6$. $\Big\}$ не удовл. (3).

б) : $(2y-1)^2\neq 0$

$$\left(\frac{x-6}{2y-1}\right)^2-13\left(\frac{x-6}{2y-1}\right)+36=0.$$

$D=169-144=25.$

$$\frac{x-6}{2y-1}=\frac{13\pm 5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-6}{2y-1}=9 \\ \frac{x-6}{2y-1}=4 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) $x-6=9(2y-1)$

$x-6=18y-9$

$x=18y-3$

подст. в (2) и (3)

$$\begin{cases} 18y-3 \geq 12y \quad (\#) \\ (18y-3)^2+(6y-3)^2=90 \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$:

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$(2y-1)^2=1.$

$2y-1=1.$ $\quad$ $2y-1=-1.$

$y=1$ $\quad$ $y=0.$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ не удовл. $(\#)$

$x=15$

$(15;1)$

2) $x-6=4(2y-1)$

$x-6=8y-4.$

$x=8y+2.$

$$\begin{cases} 8y+2 \geq 12y.\ (\#) \\ (8y+2)^2+(6y-3)^2=90. \end{cases}$$

$64y^2+32y+4+36y^2-36y+9=90$

$100y^2-4y-77=0.$

$\frac{D}{4}=4+7700=7704.=$

$=4\cdot 1926=4\cdot 2\cdot \cancel{963}\cdot 9\cdot 107=$

$=6\sqrt{214}$

$y_1=\frac{2+6\sqrt{214}}{100}$ - не удовл. $(\#)$

$y_2=\frac{2-6\sqrt{214}}{100}=\frac{1-3\sqrt{214}}{50}$

$\Downarrow$

$x=\frac{4-12\sqrt{214}}{25}+2=\frac{54-12\sqrt{214}}{25}.$

Ответ: $(15;1)$; $\left(\frac{54-12\sqrt{214}}{25}; \frac{1-3\sqrt{214}}{50}\right)$.

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0 \Rightarrow$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 3^{\log_3 5\cdot\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^1}$

☐ черновик ☑ чистовик $\quad$ Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 3}\leq 0.$$

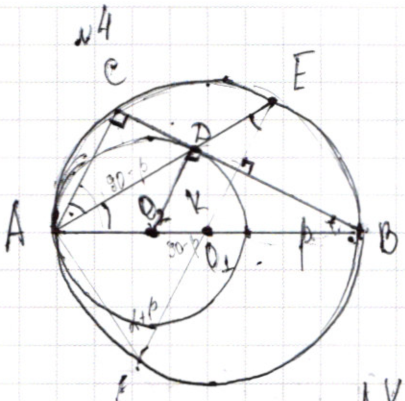
$$10x-x^2=t$$

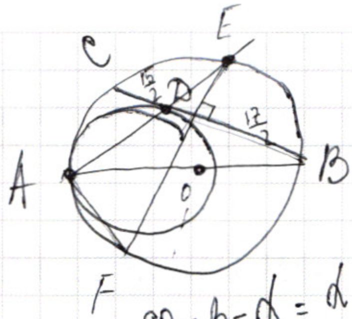
$$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t^{\log_3 3}\leq 0.$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№4





$r; R; \angle AFE; S_{\triangle AEF}$

$90-\beta-\alpha=\alpha$

$90-\beta=2\alpha$

$\angle FAB = 180° - \alpha - \cancel{\beta} - 90 + \cancel{\beta} = 90-\alpha$

$AKF = 90° - \beta$

$\angle AFE = \alpha+\beta$

$\angle KAF = 180° - 90 + \cancel{\beta} - \alpha - \cancel{\beta} = 90 - \alpha$

$\angle BAE = 90-\beta-\alpha$

$\angle EAF = 90-\beta-\alpha+90-\alpha=$

$289 \cdot 64 = 1156 + 1734 = 18496$

$17 \cdot 8 = 136$

$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$

$$\boxed{BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R} = \cancel{4R^2 - 4Rr} = \left(2R - \frac{15}{8}R\right)2R = 4R^2 - \frac{15}{4}R$$

$\cancel{BD^2 = (2R-r)^2 + r^2} =$

$4R^2 - \frac{15}{4}R - \frac{289}{4} = 0$

$BDO_2 \sim \triangle BCA$

$$\boxed{\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{2R-r}{2R}}$$

$16R^2 - 15R - 289 = 0$

$\cancel{(4R)^2 - 15R - 17^2 = 0}$

$D = 225 + 18496 =$

$18496 + 225 = 18721$

$\frac{17\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 32} = \frac{2R-r}{2R}$

$BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R = 4R\cdot\frac{1}{16}R = \frac{1}{4}R^2$

$17R = 16(2R-r)$

$16r = (32R - 17R)$

$16r = 15R$

$r = \frac{15}{16}R$

$R^2 = 4BD^2$

$R = 2BD = \boxed{17}$

$r = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{(16-1)(16+1)}{16} = \frac{16^2-1}{16} = 16 - \frac{1}{16} = \boxed{15\frac{15}{16}}$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

$\Downarrow$

$AC \Rightarrow \triangle ACD \Rightarrow \boxed{AD} \Rightarrow AE \Rightarrow \sin\angle AFE.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

(*) $10x-x^2>0$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 3^{\log_3 5\cdot\log_3(10x-x^2)}$$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$\cancel{:(10x-x^2)^{\log_3 3}}$$

$$1+\cancel{(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}}\ \cancel{-(10x-x^2)}$$

$$y+y^{\log_3 4}\geq y^{\log_3 5}$$

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$[p]\leq p$

$[3{,}01]=3$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{1}{4y}\right]$

$2\leq x\leq 25$

$2\leq y\leq 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$tg\alpha - ?$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\alpha + 2\beta$

$$tg\,\alpha+\beta = \frac{\sin\alpha+\beta}{\cos\alpha+\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

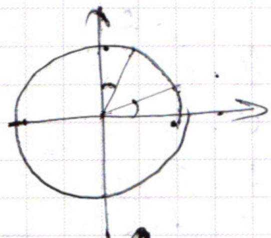
$\cancel{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}}$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$= \cancel{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos}$

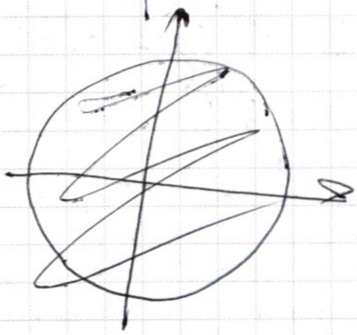
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin(\underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\alpha+\beta}) + \sin(\underset{\overset{\shortparallel}{d}}{\alpha-\beta}) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta.$$



$$\begin{cases} \alpha+\beta = c \\ \alpha-\beta = d \end{cases} \quad \alpha = \frac{c+d}{2}.$$

$$\beta = c - \frac{c+d}{2} = \frac{c-d}{2}.$$



$$\sin c + \sin d = 2\sin\frac{c+d}{2}\cdot\cos\frac{c-d}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}.$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}. \Rightarrow \sin_1 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$$

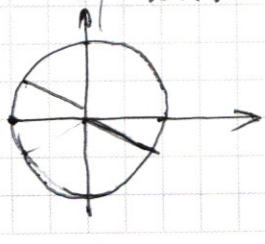
$$\sin_2 2\beta = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1.$



$\cancel{\sqrt5\,\frac{1}{\sqrt5}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \quad (2) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \quad (1) \end{cases}$$

(1): $x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=(3\sqrt{10})^2$

$(x-6)^2=90-9(2y-1)^2$

(2):

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ \boxed{x-12y\geq 0} \end{cases}$$

$4y\leq 2$

$\frac{2+6\sqrt{214}}{25}\leq 2$

$2+6\sqrt{214}\leq 50$

$6\sqrt{214}\leq 48$

$\sqrt{214}\leq 8$

$(x-12y)^2=$

$((x-6)-(12y-6))^2=\sqrt{-(x-6)+2y(x-6)}$

$((x-6)-2(6y-3))^2=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$(x-6)-6(2y-1)^2=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$(x-6)^2+12(x-6)(2y-1)+36(2y-1)^2=(x-6)(2y-1)$

$(x-6)^2+11(x-6)(2y-1)+36(2y-1)^2=0$ подставим (1):

$90-9(2y-1)^2+11\cdot 3\sqrt{10-(2y-1)^2}(2y-1)+36(2y-1)^2=0.$

$90+27(2y-1)^2+3\cdot 11\sqrt{10-(2y-1)^2}(2y-1)=0.$

$9(2y-1)^2+11\sqrt{10-(2y-1)^2}(2y-1)+90=0.$

$D=169(2y-1)^2-144_2=25$

$963:9=107$

$1926:2=963$

$~~1928=2~~$

$~~1928:4~~$

$~~7704:16=48~~$

$7704:4=1926$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$ $(a;b)$-? $[\frac{1}{4};1]$.

$\cancel{27-16x^2+18x}$

$162-81-24=$
$=81-24=$

$-8+18-3=$
$=18-11=7$

$D=256-$

$\cancel{\frac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b}$

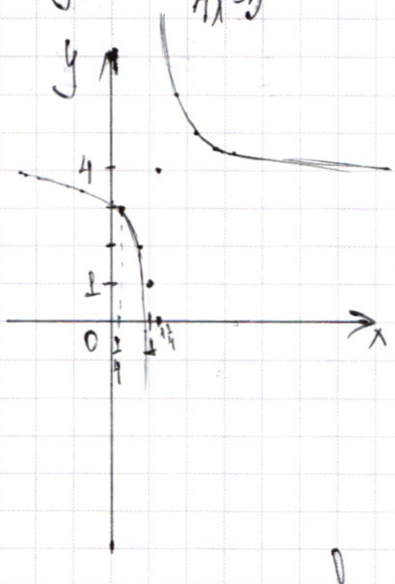
$\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}.$

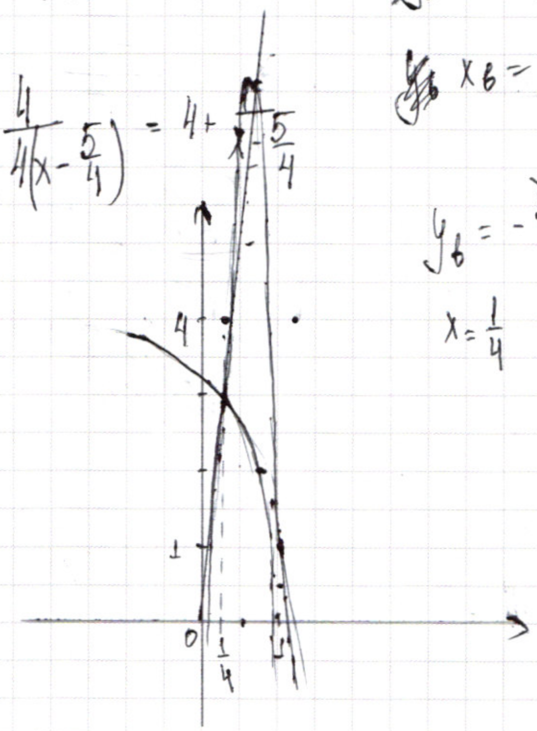
$x_в=\frac{-36}{-2\cdot 32}=\frac{9}{16}.$

$y=\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4(x-\frac{5}{4})}=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$y_в=-\frac{32\cdot 81}{16\cdot 16}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}.$

$x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3=$
$=-2+9-3=4$

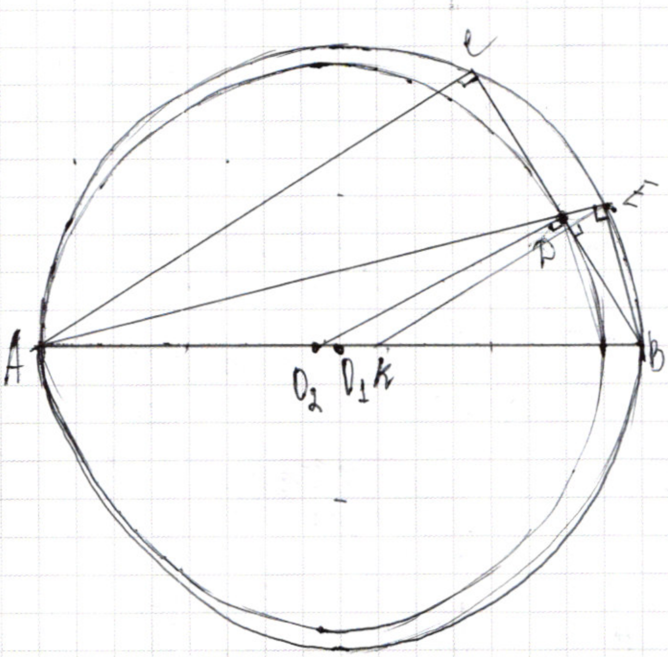




$y=ax+b.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$$\cancel{\frac{O_2D}{KE}=\frac{AD}{AE}}$$

$$\cancel{KE=\frac{AE\cdot O_2D}{AD}}$$

$$\frac{AO_2}{AK}=\frac{O_2D}{KE}=\frac{AD}{AE}$$

$$\frac{O_2D}{AC}=\frac{BO_2}{AB}=\frac{BD}{BC}$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{2r}{2R}=\frac{r}{R}.$$

$$\boxed{\frac{O_2D}{KE}=\frac{r}{R}}$$

$$K\equiv O_1.$$

$$\cancel{KE=O_2D}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)