МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 & (1) \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 & (2) \end{cases}$$

Из (1) вычтем (2):

$x - 8y = 216$

$x = 216 + 8y$ подставим в (1):

$216 + 8y - \sqrt[3]{64y^2 - (216+8y)^2} = 124$

$92 + 8y = \sqrt[3]{(8y - 216 - 8y)(8y + 216 + 8y)}$

Т.к. 3 степень нечетная => можно в нее возводить не накладывая ОДЗ

$4^3(23+2y)^3 = -216(16y+216)$

$(23+2y)^3 = -27(2y+27)$

Пусть $t = 23+2y$, тогда $2y+27 = t+4$:

$t^3 + 27t + 108 = 0$

Подбираем корень $t = -3$

Схема Горнера:

	1	0	27	108
−3	1	−3	36	0

$(t+3)(t^2 - 3t + 36) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t^2 - 3t + 36 = 0 \end{array}\right.$$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 36 < 0$ => нет корней

=> $t = -3$ => $23 + 2y = -3$, $y = -13$ => $x = 216 - 104 = 112$

Ответ: $(112; -13)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2.

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \log_{2x^3} x^9 \ge 0 \\ 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ x^9 > 0 \\ 2x > 0 \\ 2x \ne 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{2x^3} x^9 \ge \log_{2x^3} 1 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x > 0 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{2x^3} x^9 \ge \log_{2x^3} 1 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x^3 < 1 \\ x^9 \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^3 > 1 \\ x^9 \ge 1 \end{cases} \end{array} \right. \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ge 1 \end{cases} \end{array} \right. \\ x > 0, \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ge 1 \end{array} \right. \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup [1; +\infty)$

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

I. $\log_{2x} \frac{1}{x^3} < 0 \Rightarrow \sqrt{\log_{2x^3} x^9} < 0 \Rightarrow x \in \{\varnothing\}$

II. $\begin{cases} \log_{2x} \frac{1}{x^3} \ge 0 \quad (1) \\ \log_{2x^3} x^9 \le \left(\log_{2x} \frac{1}{x^3}\right)^2 = (-3 \log_{2x} x)^2 \end{cases}$

(1) $\log_{2x} x^{-3} \ge 0$

$\log_{2x} x \le 0$

$\log_{2x} x \le \log_{2x} 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ 2x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < 2x < 1 \end{cases} \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \\ \begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad x \in \{\varnothing\} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2};1\right] \\ x \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup [1;+\infty) \\ 9\log_{2x^3} x \leq 9(\log_{2x} x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \{1\} \\ \log_{2x^3} x \leq (\log_{2x} x)^2 \quad (2) \end{cases}$$

(2) :
$$\frac{1}{\log_x 2x^3} \leq \left(\frac{1}{\log_x 2x}\right)^2$$

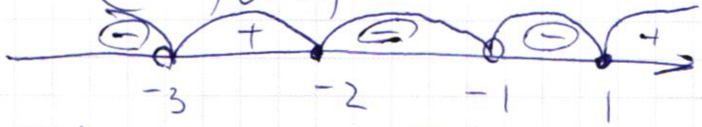
$$\frac{1}{\log_x 2+3} \leq \left(\frac{1}{\log_x 2+1}\right)^2 \qquad \text{Пусть } t = \log_x 2$$

$$\frac{1}{t+3} \leq \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\frac{(t+1)^2 - t - 3}{(t+3)(t+1)^2} \leq 0$$

$$\frac{t^2+t-2}{(t+3)(t+1)^2} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)(t+2)}{(t+3)(t+1)^2} \leq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t < -3 \\ \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq -2 \\ t \neq -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

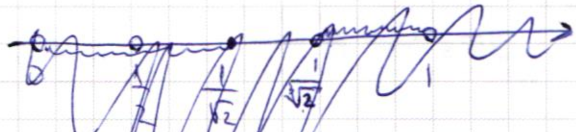
$$\left[\begin{array}{l} \log_x 2 < -3 \\ \begin{cases} \log_x 2 \leq 1 \\ \log_x 2 \geq -2 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

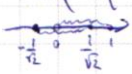
$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 2 \geq \frac{1}{x^3} \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 2 \geq x \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 2 \leq \frac{1}{x^2} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.к. $x > 0$, то можно домножать левые и правые части неравенств на степени x без смены ~~знака~~ знака

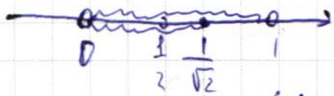
☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{cases}\left[\begin{aligned}&0<x<1\\&x^3>\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right.\\ \left[\begin{aligned}&0<x<1\\&x\le 2\end{aligned}\right.\\ \left[\begin{aligned}&0<x<1\\&x^2\le\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right.\\ x\ne\tfrac{1}{2}\end{cases}\right.\qquad \left[\begin{aligned}&x\in\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}};1\right)\\&x\in(0;1)\\&x\in\left[0;\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\\&x\ne\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

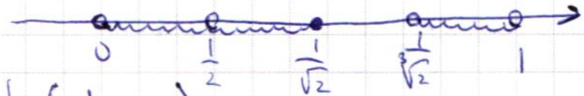




~~$x\in\{0\}$~~



$$\left[\begin{aligned}&x\in\left(0;\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\\&x\in\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}};1\right)\end{aligned}\right.$$



$$\begin{cases}x\in\left(0;\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}};1\right)\\ \text{ОДЗ: } x\in\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\{1\}\end{cases}$$

$\underline{x\in\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]}$ Ответ: $x\in\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\{1\}$

№ 3.

Пусть $\overline{abcdefg}$ – наше семизначное число, тогда

① Степени $10=\{0;1;2\}$, тогда сумма остатков равна $0+\overline{g}+\overline{fg}$ при max $g=9$ и $f=9$ она равна $108 < 12414$ => => такие степени не подходят

② Степени $10=\{1;2;3\}$, тогда сумма: $\overline{efg}+\overline{fg}+\overline{g}$ при max знач. e, f, g равных 9 она равна $999+99+9=1107<12414$ => степени не подходят

③ Степени $10=\{2;3;4\}$, тогда сумма

$\overline{defg}+\overline{efg}+\overline{fg}=12414$

$1000d+200e+30f+3g=12414$

Т.к. числа $1000d$, $200e$ и $30f$ имеют 0 на конце => => $3g$ оканчивается на 4, т.к. 12414 оканчивается на 4 =>

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> Т.к. g – цифра, а $3g \equiv 4 \pmod{10}$ => $g=8$ – единственный вариант

$1000d + 200e + 30f + 24 = 12414$

$1000d + 200e + 30f = 12390 \quad |:10$

$100d + 20e + 3f = 1239$

Аналогично с предыдущим шагом $3f \equiv 9 \pmod{10}$ => => $f=3$ – единственный вариант

$100d + 20e = 1230 \quad |:10$

$10d + 2e = 123$

$2(5d + e) = 123$ правая часть $\not\vdots\, 2$, левая $\vdots\, 2$ =>

=> Такие степени не подходят.

(4) Степени $10 = \{3; 4; 5\}$, тогда сумма

$\overline{cdefg} + \overline{defg} + \overline{efg} = 12414$

$10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

Действуем по аналогии с предыдущим пунктом

$3g \equiv 4 \pmod{10}$ => $\underline{g = 8}$! – единственный $\{a, b, c, d, e, f\}$ – цифры

$1000c + 200d + 30e + 3f = 1239$

$3f \equiv 9 \pmod{10}$ => $\underline{f = 3}$! – единственный

$100c + 20d + 3e = 123$

$3e \equiv 3 \pmod{10}$ => $\underline{e = 1}$! – единственный

$10c + 2d = 12$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} c = 0 \\ d = 6 \end{cases} \end{array}\right.$$ => Наши числа $\overline{ab11138}$ и $\overline{ab06138}$

$a \in \{1; \ldots 9\}$ – 9 вар

$b \in \{0; \ldots 9\}$ – 10 вар

=> $\overline{ab11138} = 9 \cdot 10 = 90$ – вариантов

$\overline{ab06138} = 9 \cdot 10 = 90$ – вариантов

=> всего при таких степенях 180 вариантов

(5). Степени $10 = \{4; 5; 6\}$, тогда сумма

$\overline{bcdefg} + \overline{cdefg} + \overline{defg} = 12414$

$100000b + 20000c + 3000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

$3g \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow \underline{g = 8}!$

$10000b + 2000c + 300d + 30e + 3f = 1239$

$3f \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow \underline{f = 3}!$

$1000b + 200c + 30d + 3e = 123$

$3e \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow \underline{e = 1}!$

$100b + 20c + 3d = 12$

$3d \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow \underline{d = 4}!$

$100b + 20c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ может быть число

$\overline{a004138}$

$a \in \{1; \ldots 9\}$ – 9 вар.

$\Rightarrow \overline{a004138}$ – 9 вариантов при таких степенях

(6). Степени $10 = \{5; 6; 7\}$

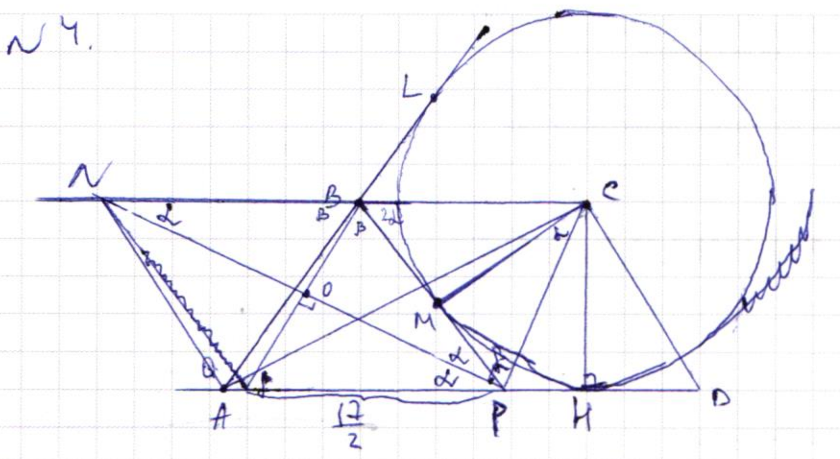
Т.к. число семизначное $\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ остаток от деления нашего числа на 10^7 будет семизначным числом, а значит больше чем 12414 $\Rightarrow$ при таких степенях нет нужных нам чисел

Всего вариантов $180 + 9 = \underline{189}$

Ответ: 189.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Дано: ABCD - равнобок. трапеция
$\omega(C, R)$ касается AD: $CH \perp AD$
BL и BM - касательные к ω
$BL \cap AD = Q$
$BM \cap AD = P$
$N \in BC$
$\angle CPN = 90°$
$\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$
$AP = \frac{17}{2}$
$NC = 17$

Найти: $\angle ADC$ - ?
$\angle NQC$ - ?
$S_{\triangle CDQ}$ - ?

Решение:

1) Т.к. $\triangle PNC$ - прямоуг. $\Rightarrow tg\angle NCP = \frac{NP}{CP} = \frac{8}{15}$

$\Rightarrow$ Пусть $NP = 8x$, тогда $CP = 15x$

По т. Пифагора:

$CN^2 = CP^2 + NP^2$

$289 = 64x^2 + 225x^2$

$x = 1 \Rightarrow NP = 8, CP = 15$

2) Пусть $\angle CNP = \alpha$, тогда $\angle APN = \alpha$ (как внутр накр леж.)

$\Rightarrow \angle CPD = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$\angle CPD = \angle CPM$ (т.к. $\triangle CPH = \triangle CPM$ как прямоуг по двум катетам)

$\Rightarrow \angle CPM = 90 - \alpha \Rightarrow \angle NPB = \angle NPC - \angle MPC = 90° - 90 - \alpha = \alpha$

3) Пусть $\angle NBA = \beta$, тогда $\angle BAP = \beta$ (как внутр накрест леж.)

$NP \cap AB = O \Rightarrow \angle NOB = \angle AOP = 180° - \alpha - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOP = 180° - 180° + \alpha + \beta = \alpha + \beta$

4) В $\triangle BOP$ $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle BOP = 90° \Rightarrow NAPB$ - ромб

5) В $\triangle NPC$ - прямоугольном: $\cos\alpha = \frac{NP}{NC} = \frac{8}{17}$, $\sin\alpha = \frac{15}{17}$

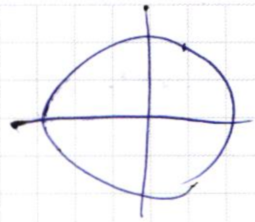
В $\triangle AOP$ - прямоугольном: $\cos\beta = \cos(90 - \alpha) =$

$= \cos 90° \cos\alpha + \sin 90° \sin\alpha = \sin\alpha = \frac{15}{17}$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b \\ ax+b \le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} \end{cases}$$



$$ctg\,x + ctg\,y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$\cancel{\sqrt{3}\cos(x+y) = 5 ...}$

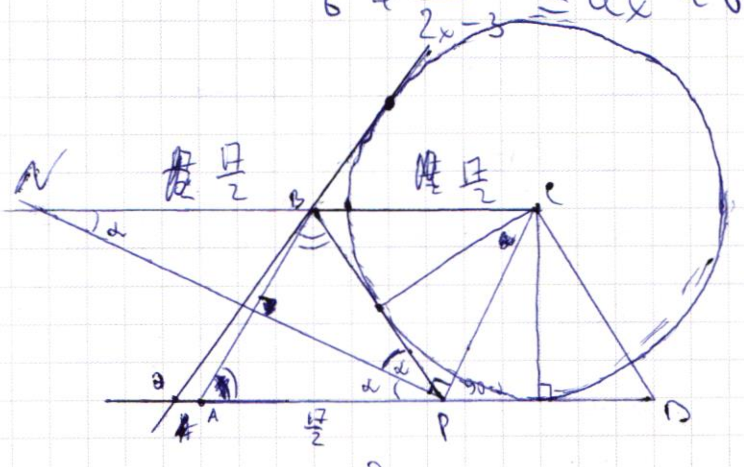
$$\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x \sin y) = 5\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}(\cos x\cos y - \sin x \sin y) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x$$

$\cancel{\frac{12x-14}{2x-\frac{14}{6}...}}$ $\frac{12x-18+4}{2x-3} \le ax+b$

$$6 + \frac{4}{2x-3} \le ax+b$$



NC = 17
CP = 15
NP = 8
$AP = \frac{17}{2} = BC$

$$\cos\alpha = \frac{8}{17}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Т.к. трапеция равнобокая $\Rightarrow \angle CDA = \beta$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$

$\Rightarrow \boxed{\angle CDA = \arccos\frac{15}{17}}$

7) Т.к. $\triangle APB$ – равнобедр $\Rightarrow BP = AP = \frac{17}{2}$. пусть $AQ = x$, тогда в $\triangle QBP$ по т. cos:

$$BQ^2 = \left(\frac{17}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{17}{2}+x\right)\cdot\frac{17}{2}\cdot\cos 2\alpha$$

$$BQ^2 = \frac{289}{4} + 17x + x^2 + \frac{289}{4} - 17\left(\frac{17}{2}+x\right)\cdot\left(2\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$BQ^2 = \frac{289}{2} + 17x + x^2 - \left(\frac{289}{2} + 17x\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 64}{289} - 1\right)$$

$$BQ^2 = \frac{289}{2} + 17x + x^2 - \left(\frac{289\cdot 2\cdot 64}{2\cdot 289} + \frac{x\cdot 128}{17}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overline{abcdefg}$

10^0, 10^1, 10^2

I. $\overline{abcdefg} \equiv 0 \pmod{10^0}$

$\overline{abcdefg} \equiv g \pmod{10^1}$

$\overline{abcdefg} \equiv fg \pmod{10^2}$

$b \neq 0$ 100000, 10000, 1000 : 180

$\overline{cdefg} + \overline{defg} + \overline{efg} = 12414$

$10000c + 1000d + 100e + 10f + g + 1000d + 100e + 10f + g + 100e + 10f + g = 12414$

$10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

$g = 8$!

$10000c + 2000d + 300e + 30f = 12390$

$1000c + 200d + 30e + 3f = 1239$

$f = 3$!

$1000c + 200d + 30e = 1230$

$100c + 20d + 3e = 123$

$e = 1$!

~~$2000d + 300e + 30f + 3g = 2414$~~

$c = 1$:

$2000d + 300e + 30f + 3g = 2414$

$100e + 20d = 120$

$10e + 2d = 12$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} c = 0 \\ d = 6 \end{cases} \end{array}\right.$

11138
1138
6138
138
12414

$\overline{ab11138} - 9 \cdot 10 = 90$ ~~138 + 1138 + 11138 =~~

$\overline{ab06138} - 9 \cdot 10 \cdot 90$

10000, 1000, 100:

$\overline{defg} + \overline{efg} + \overline{fg} = 12414$

$1000d + 200e + 30f + 3g = 12414$

$100d + 20e + 3f = 1239$

$10d + 2e = 123$ $\{\varnothing\}$

$g = 8$!

$f = 3$!

1000+100+10

1110-3=

1107

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1000000 ; 100000 ; 10000 :

$\overline{bcdefg} + \overline{cdefg} + \overline{defg} = 12414$

$100000b + 20000c + 3000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

$10000b + 2000c + 300d + 30e + 3f = 1239$

$1000b + 200c + 30d + 3e = 123$

$100b + 20c + 3d = 12$

$100b + 20c = 0$

$b = 0$

$c = 0$

$\overline{a004138}$ $+9$

Ответ: 189

$g = 8$

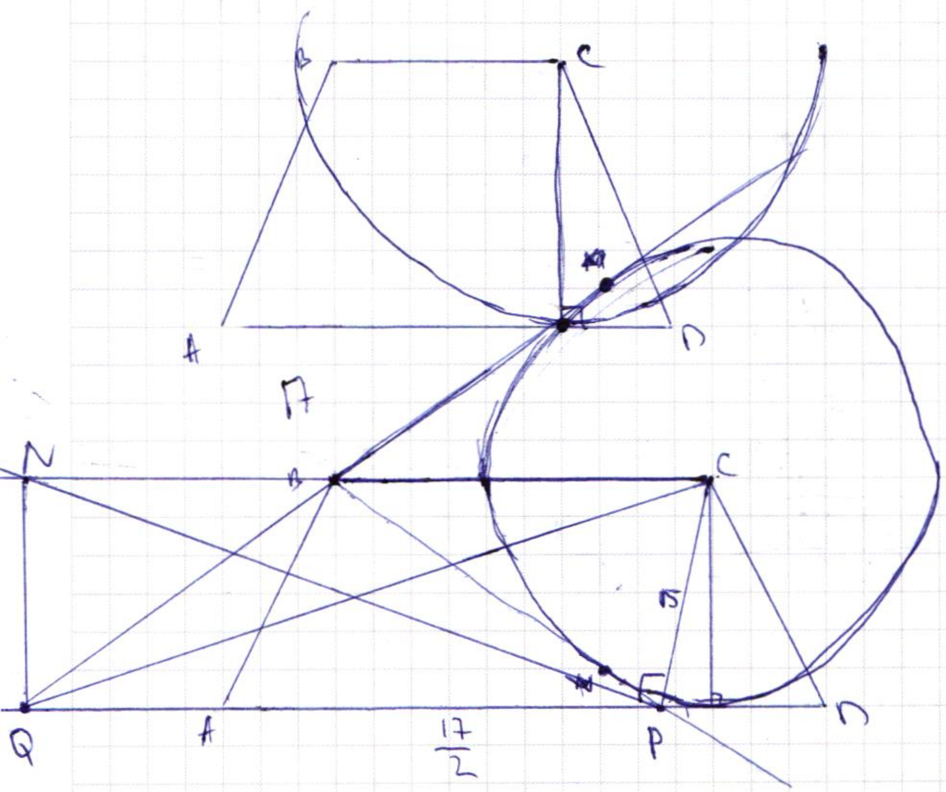
$\cancel{f = 9}$ $f = 3$

$e = 1$

$d = 4$

$\sqrt{\log_2 1} \le \log_2 1$

$0 \le 0$



$\frac{NP}{CP} = \frac{8}{15}$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$

$NC = 17$

$AP = \frac{17}{2}$

$NP = 8x$

$CP = 15x$

$NC = 17$

$64x^2 + 225x^2 = 289$

$x = 1$

$NP = 8$

$NC = 17$

$KP = 15$

$\beta = 90° - \alpha$

$180° - 2\beta$

$289 - 128 = 161$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2 \cdot 64}{289} - 1 = \frac{-161}{289}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-8y=216$

$x=216+8y$

$92 \cdot 92 = 8464$

$216+8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124$

$92+8y=\sqrt[3]{64y^2-(216+8y)^2}$

$4^3(23+2y)^3=(8y-216-8y)(8y+216+8y)$

$64(23+2y)^3=-216(16y+216)$

$8(23+2y)^3=-27(16y+216)$

$(23+2y)^3=-27(2y+27)$

$t=23+2y$

$t^3=-27(t+4)$

$t^3+27t+108=0$

	1	0	27	108
-3	1	-3	36	0

$(t+3)(t^2-3t+36)=0$

$D=b^2-4ac<0$

$(92+8y)(92+8y)(92+8y)=$

$=$

$216-104=112$

$t=-3$

$2y=-26$

$y=-13 \quad x=112$

Ответ: $(112;-13)$

$\sqrt{\log_{2x^3}x^9} \le \log_{2x}\frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\begin{cases}\log_{2x^3}x^9 \geq 0 \\ 2x^3>0 \\ 2x^3\neq 1 \\ x^9>0 \\ 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ \frac{1}{x^3}>0\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{2x^3}x^9 \geq \log_{2x^3}1 \\ x>0 \\ x\neq\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x>0 \\ x>0 \\ x\neq\frac{1}{2} \\ x>0\end{cases}$

$\begin{cases}x^9\geq 1 \\ 2x^3>1\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 1 \\ x^3>\frac{1}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}x^9\leq 1 \\ 0<2x^3<1\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 1 \\ 0<x^3<\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 1 \\ 0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}$

ОДЗ: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup[1;+\infty)$

$x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup [1; +\infty)$$

I) $\log_{2x} \frac{1}{x^3} < 0 \qquad x \in \{\varnothing\}$

II) $$\begin{cases} \log_{2x} \frac{1}{x^3} \ge 0 \\ \log_{2x^3} x^9 \le \log^2_{2x} \frac{1}{x^3} = (-3 \log_{2x} x)^2 \end{cases}$$

$$9 \log_{2x^3} x \le 9 \log^2_{2x} x$$

$$\frac{1}{\log_x 2x^3} \le \frac{1}{\log^2_x 2x}$$

$$\frac{1}{\log_x 2 + 3} \le \frac{1}{(\log_x 2 + 1)^2} \qquad \log_x 2 = t$$

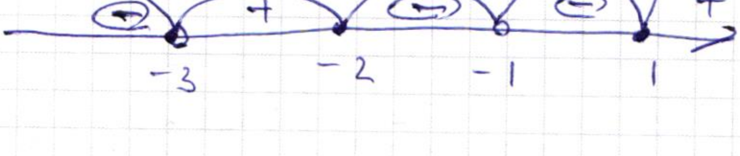
$$\frac{1}{t+3} \le \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\frac{(t+1)^2 - t - 3}{(t+3)(t+1)^2} \le 0$$

$$\frac{t^2 + 2t + 1 - t - 3}{(t+3)(t^2+2t+1)} \le 0$$

$$\frac{t^2 + t - 2}{(t+3)(t+1)^2} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(t+2)}{(t+3)(t+1)^2} \le 0$$



$\log_x 2 \le \log_x x$

$2 \ge x$

$\log_x 2 \ge \log_x x^{-2}$

I. $0 < x < 1 \qquad 2 \le \frac{1}{x^2} \qquad x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\log_x 2 \; \cancel{\lessgtr} \; \log_x x^{-3}$

$2 > \frac{1}{x^3} \qquad x \ne \frac{1}{2}$

$2x^3 > 1$

$x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$\begin{cases} \log_x 2 < -3 \\ \log_x 2 \le 1 \\ \log_x 2 \ge -2 \\ \log_x 2 \ne -1 \quad x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)