МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sqrt{17}\cos(2\beta) = 4$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)} =$

$= \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) ~~$\sin(2\alpha+2\beta)$~~

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~Есть 2 варианта~~

~~1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~2) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta)$~~ $\quad \sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

~~1) $2\sin\alpha\cos(\alpha+2\beta) = 0$~~

1) $\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\beta)+\sin(2\beta)(2\cos^2\alpha-1) = -\sin(2\beta)$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\beta)+2\sin(2\beta)\cos^2\alpha = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение №1

$\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos^2\alpha=0$

$\cos\alpha=0$ – 1 решение

$\sin\alpha\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos\alpha=0 \quad (\cos\alpha\neq0)$

$tg\,\alpha\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)=0$

$\underline{tg\,\alpha}=-\dfrac{\sin(2\beta)}{\cos(2\beta)}=-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}}=\underline{-\dfrac{1}{4}}$

2) $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\beta)+\sin(2\beta)(1-2\sin^2\alpha)=\sin2\beta$

$\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\beta)-\sin^2\alpha\sin(2\beta)=0$

$\sin\alpha=0$ – решение

$\cos\alpha\cos(2\beta)-\sin\alpha\sin(2\beta)=0 \quad (\sin\alpha\neq0)$

$\cos(2\beta)=tg\,\alpha\sin(2\beta)$

$\underline{tg\,\alpha}=\dfrac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)}=-\dfrac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}=\underline{-4}$

Таким образом

$tg\,\alpha=-\frac{1}{4}$, $tg\,\alpha=-4$, $tg\,\alpha=0$ $(\sin\alpha=0)$

при $\cos\alpha=0$ $tg\,\alpha$ не опред.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$x^2+6x>0$ корни $-6, 0 \to \underline{x>0}$ или $\underline{x<-6}$

следов. модуль можно убрать

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4 x^2+6x} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$$

$$\cancel{3^{\log_4 x^2+6x} \geq (x^2+6x)\left((x^2+6x)^{(\log_4 5)-1}-1\right)}$$

$$\cancel{y = x^2+6x = (x+3)^2-9}$$

$$\cancel{3^{\log_4 y} \geq y\left(y^{(\log_4 5)-1}-1\right)}$$

$$\cancel{\log_4 5-1 = \log_4 5-\log_4 4 = \log_4 \frac{5}{4}}$$

$t=\log_4 x^2+6x \qquad 4^t = x^2+6x$

$$3^t \geq (4^t)^{\log_4 5}-4^t$$

$$3^t \geq 4^{t\cdot\log_4 5}-4^t \qquad 3^t \geq 4^{\log_4 5^t}-4^t$$

$$3^t \geq 5^t-4^t \qquad 3^t+4^t \geq 5^t$$

3^t+4^t строго возраст. 5^t строго возрастает $\to$

существует одна единств. точка пересечения функций

$t=2$ $\underline{9+16=25}$ если $t>2$ $3^t+4^t<5^t$ ($t=3$ $27+64<125$)

если $t<2$ $3^t+4^t>5^t$ ($t=1$ $3+4>5$)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение №3

Значит при $t \leq 2$ $\quad 3^t + 4^t \geq 5^t$

$t = \log_4 x^2+6x \leq 2$

$\log_4 x^2+6x \leq 2$

$4^{\log_4 x^2+6x} \leq 4^2$

$x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+4\cdot16}}{2} =$

$= -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5 = \left[\begin{array}{l} -8 \\ 2 \end{array}\right.$

$x \in [x_1; x_2] = [-8; 2]$

Из ограничений $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array}\right.$

$\boxed{x \in [-8; -6) \cup (0; 2]}$ — ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p-простое

$3 \le x \le 27$ $\quad 3 \le y \le 27$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \cancel{= \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{y \cdot 4}\right]}$

$f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$

$f(p) = f(p) + f(1) \longrightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$ любое N число представимо в виде произведения простых чисел

$x = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$

$n_1 f(p_1) + \dots < n_1' f(p_1') + \dots$

Если у x и y присутствуют общие множители, то они сократятся

Если $x = y$, то $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(1) = 0 \not< 0$ не подходит

Если x или y полностью состоят из простых множителей меньших четырёх (2,3) то любое слагаемое $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] = 0$

значит и $f(x) = 0$ перечислим все такие x, y

~~3 4 6 8~~ 3 4 6 8 9 12 16 18 24 27 их количество $N_1 = 10$

Продолжение №5

3) Всего вариантов для x, y $\quad \underline{N = 27 - 2 = 25}$

Значит ~~...~~ f от любого числа не из N_1 больше из N_1

$$\underset{x}{S_1 = N_1}\,\underset{y}{(N - N_1)} = 10 \cdot (25 - 10) = 150$$ — вариантов при которых x из N_1

Составим таблицу

число	f(числа)
5	1
7	1
$10 = 2 \cdot 5$	1
11	2
13	3
$14 = 2 \cdot 7$	1
$15 = 3 \cdot 5$	1
17	4
19	4

число	f(числа)
$20 = 4 \cdot 5$	1
$21 = 3 \cdot 7$	1
$22 = 2 \cdot 11$	2
23	5
$25 = 5 \cdot 5$	2
$26 = 2 \cdot 13$	3

$N_2 = 7$ — количество f(числа) $= 1$

$N_3 = 3 \qquad = 2$

$N_4 = 2 \qquad = 3$

$N_5 = 2 \qquad = 4$

$N_6 = 1 \qquad = 5$

$$S = S_1 + \overset{x}{N_2}\,(N_3 + \overset{y}{N_4} + N_5 + N_6) + \overset{x}{N_3}\,(N_4 + \overset{y}{N_5} + N_6) + \overset{x}{N_4}\,(\overset{y}{N_5} + N_6) + \overset{x}{N_5} \cdot \overset{y}{N_6}$$

$$S = 150 + 7(3 + 2 + 2 + 1) + 3 \cdot (2 + 2 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + 2 \cdot 1 =$$

$$= 150 + 8 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 206 + \overset{23}{\cancel{18}} = \underline{229}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

1	4
2	-6
3	0

$102-90-12$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

2 2,5

3 $\frac{9}{4}=2,25$

$x \neq 1$ $x \in (1;3]$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2+\frac{1}{2x-2}$$

$4x-3 \geq (ax+b)(2x-2)$ $\binom{1сл}{2x-2>0}$ $x>1$

$4x-3 \geq 2ax^2-2ax+2bx-2b$ 2сл $x<1$ не подх $x\in(1;3]$

$0 \geq 2ax^2+x(2b-2a-4)-2b+3$

$$x_{1,2} = \frac{4+2a-2b \pm \sqrt{(2b-2a-4)^2-8a(3-2b)}}{4a} =$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right) \pm \sqrt{\frac{4b^2-4b(2a+4)+(2a+4)^2-24a+16ab}{16a^2}} =$$

$$=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{4b^2+8ab-16b+4a^2+16-8a}{16a^2}}$$

$x_1x_2 = \frac{3-2b}{2a}$

$x_1+x_2 = -\frac{2b-2a-4}{2a}$

~~$x^2-2x-3=0$~~

~~$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$~~ $=\left[\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right.$

$0 \geq 8x^2-(34+a)x+30-b$

$$x_{3,4} = \frac{34+a \pm \sqrt{(34+a)^2-32(30-b)}}{16}$$

$x_3x_4 = \frac{30-b}{8}$

$x_3+x_4 = \frac{34+a}{8}$

~~x_1~~ пусть $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$ продолжение №6

тогда $x_1 \leq 1$ $x_2 \geq 3$

$x_3 \leq 1$ $x_4 \geq 3$

$\cancel{x_1 + x_2 \leq 4}$ $x_1 - x_2 \leq -2$

$x_2 - x_1 \geq 2$

$\cancel{x_2 \geq 3 \quad -x_1 \geq -1}$ $\sqrt{\dfrac{4b^2 + 8ab - 16b + 4a^2 + 16 - 8a}{16a^2}} \geq 1$

$4b^2 + 8ab - 16b + 4a^2 + 16 - 8a \geq 16a^2$

$4b^2 - 16b + 8ab \cancel{+4a^2} - 12a^2 + 6 - 8a \geq 0$

$x_1 + x_2 = \dfrac{4 + 2a - 2b}{2a}$

$\dfrac{2 + a - b}{a} - 1 \leq x_2$

$\dfrac{2 - b}{a} \leq x_2$ $3 \leq x_2$ (1) $\boxed{\dfrac{2-b}{a} \geq 3}$ $\boxed{\cancel{2 - b \geq 3a}}$

$x_3 + x_4 = \dfrac{34 + a}{8}$

$\dfrac{34 + a}{8} - x_4 \leq 1$ $\dfrac{26 + a}{8} \leq x_4$ $3 \leq x_4$

$3 \leq \dfrac{26 + a}{8}$ $24 \leq 26 + a$

$\boxed{a \geq -2}$

$x_3 x_4 = \dfrac{30 - b}{8}$ $\dfrac{30 - b}{8x_4} \leq 1$ т.к. $x_4 \geq 3$

$\dfrac{30 - b}{8} \leq x_4$ $3 \leq \dfrac{30 - b}{8}$ $24 \leq 30 - b$ $\boxed{b \leq 6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №6

$$x_1 x_2 = \frac{3-2b}{2a}$$

$$\frac{3-2b}{2a x_2} \le 1 \qquad x_2 \ge 3 \qquad x_2 \ge \frac{3-2b}{2a}$$

$$3 \le \frac{3-2b}{2a} \qquad \boxed{3 \le 1{,}5\frac{1}{a} - \frac{b}{a}}$$

$$3 \le \frac{2}{a} - \frac{b}{a} \leftarrow (1)$$

$$0 \le 1{,}5\frac{1}{a} - 2\frac{1}{a}$$

$$0 \le -\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{2a} \le 0 \qquad \boxed{a<0}$$

$$12 \le 6\frac{1}{a} - 4\frac{b}{a}$$

$$9 \le 6\frac{1}{a} - 3\frac{b}{a}$$

$$3 \le -\frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a} \le -3 \qquad a<0$$

$$\boxed{b \ge -3a}$$

(1) $3a \ge 2-b$

$\cancel{3a \le 2-b}$

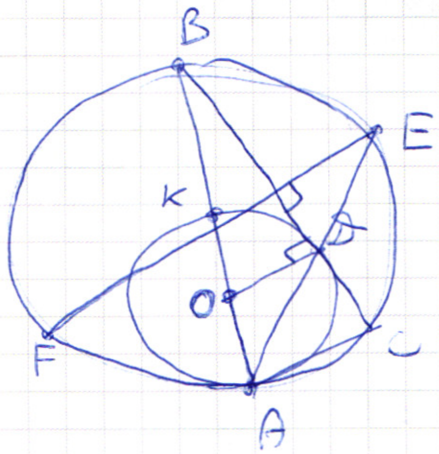
$\cancel{3a \ge -b}$

$\cancel{0 \ge 2}$

$\boxed{a \in [-2;0)}$ $\quad b \in (-\infty;$

$b \ge -3\cdot 0 = 0 \to \boxed{b \in (0;6]}$ при этом $b \ge -3a$

№ 4



$BD^2 = BK \cdot BA =$

$= (2R - 2r)\, 2R = \frac{169}{4}$

$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2$

$\cancel{2R} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{BD}{BD + DC}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{\cancel{BD}\ 13}{13 + 5}$

$18(2R - r) = 13 \cdot 2R$

$9(2R - r) = 13R \qquad 18R - 9r = 13R \qquad 5R = 9r$

$\left(2R - \frac{10}{9} R\right) 2R = \frac{169}{4}$

$\cancel{8}16 R^2 = \frac{169}{4} \qquad R^2 = \frac{169}{4 \cdot 16} \qquad \boxed{R = \frac{13}{8}}$

$r = \frac{5}{9} \cdot \frac{13}{8} = \boxed{\frac{65}{72}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

$3y-2x\geqslant 0 \qquad 3y\geqslant 2x \qquad x\leqslant \frac{3}{2}y$

$(1)^{\wedge 2}$

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy=2-2x-3y$

$9y^2+3y+\frac{1}{4}+4x^2+2x+\frac{1}{4}=2{,}5+15xy$

$\left(3y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}5+15xy$

$\cancel{3x^2+3y^2+6xy-4x-6y+4}$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4x-6y+6xy=4+6xy-4x-6y$

$3x^2+3y^2+6xy-10x-10y=2(3xy-2x-3y+2)$

$3x^2+3y^2+6xy-10x-10y=2(9y^2+4x^2-12xy)$

$3x^2+3y^2+6xy-10x-10y=18y^2+8x^2-24xy$

$-10x-10y=15y^2+5x^2-30xy$

$-2x-2y=3y^2+x^2-6xy$

$-2x-2y=x^2-6xy+9y^2\cancel{+6y^2-8x^2}-6y^2$

$-2x-2y=\cancel{(3x-y)^2+2y^2-8x^2}=(x-3y)^2-6y^2$

$-4x-6y+6xy+4+2x+4y=3y^2+x^2$

$2(3y-2x)^2+2x+4y=3y^2+x^2 \qquad 18y^2+8x^2-24xy+2x+4y=3y^2+x^2$

$15y^2+7x^2-24xy+2x+4y=0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)