МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

замена $a = x^2 + 6x$

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5} \iff$

$\begin{cases} a > 0 \\ 3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5} \end{cases}$

повторная замена $b = \log_4 a$

$3^b + 4^b \geq 4^{b \cdot \log_4 5} \iff$

$3^b + 4^b \geq 5^b \iff$

$(3^2)^{\frac{b}{2}} + (4^2)^{\frac{b}{2}} \geq (5^2)^{\frac{b}{2}} \iff$

$(3^2)^{\frac{b}{2}} + (4^2)^{\frac{b}{2}} \geq (3^2+4^2)^{\frac{b}{2}} \iff$

$b \leq 2$

обратная замена

$\log_4 a \leq 2 \iff$

$0 < a \leq 16$

обратная замена

$0 < x^2 + 6x \leq 16 \iff$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -6 \end{array} \right. \\ -8 \leq x \leq 2 \end{cases} \iff x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

~~f(~~ Заметим, что $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

и $f(1)=f(\frac{a}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a}) \Rightarrow$

~~$f(x)<f(y)$~~ $f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)+f(\frac{1}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 $\xRightarrow{\text{простые}}$ $\Rightarrow$

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$, зная это получаем

$f(4)=2f(2)=0$, $f(6)=f(2)+f(3)=0$, $f(8)=3f(2)=0$, $f(9)=2f(3)=0$,

$f(10)=f(2)+f(5)=1$, $f(12)=2f(2)+f(3)=0$, $f(14)=f(2)+f(7)=1$,

$f(15)=f(3)+f(5)=1$, $f(16)=4f(2)=0$, $f(18)=f(2)+2f(3)=0$,

$f(20)=2f(2)+f(5)=1$, $f(21)=f(3)+f(7)=1$, $f(22)=f(2)+f(11)=2$,

$f(24)=f(3)+3f(2)=0$, $f(25)=2f(5)=2$, $f(26)=f(2)+f(13)=3$,

$f(27)=3f(3)=0 \Rightarrow$

среди натуральных чисел от 3 до 27

~~10 принимают значен~~

для 10 из них функция равна 0

для 7 из них функция равна 1

для 3 из них функция равна 2

для 2 из них функция равна 3

для 2 из них функция равна 4

для 1 ~~из~~ из них функция равна 1 $\Rightarrow$

количество пар натуральных x, y, что $3 \le x, y \le 27$, и $f(x)<f(y)$

равна $7\cdot 10+3\cdot(7+10)+2\cdot(3+7+10)+2(2+3+7+10)+1(2+2+3+7+10)=$

$=7\cdot 10+3\cdot 17+2\cdot 20+2\cdot 22+24=229$

Ответ: 229.

■ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 стр 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos(2\beta) = \cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}}\ \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

Возможны 2 варианта

1) $$\begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ 8\cos\alpha\sin\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \end{cases}$$

т.к $\operatorname{tg}\alpha$ определён $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \cancel{-4}\ -\frac{1}{4}$

2) $$\begin{cases} \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 8\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \text{ равно } 0 \text{ или } -4 \Rightarrow$$

№1 стр 2

Значит $tg\alpha$ может принимать не более 3-ёх значений $(0, -4, -\frac{1}{4})$ ~~по условию~~ из условия все 3 достигаются $\Rightarrow$

$tg\alpha = 0, -4, -\frac{1}{4}$

Ответ: $0, -4, -\frac{1}{4}$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x-3y-2=0 \\ 2x-6y+2=0 \end{array}\right. \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

это пересечение окружности и объединения 2-ух прямых

легко заметить, что они проходят через центр окружности $\Rightarrow$ ровно 4 решения

Обозначим $(1, \frac{2}{3})$ – O, точки пересечения окружности с $4x-3y-2=0$: A, B; с ~~A~~ $2x-6y+2=0$: C, D. тогда $\overrightarrow{OA}=\pm(3,-4)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}$, $\overrightarrow{OB}=\pm(3,-4)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}$

$\overrightarrow{OC}=\pm(3,-1)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\overrightarrow{OD}=\pm(3,-1)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$, т.к.

$(3,-4)$ и $(3,-1)$ – направляющие векторы

$4x-3y-2=0$ и $2x-3y+1=0$ соответственно $\Rightarrow$

5 и $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ их модули, $\frac{5}{3}$ – требуемые модули $\Rightarrow$

~~A – C~~ искомые точки $(2, -\frac{2}{3})$, $(0, 2)$, $(1+\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{2}{3}-\frac{5}{3\sqrt{10}})$

$(1-\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{2}{3}+\frac{5}{3\sqrt{10}})$. Ответ: $(2, -\frac{2}{3})$, $(0, 2)$, $(1+\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{2}{3}-\frac{5}{3\sqrt{10}})$, $(1-\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{2}{3}+\frac{5}{3\sqrt{10}})$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

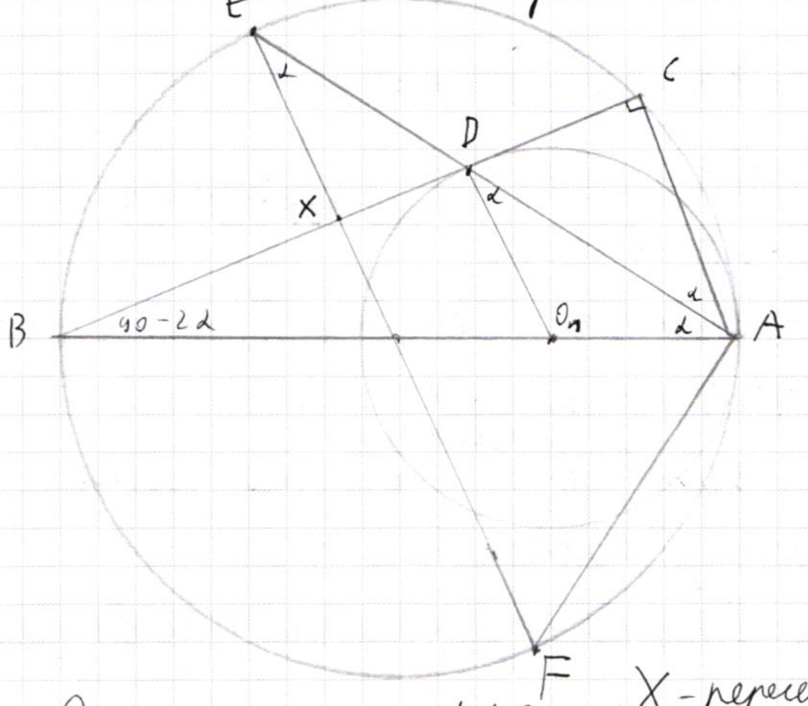
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 стр1



Пусть O_1 - центр w, $\angle DAO_1 = \alpha$, ~~тогда~~ X - пересечение EF и BC, тогда $\angle BCA = 90^\circ$, т.к на диаметр опирается,

$\angle O_1DA = \angle O_1AD = \alpha$, т.к $O_1A = O_1D$,

$O_1D \perp BC$, т.к BC - касательная, $EX \perp BC$ по условию,

$AC \perp BC \Rightarrow AC \parallel O_1D \parallel EF \Rightarrow \angle FEA = \angle O_1DA = \angle CAD = \alpha \Rightarrow$

$\angle ABC = 90-2\alpha$, $\angle AFE + \angle BFE = \angle AFB = 90^\circ$ ~~=>~~, $\angle EAB = \angle EFB$,

т.к опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle AFE = 90 - \angle EFB = 90-2\alpha$

Пусть радиус ~~?~~ Ω - R, радиус w - r, тогда

$BO_1 = 2R - r$, $\frac{DO_1}{BO_1} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = \frac{DO_1}{BO_1}\cdot AB = \frac{2Rr}{2R-r}$

$\frac{BD}{BO_1} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{13}{\cancel{2}(2R-r)} = \frac{9}{\cancel{2}R} \Leftrightarrow 13R = 18R - 9r \Leftrightarrow r = \frac{5R}{9} \Rightarrow$

$AC = \frac{10R}{13} \Rightarrow \cos\angle CAB = \cos 2\alpha = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{\frac{5}{13}+1}{2} = \frac{9}{13}$,

т.к $\alpha < 90^\circ$ $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ~~=> sin(90-α) =>~~ $\Rightarrow \sin 90-\alpha = \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

№4 стр 2

Тогда $\angle AFE = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$

Ответ: $\arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0 \\ 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \end{cases}$ на ~~[0:~~ $(1:3]$

т.к. $2x-2>0$ заметим, что это верно и для 1

т.к. если ~~$8x^2-3$~~ $4-3>0$ и если

$8x^2-(34+a)x+30-b$ при $x=0$ >0, то есть

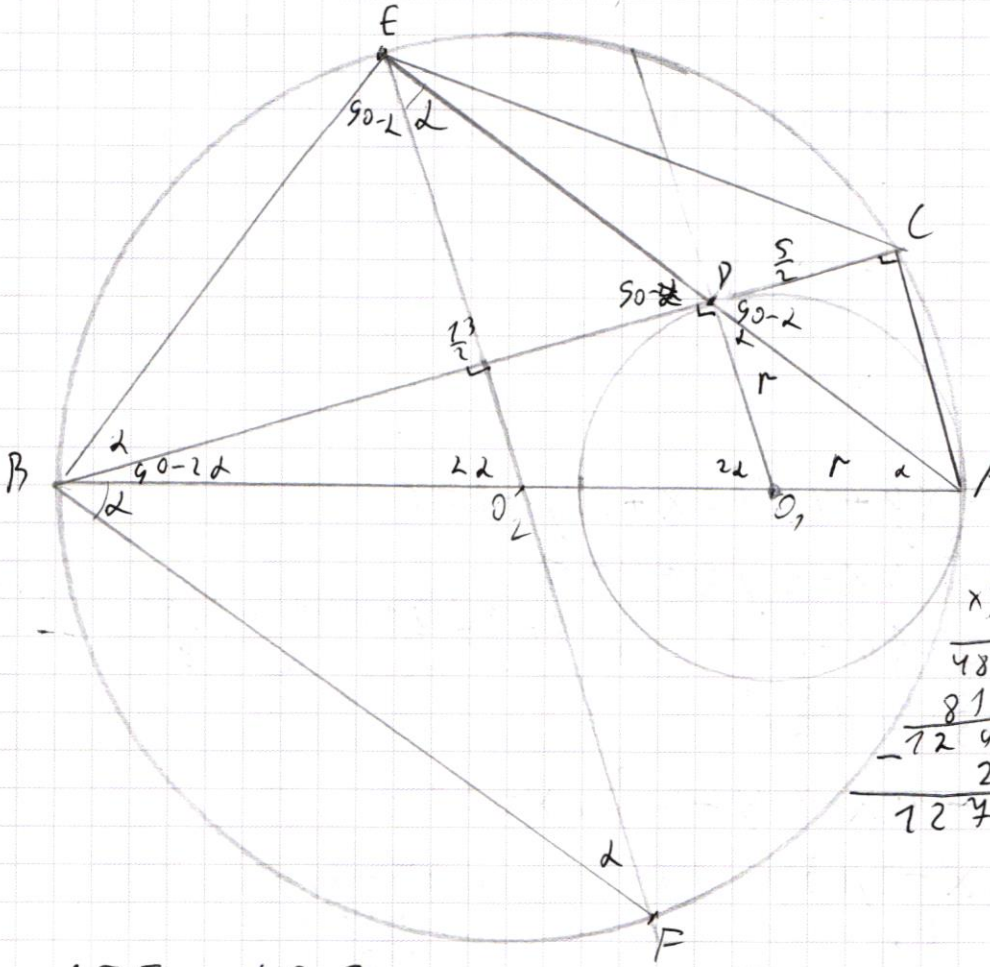
точка на $(1:3]$, в которой она $>0 \Rightarrow$

т.к $8>0$ для второго достаточно выполнения

в 1 и 3 $\Rightarrow$

$\begin{cases} 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0 \\ 8-34-a+30-b \leq 0 \\ 72-102-3a+30-b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0 \\ 4 \leq a+b \\ 0 \leq 3a+b \end{cases}$



$$\begin{array}{r} \times\; 81 \\ 16 \\ \hline 486 \\ 81 \\ \hline 1296 \\ -\;25 \\ \hline 1271 \end{array}$$

$\angle AFE = \angle ABC = \cancel{180}\, 90 - \angle ABF = 90 - \alpha$

$\cancel{2R} - \quad O_1A = r \quad O_2A = R$

$\frac{169}{4} = (2R-r)(2R+r) = 4R^2 - r^2 \qquad R = \frac{9r}{5}$

$\frac{13}{2(2R-r)} = \frac{9}{2R} \quad 13R = 18R - 9r \quad 9r = 5R$

$\frac{169}{4} = \frac{81\cdot 16 r^2}{25} - r^2 = \left(\frac{81\cdot16-25}{25}\right) r^2$

$\cancel{r^2 = 25\cdot 169\cdot} \quad \frac{169}{4} = \frac{1271}{25} r^2$

$\cancel{\frac{2R\cdot\frac{5R}{9}}{\frac{10R}{9}}} - \quad \frac{2R\cdot\frac{5R}{9}}{2R-\frac{5R}{9}} = \frac{10R^2}{13R} = \frac{10R}{13}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{5}{13} \quad 2\cos^2\alpha = \frac{18}{13} \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{13}$

$\cos\alpha = \sin(90-\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$\cancel{(ax+b)(ax+c)}=0$

$(ax+b)(b\,$

$\cancel{3y^2}\cdot\ 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y\cancel{7}-4=0$

$\cancel{:x}-\ x^2-2x+y^2-\frac{4}{3}y=x\frac{4}{3}\qquad \frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}=\frac{9+12+4}{9}=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$

$\cancel{9}\ \cancel{4x^2}\cdot\ 9y^2-(15x-3)y+4x^2+2x-2=0$

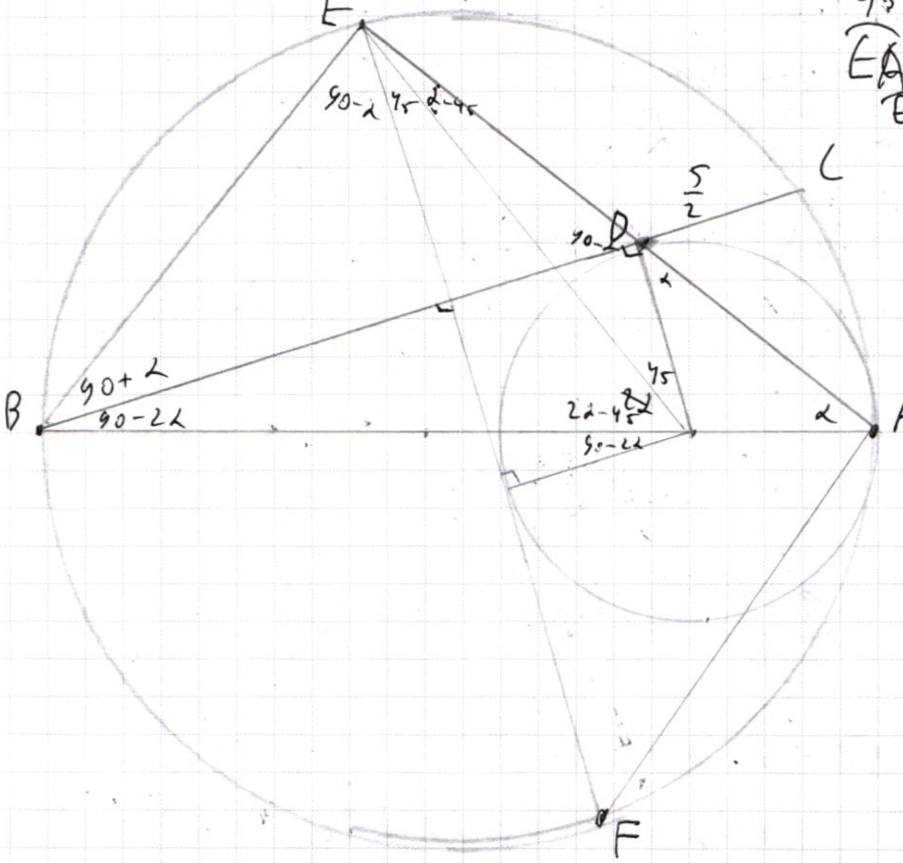
$3y-2x=(x-2)(3y-1)$

~~45-2α+90~~

$45+2\alpha-90=2\alpha-45$

$\overset{\frown}{EA}=180-\alpha$

$\overset{\frown}{EC}=180-\alpha-90+2\alpha=90+\alpha$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta = (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta) =$

$= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$

$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta =$

$= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) =$

$= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - 1 + \cos^2\beta + \cos^2\alpha -$

$\cancel{8\cos\alpha}$

$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$4 + tg\,\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -4$

$\sin 45 + \sin 45 = 2\sin\left(\frac{45+45}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{45-45}{2}\right)$

$\cancel{\sin\alpha + \sin}$ $\sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos 0$

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = \cancel{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right.}$ $2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \cos\alpha \neq 0$

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha - \cancel{1} + 2\sin^2\alpha = \cancel{-1}$

$\sin\alpha = 0$

$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -\cancel{\frac{1}{4}}\,4$

$4\,tg\,\alpha = -1$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$4x-3 \geqslant 2ax^2-2ax+2bx-2b \Leftrightarrow$

$2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0$

$0 \geqslant 8x^2-(34+a)x+30-b$

при $[1;3]$

$\cancel{2a+2b-2a+4-2b+3} \leq 0$

$\begin{cases} 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0 \\ 8x^2-(34+a)x+30-b) \leq 0 \end{cases}$

$a=0 \quad (2b-4)x-2b+3 \leq 0$

$\cancel{x} \leq 6b-12-2b+3 \leq 0$

$b \leq \frac{15}{4}$

$8x^2-34x+30 \leq 0$

$4x^2-17x+15 \leq 0 \quad x=\frac{17\pm7}{8}=\cancel{4{,}5} \quad \frac{17}{4}, \frac{5}{4}$

$D=289-240=49$

$17 \cdot 17 = 119 + 170 = 289$

нет $\Leftrightarrow$

$\cancel{a>0} \quad a<0$

$2a+2b-2a-4-2b+3 \leq 0$

$8-34-a+30-b \leq 0 \Leftrightarrow \quad 4-b \leq a < 0$

$\cancel{9 \geqslant 3a+b} \quad 18a+6b-6a-12-2b+3 \leq 0$

$72-102-3a+30-b \leq 0$

$0 \leq 3a+b \quad -b \leq 3a \leq 0$

$12a+4b-9 \leq 0$

$0 \leq 12a+4b \leq 9$

$-3a-b \leq 4 \leq a+b \quad 0 \leq 4a+2b \quad 0 \leq 2a+b$

$2a(x-\frac{1}{2})^2+(2b-4)x-$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=3 \quad \frac{4\cdot 3-3}{6-2}=\frac{9}{4}$

$\cancel{4x-3} \quad 8x^2-34x+30=0$

$4x^2-17x+15=0$

$\cancel{x=\frac{2}{4}} \quad D=17\cdot17-4\cdot60=49$

$x=\frac{17\pm7}{8}=3$

$\times\begin{array}{r}16\\4\end{array}$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\\\hline 289\\-240\\\hline 49\end{array}$

$b=\log_4 a$

$3^b+4^b\geq 4^{\log_4 5\cdot\log_4 a}=5^b$

$3^3+4^3\geq5^3$

$27+64\geq125$

$x^2+6x-16=0$

$D=36+16\cdot4=$

$=4\cdot(9+16)=$

$=100$

$x=\frac{-6\pm10}{2}=-8,2$

$3xy-2x-3y+2=(3y-2)(x-1)$

$a=x^2+6x \qquad a\geq-9 \qquad a>0$

$3^{\log_4 a}+a\geq|a|^{\log_4 5} \qquad \sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$3^{\log_4 a}=4^{\log_4 3\cdot\log_4 a}=a^{\log_4 3} \qquad \sin(x+2y)+\sin 2x=-\frac{8}{17}$

$a^{\log_4 3}+a\geq|a|^{\log_4 5} \qquad (a+b)^x\geq a^x+b^x \iff x\geq1$

~~sina+sinb=~~

$\sin 2a+\sin 2b=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta$

$a^{\log_4 3}+a\geq|a|^{\log_4 5} \qquad f'(a)=\log_4 5\, a$

$a^{\log_4 3}+a\geq a^{\log_4 5} \qquad f'(a)=\log_4(5)a^{\log_4(5)-1}-\log_4(3)\cdot a^{\log_4(3)-1}-1$

$0\geq a^{\log_4 5}-a^{\log_4 3}-a \qquad a=0 \qquad b=\cancel{\log_4\frac{5}{4}}\log_4 a$

$b\ 0-0 \qquad a^{\log_4\frac{5}{4}}-a^{\log_4\frac{3}{4}}-1\geq0$

$f(b)=5^b-4^b-3^b\geq0$

$\left(\frac{5}{4}\right)^b-\left(\frac{3}{4}\right)^b-1\geq0 \iff \quad f'(b)=$

$5^b\geq4^b+3^b \qquad b=2 \qquad (3^2+4^2)^{\frac{b}{2}}\geq(4^2)^{\frac{b}{2}}+(3^2)^{\frac{b}{2}}\Rightarrow$

$b\geq2$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{4x-3}{2x-2}=8x^2-34x+30$$

$4x-3=16x^3-16x^2-68x^2+68x+60x-120 \Leftrightarrow$

$16x^3-84x^2+128x-117=0$

16 -84 124 -117

3 16 -36

$4x-3\geqslant$

$y\geqslant\frac{2}{3}x$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$9y^2-6xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\cancel{9y^2-6xy+4x^2}$ $9y^2-9xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$9x^2+9y^2-18x-12y=4$

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$ $f(2)=0$ $f(5)=1$ $f(11)=2$ $f(17)=4$

$f(3)=0$ $f(7)=1$ $f(13)=3$ $f(19)=4$

$f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)\leq f(y)$ $f(23)=5$

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

$$\begin{array}{r|l} 117 & 3 \\ 9 & 39 \\ \hline 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$16\cdot 3=48$

$84-48=36$

$70+51=121$, $121+40=161$, $161+44=205$, $205+24=229$

$(ax+b)(2x+2)=2ax^2+2(a+b)x+2b$

□ черновик □ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

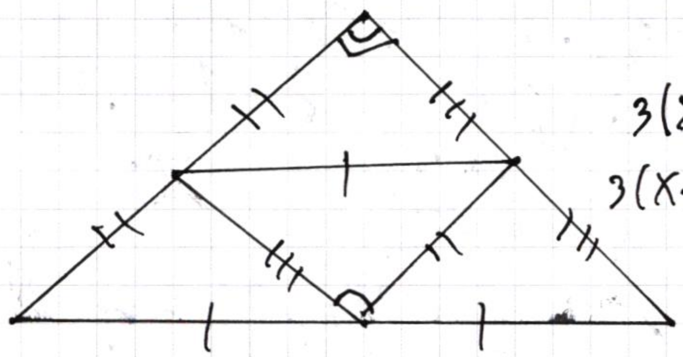
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

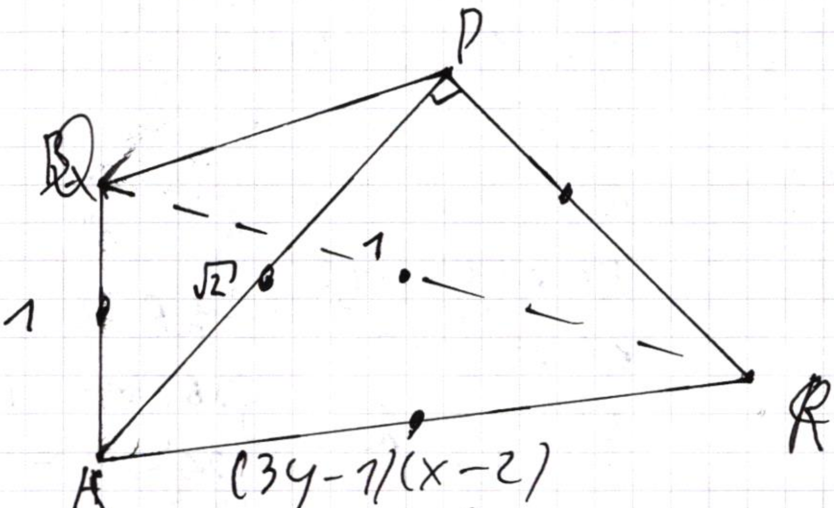
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

$3(x.$



$(3y-1)(x-2)$

$a=3y-1)\quad b=x-2$

$a-2b+3=\sqrt{ab}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\cancel{3(x-1)^2+}\quad 9y^2\cancel{-12x0}$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$(ax-b)(cy-d)=e\quad (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$a_1a_2=9$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$9\cancel{x}y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$\cancel{a_1a_2=9}$ $a_1a_2=4$ $b_1b_2=9$

$c_1c_2=-2$ $a_1c_2+a_2c_1=2$

$b_1c_2+b_2c_1=3$

$36c^2+4b^2=30bc$

$36c^2-8b^2=12bc$

$8b^2+12bc=30bc-4b^2$

$12b^2-18bc=0$

$b=\frac{18c}{12}=\frac{3c}{2}$ $3c=2b$

$\cancel{9c^2}$

$a_1a_2=4$

$b_1b_2=9$

$c_1c_2=-2$

$\cancel{(a_1x+b_1y+c_1)\left(\frac{4}{a_1}x+\frac{9}{b_1}y\right)}$

$(a_1x+b_1y+c_1)\left(\frac{4}{a_1}x+\frac{9}{b_1}y-\frac{2}{c_1}\right)=0$

$\frac{9a_1}{b_1}+\frac{4b_1}{a_1}=-15$

$9a_1^2+4b_1^2=-15a_1b_1$

$9c_1^2-2b_1^2=3b_1c_1$

$b_1c_2+b_2c_1=-\frac{2b_1}{c_1}+\frac{9c_1}{b_2}=3$

$a_1a_2=4$

$b_1b_2=9$

$c_1c_2=-2$

$a_1b_2+a_2b_1=-15$

$b_1c_2+b_2c_1=3$

$a_1c_2+a_2c_1=2$

$\cancel{a_1}$ $a_2=\frac{4}{a_1}$

$b_2=\frac{9}{b_1}$

$c_2=-\frac{2}{c_1}$

$\frac{9a_1}{b_1}+\frac{4b_1}{a_1}=-15$

$-\frac{2b_1}{c_1}+\frac{9c_1}{b_1}=3$

$-\frac{2a_1}{c_1}+\frac{4c_1}{a_1}=2$

$\cancel{a=2c}$ $a=-2c$ $b=\frac{3c}{2}$

$$\begin{cases} 36c^2+4b^2=+30bc \\ \cancel{9c^2-2b^2=3bc} \\ 4c^2- \end{cases}$$

$\cancel{9a_1^2+4b_1^2=-15a_1b_1}$

$\cancel{36c+}$

$\cancel{9a^2+b}$ $9a^2+4b^2=-15ab$

$9c^2-2b^2=3bc$

$4c^2-2a^2=2ac$

$4b^2-2b^2=2b^2$

$b=-3a=-3c$

$\cancel{2c^2}$ $a^2+ac-2c^2=0$

$9a^2+12a^2=\dots$

$1)\ a=c$ $9a^2+4b^2=-15ab$

$\cancel{b=c}$ $a=-2c$

$9a^2-2b^2=3ab$

$-15ab-4b^2=2b^2+3ab$

$6b+18a=0$ $b=-3a$ $a=c$

$$\begin{cases} 36c^2+4b^2=30bc \\ 9c^2-2b^2=3bc \\ \cancel{4c^2-8c^2=-4c^2} \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a=-2c \quad b=\frac{3c}{2}$

$a_1=-2b \quad b_1=\frac{3c}{2} \quad c_1$

~~$-2cx$~~

$a_2=\frac{4}{-2b}=-\frac{2}{b_1} \quad b_2=\frac{9\cdot 2}{3c}=\frac{6}{c_1} \quad c_2=-\frac{2}{c_1}$

~~$2x+3$~~ $-2x+1{,}5y+1=0$

$-2x+6y-2=0$

$\left\{\left[\begin{array}{l} 4x-3y-2=0 \\ 2x-6y+2=0 \end{array}\right.\right.$

$x^2+y^2-2x-\frac{4y}{3}-\frac{4}{3}=0$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}=\frac{12+4+}{}$

$\left(1,\frac{2}{3}\right) \quad 4-2-2$

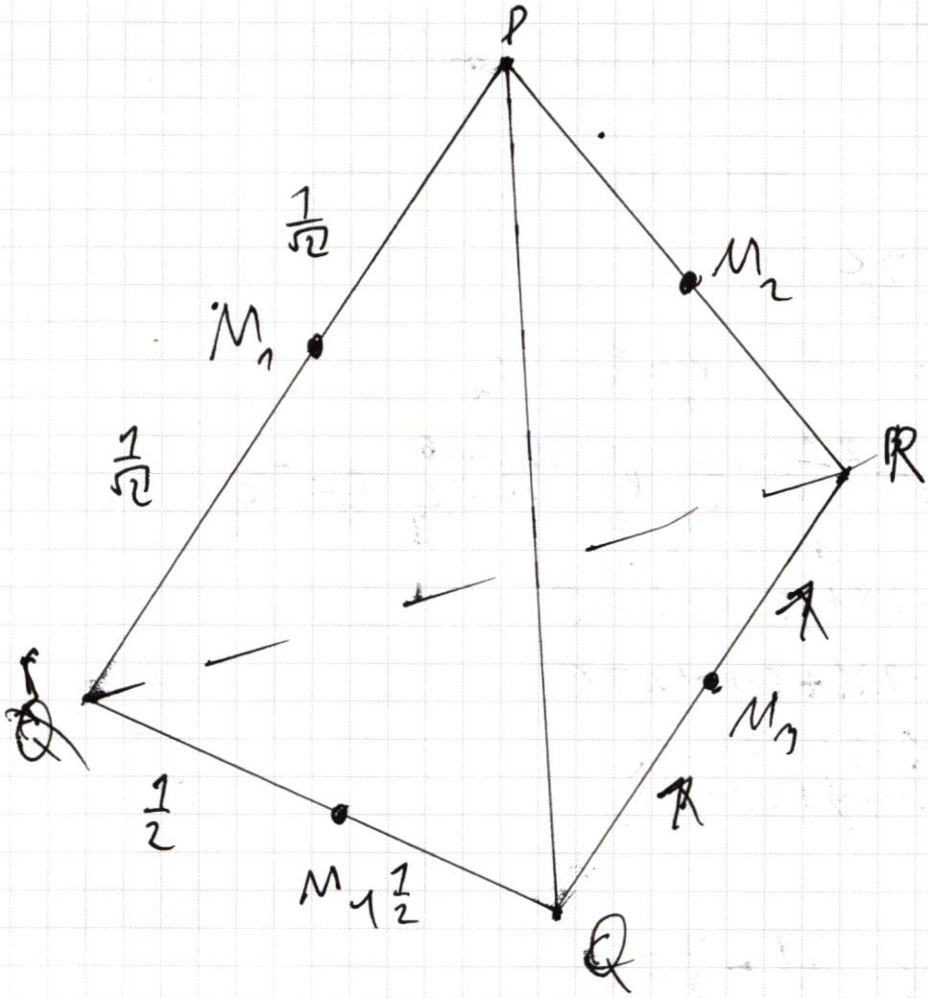
$2-6\cdot\frac{2}{3}+2=0$

$(3,-4)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}=\left(1,-\frac{4}{3}\right) \quad \left(-1,\frac{4}{3}\right)$

$(3,-1)\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)$

$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$

$\left(\frac{5}{\sqrt{10}},-\frac{5}{3\sqrt{10}}\right)$



$\angle \cancel{M_4 M_1} N$ $M_1M_2 \perp PC$

$PR \perp SR$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА