МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5} & (2) \end{cases} \quad tg\,\alpha - ?$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$$\begin{cases} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5} \quad (1) \end{cases}$$

подставим (1) в (2):

$$2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac{-2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5}$

a) $\sin 2\beta = \frac{-2}{\sqrt5}$:

$$\frac{1}{\sqrt5}\sin(2\alpha) - \frac{2}{\sqrt5}\cos(2\alpha) = \frac{-1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot\sqrt5$$

$$\sin(2\alpha) - 2\cos(2\alpha) = -1$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ -1 = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{cases} \text{(осн. триг. тождество)}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$$

т.к. тангенс определен по условию

$$2tg\,\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$$

$$3tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 1 = 0$$

см. сл. стр.

№1 (продолж.)

$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16$

$tg x = \dfrac{-2 \pm 4}{2 \cdot 3} = -1; \dfrac{1}{3}$

б) $\sin 2\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

делая аналогичные преобразования, получаем:

$2 tg\alpha + 2 - 2 tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$

$tg^2\alpha - 2 tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16$

$tg\alpha = \dfrac{2 \pm 4}{2} = -1; 3$

Итого получаем $tg\alpha = -1; \dfrac{1}{3}; 3.$

Все эти значения подходят, т.к. по условию значений не менее трех.

Ответ: $tg\alpha = -1; \dfrac{1}{3}; 3.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что

- $2xy-12y-x+6=(2y-1)(x-6)$
- $\boxed{x^2+36y^2-12x-36y}=x^2-12x+36+36y^2-36y+9-$
  $-36-9=(x-6)^2+(6y-3)^2-36-9=$
  $\boxed{=(x-6)^2+9(2y-1)^2-45}$
- $x-12y=(x-6)-6(2y-1)$

Сделаем замену $x-6=a$ $\quad 2y-1=b$, тогда
$x=a+6 \quad y=\frac{b+1}{2}$, и

система ур-ий принимает вид:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2-45=45 & (2) \end{cases}$$ → заметим, что $b=0$ не удовл. системе

возведем (1) в квадрат, тогда

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a-6b\geq 0 \leftarrow \text{огр} \end{cases}$$

поделим первое ур-е на b^2, т.к. $\neq 0$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-12\frac{a}{b}+36=\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0$$

см. сл. стр.

№2 (продолж).

$D = 169 - 4 \cdot 36 = 25 = 5^2$

$\frac{a}{b} = \frac{13 \pm 5}{2} = 4; 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right.$

тогда система $\binom{(1)}{(2)}$ итого равносильна

$$\begin{cases} a^2 + 9b^2 = 90 & (2) \\ a - 6b \geq 0 & \text{ОГР} \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right. & \begin{array}{l} (a) \\ (б) \end{array} \end{cases}$$

подставим (а) и (б) в (2):

а) $16b^2 + 9b^2 = 90$

$25b^2 = 90$ $\qquad (a;b) = \left(12\sqrt{\frac{2}{5}}; 3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ не $\in$ ОГР

$\begin{cases} b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ a = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ $\qquad (a;b) = \left(-12\sqrt{\frac{2}{5}}; 3\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \in$ ОГР

б) $81a^2 + 9b^2 = 90$

$\begin{cases} b = \pm 1 \\ a = \pm 9 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} (a;b) = (-9;-1) \text{ не } \in \text{ОГР} \\ (a;b) = (9;1) \in \text{ОГР} \end{array}$

Значит система $\begin{cases} 2 \\ \left[\begin{array}{l} a \\ б \end{array}\right. \end{cases}$ равносильна

$(a;b) = \left(-12\sqrt{\frac{2}{5}}; -3\sqrt{\frac{2}{5}}\right); (9;1)$, откуда

$(x;y) = \left(-12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6; \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right); (15;1)$

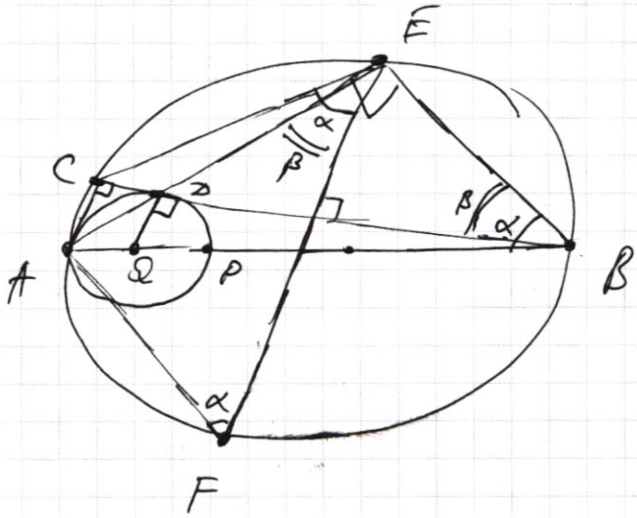
Ответ: $(x;y) = \left(-12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6; \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right); (15;1)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

Дано:
Ω и ω - окр-ти
Q - центр ω
Ω кас. ω = A
AB - диаметр Ω
BC - хорда Ω
BC кас. ω = D
$AD \cap \Omega = E$
EF - хорда Ω
$EF \perp BC$

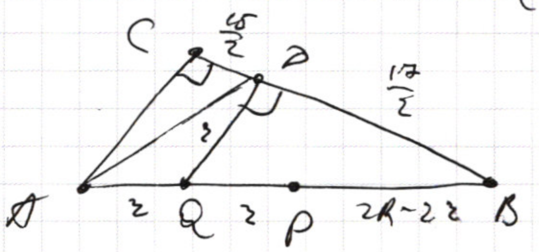
$R_\Omega = R = ?$
$R_\omega = r = ?$
$\angle AFB$ - ?
S_{AEF} - ?
$CD = \frac{15}{2}$
$BD = \frac{17}{2}$



Пусть $\omega \cap AB = P$
$\angle AFE = \alpha$ $\angle AEF = \beta$ ~~...~~.
Покажем, что $AC \parallel EF$:
$\angle DEB = 90^\circ$ (опирается на диаметр AB)
$\Downarrow$
EF - высота прямоугольного $\triangle DEB$
$\Downarrow$ $\angle ABF$
$\angle DBE = \cancel{\angle ...} = \beta$
$\Downarrow$
$\breve{AF} = \breve{CE}$ в Ω
$\Downarrow$
$AC \parallel EF$ (равные дуги между ними)
$\Downarrow$
$AC \perp BC$
также $QD \perp BC$ (BC - касат. к ω)
$\Downarrow$
$QD \parallel AC \Rightarrow \triangle QBD \sim \triangle ABC$

см. сл. стр.

№4 (продолж.)



Заметим, что $AQ = QD = QP = z$

$BP = 2R - 2z$ ~~когда~~

$$\begin{cases} \dfrac{AQ}{CD} = \dfrac{BQ}{BD} & (\triangle ABC \sim \triangle QBD) \\ BP \cdot AB = BD^2 & (\text{св-во секущей и касательной к } \omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z}{\frac{15}{2}} = \dfrac{2R - z}{\frac{17}{2}} \Longrightarrow 17z = 30R - 15z \Rightarrow z = \dfrac{15}{16}R \\ (2R - 2z) \cdot 2R = \left(\dfrac{17}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$4R^2\left(1 - \frac{15}{16}\right) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{4R^2}{16} = \frac{17^2}{4} \Rightarrow \begin{aligned} R &= 17 \\ z &= \frac{15 \cdot 17}{16} \end{aligned}$$

$\triangle ABC \sim \triangle QBD$

$\Downarrow$

$$\frac{AC}{DQ} = \frac{AB}{BQ}$$

$$AC = DQ \cdot \frac{AB}{BQ} = z \cdot \frac{2R}{2R - z} = z \cdot \frac{2R}{2R - \frac{15}{16}R} = \frac{32}{17}z = 30$$

$\triangle ACD$ − прямоугл, теор. Пиф.:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{30^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 15\sqrt{4 + \frac{1}{4}} = 15 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\angle AFE = \angle ABE\ (\overset{\frown}{AE})$ $= \alpha$

$\angle ABC = \angle AEC\ (\overset{\frown}{AC}) \Longrightarrow \triangle ADB \sim \triangle CDE$

($\angle CDE = \angle ADB$ − смежные) см. сл. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолж. 2)

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{ED} \Rightarrow ED = \frac{CD}{AD} \cdot BD = \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}}{15 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\sin \angle AFE = \sin\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{AD+ED}{AB} = \frac{16\frac{\sqrt{17}}{2}}{34} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

($\triangle AEB$ - прямоуг.)

$AE = AD + ED = 8\sqrt{17}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\boxed{\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}$$

$BE = AB\cos\alpha = 2\sqrt{17}$

$$\cos\beta = \frac{BE}{BD} = \frac{2\sqrt{17}}{\frac{17}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\alpha$$

($\triangle DEB$ - прямоуг.)

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\triangle AEF$ - прямоуг., $\angle EAF = 90^\circ$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4 = \frac{AE}{AF} \quad (\triangle AEF)$$

$$AF = \frac{AE}{4} = 2\sqrt{17}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$$

Ответ: $R = 17$

$r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$S_{AEF} = 136$

№5.

$$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad (0)$$

$b = 1$: $\quad f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$(0) \Rightarrow f(ab) - f(b) = f(a)$

заменим: $a \to \frac{x}{y}$, $b \to y$ $\Rightarrow ab = x$

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (1)$$

т.к. $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, $p \in \mathbb{P}$ и $f(ab) = f(a) + f(b)$, то

для нахождения $f(x)$ требуется разложить x на простые множители: $x = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, $a, b, c \in \mathbb{P}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$, и

тогда $f(x) = \alpha\left[\frac{a}{4}\right] + \beta\left[\frac{b}{4}\right] + \gamma\left[\frac{c}{4}\right] + \ldots$

чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ требуется $f(y) > f(x)$.

т.к. $x, y \in [2; 25]$, то рассмотрим $f(n)$, где $n \in [2; 25]$:

n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	0	13	3
3	0	$14 = 2 \cdot 7$	1
4	1	$15 = 3 \cdot 5$	1
5	1	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	0
$6 = 2 \cdot 3$	0	17	4
7	1	$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$	0
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	0	19	4
$9 = 3 \cdot 3$	0	$20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$	1
$10 = 2 \cdot 5$	1	$21 = 3 \cdot 7$	1
11	2	$22 = 2 \cdot 11$	2
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	0	23	5
		$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	0
		$25 = 5 \cdot 5$	2

см. сл. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолж.)

Т.е. среди чисел [2; 25] 9 шт имеют $f(n)=0$

8 шт имеют $f(n)=1$

3 шт $f(n)=2$

2 шт $f(n)=3$

2 шт $f(n)=4$

1 шт $f(n)=5$

Если $f(x)=0$, то для выполнения условия $f(y)$ может быть $=1; 2; 3; 4; 5$.

Иксом может быть любое из 9 чисел, дающих $f(n)=0$,

игреком может быть любое число с $f(y)\geq 1$, что дает $9\cdot(8+3+1+2+1)$ вариантов

аналогично $f(x)=1 \Rightarrow f(y)\geq 2$: $8\cdot(3+1+2+1)$ вариантов

$f(x)=2 \Rightarrow f(y)\geq 3$: $3\cdot(1+2+1)$ вариантов

$f(x)=3 \Rightarrow f(y)\geq 4$: $1\cdot(2+1)$ вариантов

$f(x)=4 \Rightarrow f(y)\geq 5$: $2\cdot 1$ вариантов

$f(x)\geq 5 \Rightarrow f(y)\geq 6$ 0 вариантов

Тогда суммарное кол-во вариантов:

$9\cdot(8+3+1+2+1)+8\cdot(3+1+2+1)+3\cdot(1+2+1)+1\cdot(2+1)+2\cdot 1=$

$=9\cdot 15+8\cdot 7+3\cdot 4+3+2=135+56+17=$

$=208$ вариантов

Ответ: 208 вариантов.

№3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

ОДЗ логарифма $10x - x^2 > 0$

$$\Downarrow$$

$$|x^2 - 10x| = 10x - x^2$$

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

Пусть $10x - x^2 = t$, тогда

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

что выполняется при всех $t > 0$

тогда $10x - x^2 > 0$

$$x(x - 10) < 0$$

$$x \in (0; 10)$$

Ответ: $x \in (0; 10)$.

№6.

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

$$a, b - ? \; ; \forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right].$$

пусть $g(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} = \frac{16x - 20 + 4}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x - 5} =$

$$= 4 + \frac{1}{x - \frac{5}{4}}.$$

$$f(x) = -32x^2 + 36x - 3 = -2(16x^2 - 18x) - 3 =$$

$$= -2\left(4x^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{9}{4} + \frac{81}{16} - \frac{81}{16}\right) - 3 =$$

$$= -2\left(4x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{81}{8} - 3 = -32\left(x - \frac{9}{16}\right)^2 + \frac{57}{8}$$

см. сл. стр.

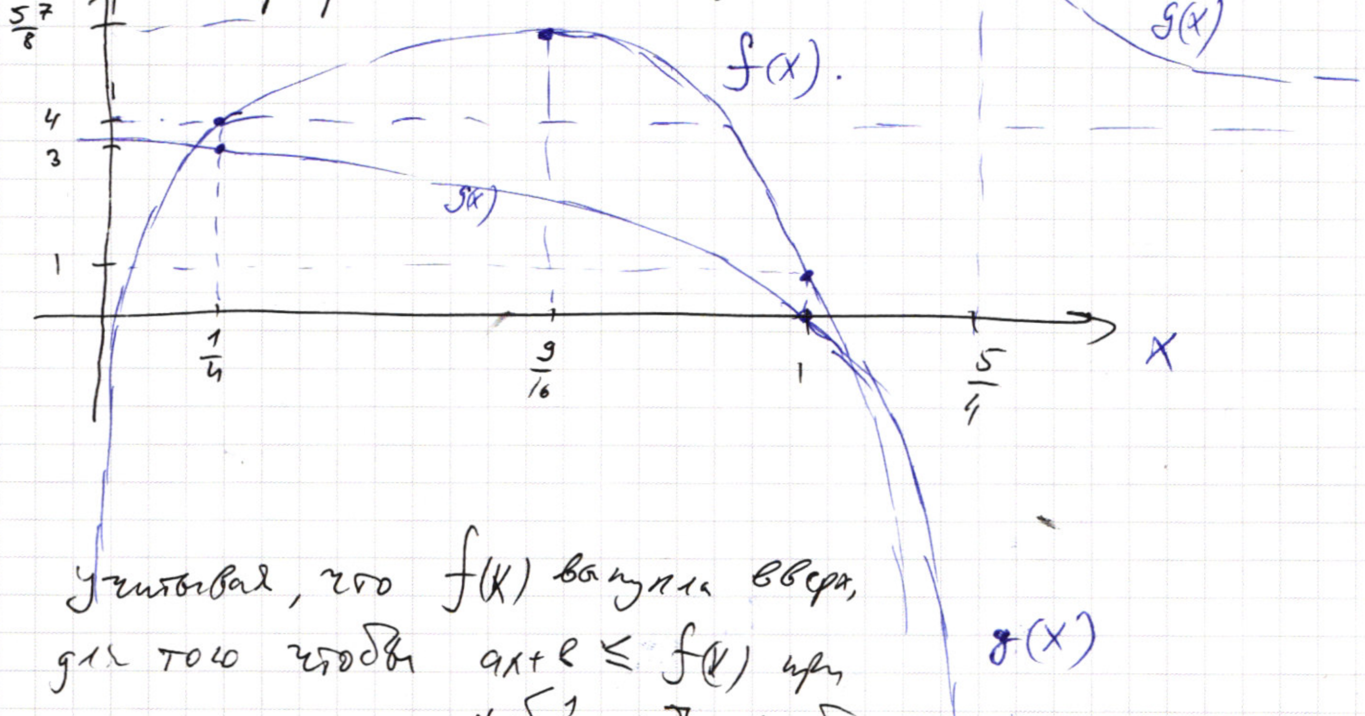
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолж.)

На графике это выглядит как



Учитывая, что $f(X)$ выпукла вверх, для того чтобы $ax+b \le f(X)$ при $X \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ необходимо и достаточно

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \le f(1) = 1 \\ a \cdot \frac{1}{4} + b \le f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \end{cases}$$

По графику видно, что, чтобы $ax+b$ было $\ge g(X)$ при $X \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ необходимо и достаточно*, чтобы ур-е

$ax+b = g(X)$ имело ≤ 1 корня

* учитывая ограничения, накладываемые $ax+b \le f(X)$ и учитывая выпуклость $g(X)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ логарифма $10x-x^2>0$

$\Downarrow$

$$|x^2-10x| = 10x-x^2 = t>0$$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}.$$

$$\cancel{t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}=f(t)}$$

$$\cancel{f' = 1+\log_3 4\, t^{\log_3(4)-1}-\log_3 5\, t^{\log_3(5)-1}}$$

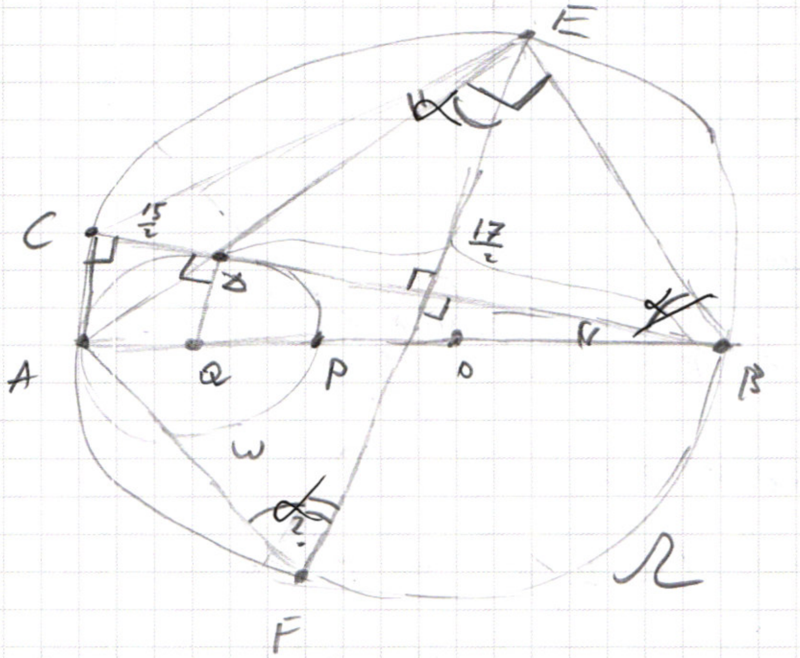
☑ черновик ☐ чистовик

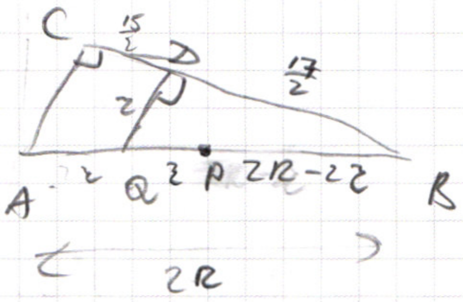
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4.





$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow AC \parallel FE \parallel QD$

$$\frac{z}{\frac{15}{2}} = \frac{2R - z}{\frac{17}{2}}$$

$$17z = 30R - 15z$$

$$32z = 30R \qquad 16z = 15R$$

$$z = \frac{15}{16}R$$

$$(2R-2z)\cdot 2R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\cancel{4R^2 - 4R^2\cdot\frac{15}{16} = \frac{17^2}{4} = 17}$$

$$4R\left(1-\frac{15}{16}\right)R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{R^2}{4} = \frac{17^2}{4} \qquad R = 17, \quad z = \frac{15\cdot 17}{16}$$

$$\frac{AC}{DQ} = \frac{2R}{2R-z}$$

$$AC = \frac{2R}{2R-\frac{15}{16}R}\cdot z = \frac{2\cancel{R}}{\frac{17}{16}\cancel{R}}z = \frac{32}{17}z = 30$$

$$AD = \sqrt{30^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{1}{4}}\cdot 15 = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot 15$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{ED} \qquad ED = \frac{CD}{AD}BD = \frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}}{15\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолж).

$a+b \le 1$

$\frac{a}{4}+b \le 4$

~~$a+b \ge 0$~~

~~$\frac{a}{4}+b \ge$~~

$ax+b = \frac{16x-16}{4x-5}$

$4ax^2+4bx-5ax-5b=16x-16$

$4ax^2+x(4b-5a-16)-5b+16=0$

$D=(4b-5a-16)^2+4\cdot 4a\cdot(5b-16)=$

$=16b^2+25a^2+256-40ab-128b+160a+$

$+80ab-256a=$

$=16b^2+25a^2+256+40ab-128b-96a\le 0$

???

0	9
1	8
2	3
3	1
4	2
5	1

№5 (продолж)

$f(x)=0$: $9\cdot(8+3+1+2+1)$ вариантов

$f(x)=1$: $8\cdot(3+1+2+1)$ вар.

$f(x)=2$: $3\cdot(1+2+1)$ вар.

$f(x)=3$: $1\cdot(2+1)$

$f(x)=4$: $2\cdot 1$

$\sum = 9\cdot(8+3+1+2+1)+8\cdot(3+1+2+1)+3(1+2+1)+1\cdot(2+1)+2\cdot 1=$

$=9\cdot 15+8\cdot 7+3\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1 = 135+56+12+3+2=$

$=191+28=\boxed{215}$ ← ~~Ответ~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(ab) - f(b) = f(a)$

$a \to \frac{x}{y}$

$b \to y$

$a \cdot b = x$

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

~~$f(x) + f(y) = f(xy)$~~

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

если $x = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, то

$f(x) = \alpha\left[\frac{a}{4}\right] + \beta\left[\frac{b}{4}\right] + \gamma\left[\frac{c}{4}\right] \ldots$

0 – 9шт
1 – 8шт
2 – 3шт
3 – 1шт
4 – 2шт
5 – 1шт

N		$f(N)$
2		0
3		0
4		1
5		1
6	2·3	0
7	7	1
8	2·2·2	0
9	3·3	0
10	2·5	1

11		2
12	2·2·3	0
13		3
14	2·7	1
15	3·5	1
16	2·2·2·2	0
17		4
18	2·3·3	0
19		4
20	5·2·2	1
21	3·7	1

22	2·11	2
23		5
24	2·2·3·2	0
25	5·5	2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = \frac{-2}{5}$.

$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$

$\cancel{\sin x + \sin(-x) = 2\cos\frac{x+x}{2}\cos\frac{x-x}{2} = 2\cos x\cos 0}$

$\sin x + \sin(-x) = 2\sin\frac{x-x}{2}\cos\frac{x+x}{2} = 0$

$\sin x + \sin x = 2\sin\frac{x+x}{2}\cos\frac{x-x}{2} = 2\sin x$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{2}+\sin x = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}}$

$\sin\pi + \sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) =$

$= 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x.$

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) =$

$= 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-2}{5}$

$\frac{-2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{-2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\beta) = \frac{\pm 2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6=2y(x-6)-1(x-6)=(2y-1)(x-6)$

$x^2-\underset{2\cdot 6}{12x}+36+36y^2-\underset{2\cdot 6\cdot 3}{36y}+9=45+36+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x-12y=(x-6)-6(2y-1)$

$x-6=a \quad 2y-1=b$ $\quad ab\geq 0$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad |^2 \Rightarrow b\neq 0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \quad |:b^2 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+36=0$

$D=169-4\cdot 36=169-144=25=5^2$

$\frac{a}{b}=\frac{13\mp 5}{2}=4;\ 9.$

$$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \Rightarrow \text{одного знака} \Rightarrow ab\geq 0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолж).

1) $\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 = \cancel{-\sin^2\alpha - \cos^2 2\alpha}$

$= -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad | : \cos^2\alpha \neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha - 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{tg}^2\alpha - 1$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 3 = 16$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2\pm4}{2\cdot3} = -1; \frac{1}{3}$

2) $\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad | : \cos^2\alpha \neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{tg}^2\alpha - 1$

$0 = \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3$

$D = 4 + 4\cdot3 = 16$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pm4}{2} = 3; -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 (сгедолик).

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \end{cases}$$

$16b^2+9b^2=90$

$a=4b:)$ $25b^2=90$

$b^2=\cancel{\frac{18}{5}}\ \frac{2\cdot 3}{5}\ \frac{90}{25}=\frac{9\cdot5\cdot2}{5\cdot5}=\frac{2}{5}\cdot9$

$$\left[\begin{array}{l} b=\pm3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ a=\pm12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right.$$

$a-6b\geq0$ забыл!

$a=9b:)$ $81a^2+9b^2=90$

$$\left[\begin{array}{l} b=\pm1 \\ a=\pm9 \end{array}\right.$$

$(a;b)=\cancel{\left(12\sqrt{\frac{2}{5}};3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)};\left(-12\sqrt{\frac{2}{5}};-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right);(9;1)\cancel{(-9;-1)}.$

$x=a+6$ $y=\frac{b+1}{2}$

$(x;y)=\cancel{\left(12\sqrt{\frac{2}{5}}+6;\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}\right)};\left(-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6;\frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}\right);$

$(15;1);\cancel{(-3;0)}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение).

$$\sin\angle AFE = \frac{AE}{AB} = \frac{AD+ED}{AB} = \frac{16\frac{\sqrt{17}}{2}}{34} = \frac{8}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

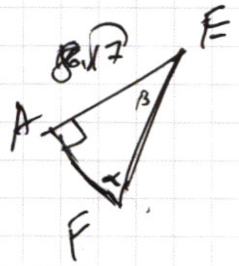
$$\cos\angle AFE = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\angle AFE =) = \alpha$ $\qquad$ $\angle ABF =) = \beta$

$$BE = 2R\cos\angle AFE = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$$

$$BD\cos\beta = BE$$

$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{17}}{\frac{17}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\alpha$$



$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 4 = \frac{AE}{AF}$$

$$AF = \frac{AE}{4} = 2\sqrt{17}$$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17} = 8\cdot 17.$$

№6.

$g(x)$ $f(x)$

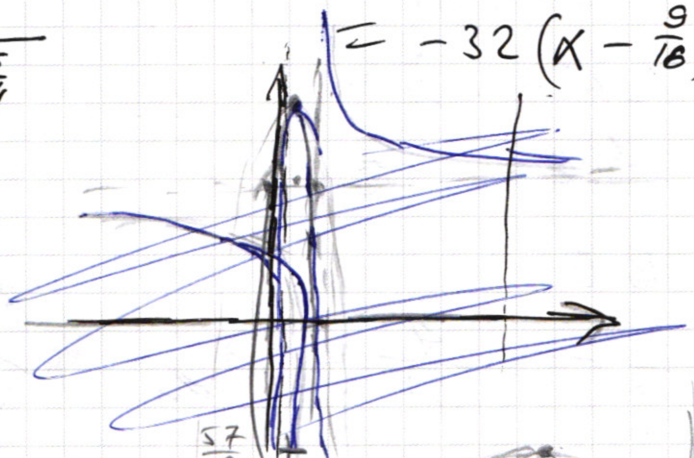
$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

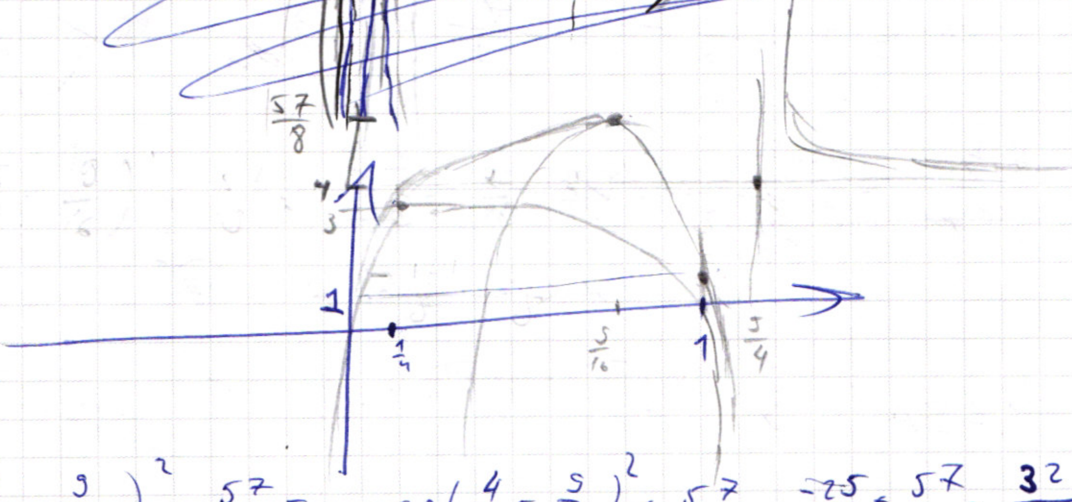
$x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$= \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} = 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$$

$$= -2(16x^2-18x)-3 = -2\left((4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot\frac{9}{4}+\frac{81}{16}-\frac{81}{16}\right)-3 = -2\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{8}-3 = -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+7+\frac{1}{8}$$

$\frac{57}{8}$





$$-32\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{57}{8} = -32\left(\frac{4}{16}-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{57}{8} = \frac{-25}{8}+\frac{57}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\begin{cases} a\cdot 1+b \le f(1) = 1 \\ a\cdot\frac{1}{4}+b \le f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \\ \cancel{a\cdot 1+b \ge g(1) = 0} \\ \cancel{a\cdot\frac{1}{4}+b \ge g\left(\frac{1}{4}\right) = 3} \\ ax+b = g(x) \text{ имеет 0 или 1 корней} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)