МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

Отдельно рассмотрим (1) ур-е системы:

$$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$$

$$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$$

~~Пусть~~ при $y=\frac{2}{3}$: $2-2x=0$, ~~$x=\frac{1}{2}$~~ $x=1$

при $x=1$: $3y-2=0$, $y=\frac{2}{3}$

при $3y-2\neq 0$, $x-1\neq 0$: Пусть $a=3y-2$; $b=x-1$, тогда ур-е (1) принимает вид: $a+2-2b-2=\sqrt{ab}$

$$a-2b=\sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} ab>0 \text{ (т.к. } ab=0 \text{ мы рассмотр.)} \\ a^2-4ba+4b^2=ab \quad /:b^2 \; (b\neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab>0 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+4=0 \end{cases}$$

$D=25-16=9$; $\begin{cases} ab>0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=4 \\ \frac{a}{b}=1 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \frac{3y-2}{x-1}=4 \\ \frac{3y-2}{x-1}=1 \end{array}\right.$

система (1) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставим получившиеся значения в ур-е (2):

а) при $x=1$, $y=\frac{2}{3}$ ур-е (2) принимает вид:

$3+\frac{4}{3}-6-\frac{8}{3}=4$; $-\frac{4}{3}-3\neq 4$ – корни не удовл.

б) при $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$: $3x^2+\frac{16}{3}x^2-\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}-6x-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}=4$ $/\cdot 3$

$$9x^2+16x^2-16x+4-18x-16x+8-12=0$$

$25x^2-50x=0$; $25x(x-2)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ – корни системы}$$

в) при $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$$3x^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-6x-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=4 \quad /\cdot 3$$

$$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4-12=0$$

$$10x^2-20x-15=0$$

$2x^2-4x-3=0$ $D=16+24=40$; $x=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4+\sqrt{10}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right. \text{ – корни сис-мы}$$

Ответ: $\left(0;-\frac{2}{3}\right)$; $(2;2)$; $\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2};\frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

N1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{-8}{17}\cdot\frac{-\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2-2\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha=0\\ -1+2\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}-\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha+1=0\\ 2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+2)=0\end{array}\right.\qquad D=4+4,\qquad \cancel{2\alpha\neq\frac{\pi}{2}}\qquad \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{-2}\\ \sin 2\alpha=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=\sqrt{2}-1\\ \sin 2\alpha=0\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\arcsin\sqrt{2}-1+2\pi\cdot k}{2}\\ \alpha=\frac{\pi-\arcsin(\sqrt{2}-1)+2\pi\cdot n}{2}\\ \alpha=\frac{\pi\cdot m}{2}\end{array}\right.\qquad k,n,m\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}tg\alpha=\pm\frac{\sin\left(\frac{\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\arcsin(\sqrt{2}-1)}{2}\right)}=\pm\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\sqrt{\frac{1+\cos(\arcsin(\sqrt{2}-1))}{2}}}=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{(1+\sqrt{2\sqrt{2}-2})2}}=\frac{\pm(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2+2\sqrt{2\sqrt{2}-2}}}\\ tg\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}}}\\ tg\alpha=0\end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha=\frac{\pm(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2\pm2\sqrt{2\sqrt{2}-2}}}$; $tg\alpha=0$

$\cancel{\frac{3}{\pi}\ \frac{9}{75}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\quad$ ОДЗ: $x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$ (учитывая ОДЗ)

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)^{\log_4 4} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$ $\quad$ $/ : 5^{\log_4(x^2+6x)}$ (т.к. $5^{\log_4(x^2+6x)}>0$ при любом x, знак не мен-ся)

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4(x^2+6x)}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4(x^2+6x)} \geq 1$

~~Расм. ур~~ Левая часть представляет собой убывающую ф-ю (как сумма убывающих ф-й). Значит ур-е

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4(x^2+6x)}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4(x^2+6x)} = 1$ может иметь не более 1 корня;

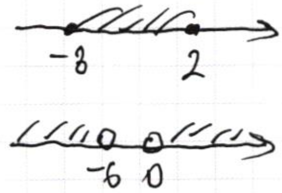
т.е. $\log_4(x^2+6x)=2$ $\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1\right)$

Значит нер-во принимает вид $\log_4(x^2+6x) \leq 2$

(т.к. при больших, ур-х левая часть будет уменьшаться (<1))

$x^2+6x \leq 16$; $x^2+6x-16 \leq 0$ $\quad$ $D=36+64=100$; $x=\frac{-6\pm10}{2}=-3\pm5$

$\begin{cases} x \geq -8 \\ x \leq 2 \\ x^2+6x>0 \quad (\text{из ОДЗ}) \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geq -8 \\ x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right. \end{cases}$



$x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

☐ черновик $\quad$ ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5.
найдём все значения ф-ии на отрезке $[1;27]$: $f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$; составные числа: $f(4)=0$; $f(6)=0$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(12)=0$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(18)=0$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(24)=0$; $f(25)=2$; $f(26)=3$; $f(27)=0$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot y^{-1})$; $f(a\cdot b^{n})=f(ab)+f(b^{n-1})$ при $n=0$

$f(x\cdot y^{-1})=f(x)+f(y^{-1})=2f(x)-f(xy)$ $\quad f(b^{-1})=f(a)-f(ab)$

$2f(x)<f(xy)$; $f(x)<f(y)$. Кол-во натур. чисел из промежутка $[3;27]$ дающие при подст. в ф-ю: „0" – 10 ; „1" – 7 ; „2" – 3 ; „3" – 2 ; „4" – 2 ; „5" – 1. При $f(y)=1$, $f(x)=0$, при $f(y)=2$, $f(x)=0$ или $f(x)=1$; при $f(y)=3$; $f(x)=0$ или $f(x)=1$ или $f(x)=2$; при $f(y)=4$; $f(x)=0;1;2;3$; при $f(y)=5$; $f(x)=0;1;2;3;4$.
Значит кол-во пар равно: $7\cdot10+3\cdot17+2\cdot20+2\cdot22+1\cdot24=70+51+40+44+24=121+64+24=185+24=209$.

Ответ: 209 пар.

№6.

$$\begin{cases}\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\\ 8x^2-34x+30\leq ax+b\end{cases}$$

Построим графики данных ф-й на отрезке $x\in(1;3]$

$y=\frac{4x-3}{2x-2}$ $\quad y=2+\frac{1}{2x-2}$

$D=1156-960=196$

$x=\frac{34\pm14}{16}$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{4}\\ x=3\end{array}\right.$

$y=8x^2-34x+30$ $\quad f(1)=4$

$x_B=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

$y_B=-6\frac{1}{8}$

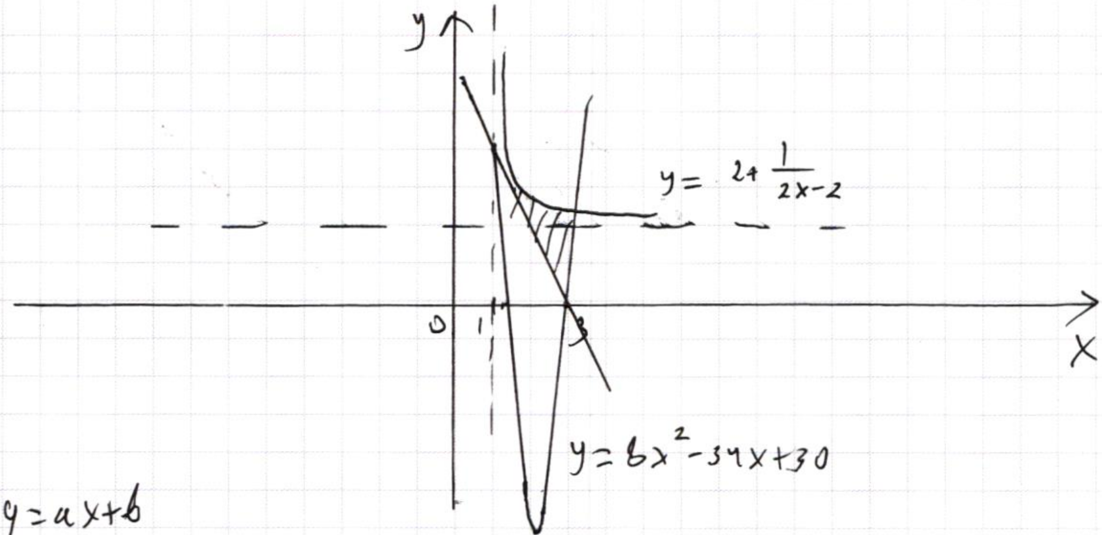
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $y = ax+b$

проходит через т. $(3;0)$; $(1;4)$

$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 12-3b+b=0 \\ a=4-b \end{cases}$ $\begin{cases} b=6 \\ a=-2 \end{cases}$ $y=-2x+6$

Найдём пересеч-я ($y=2+\frac{1}{2x-2}$; $-2x+6=2+\frac{1}{2x-2}$

$\frac{(2x-4)(2x-2)+1}{2x-2}=0$ $\frac{4x^2-4x-8x+9}{2x-2}=0$ $\frac{4x^2-12x+9}{2x-1}=0$

$D=144-144=0$; $x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ - имеет точку кас-я - удовл. усл.

Данная прямая не может иметь других a и b, т.к.

при увеличении a (рассм. случай, когда $a<0$, т.к. при $a>0$ очевидно усл. не вып-ся) (т.е. $a \to 0$ со стороны $-\infty$) не вып-ся

нер-во $8x^2-34x+30 \le ax+b$ на $x \in [1;3]$, при уменьшении $\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b$
(т. пересечения $\neq 1$) (имеет больше 2-х т. пересеч.)

при $b\uparrow$ или $b\downarrow$ аналогичная ситуация.

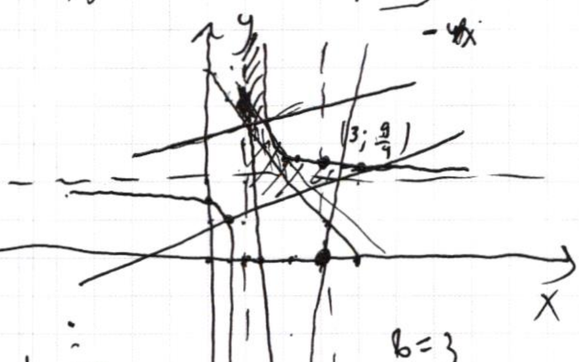
Ответ: $a=-2$; $b=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2x+6 = 2+\frac{1}{2x-2}$ $\quad (-2x-4)(2x-2)+1$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $\quad (a;b)$, для всех $x \in (1;3]$

$\begin{cases} ax+b \leq \frac{4x-3}{2x-2} \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \end{cases}$ $\quad \frac{-2}{(2x_0-2)^2}$



$8x^2-34x+30 = \frac{4x-3}{2x-2}$ $\quad 16 \times 9 = 144$ $\quad (2x-3)^2$

$y = 2+\frac{1}{2x-2}$

$y = 8x^2-34x+30$ $\quad 2-\frac{1}{2}$ $\quad 2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ $\quad 34 \times 34$: 136, 102, 1156

$2+\frac{1}{1-2} = 2-1$

$b=3$

$x_b = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ $\quad 2+\frac{1}{4-2} = 2+\frac{1}{2}$ $\quad 2+\frac{1}{6-2} = 2+\frac{1}{4}$

$a+b$

$a+b=4$

$\frac{289}{8} - \frac{289\cdot 2}{8} + 30$ $\quad \frac{-289+240}{8} = -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$

34×34: 136, 102, 1156

$1156 - 960 = 196$ $\quad 14 \times 14$: 56, 14 $\quad 124 \times 4 = 496$

$120 \times 8 = 960$ $\quad \frac{-2x_0}{(2x_0-2)^2}$ $\quad x = \frac{34 \pm 14}{16}$ $\quad x=3$ $\quad x=\frac{5}{4}$

$\frac{4x-3}{2x_0}$ $\quad$ ~~$a \geq -b+4$~~ $\quad 496 - \frac{405}{4}$ $\quad a<0$ $\quad \frac{91}{4}$

$\frac{4x_0-3}{2x_0-2} + \frac{2x_0-2}{(2x_0-2)^2} = b$ $\quad \frac{285}{16}$

$y = ax+b$ $\quad 8-34+30=4$ $\quad 1;4$ $\quad b \geq 4-4$ $\quad b \geq -34$ $\quad a = -\frac{2}{(2x-2)^2}$

$b=$

$\begin{cases} 4 = a+b \\ 3a+b \geq 0 \end{cases}$ $\quad a = \frac{-2}{(2x_0-2)^2}$ $\quad \begin{cases} 3a+b \geq 0 \\ a+b \geq 4 \end{cases}$ $\quad \frac{4x_0-4}{2x_0-2} = 4$ $\quad ax+b \neq \frac{4x-3}{2x-2}$

27

$3 \cdot 27 \cdot 15 = 135, 27$ $\quad 405$

$f'\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right) = \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x_0-2)^2}$ $\quad \max x \in (1;3]$

$\frac{27}{4} \cdot 30 - 15$ $\quad \frac{27}{8}$ $\quad \frac{405}{4}$

$f'' = \frac{-2 \cdot 2(2x-2)\cdot 2}{(2x-2)^4} = \frac{8}{(2x-2)^3}$ $\quad 12 \times 8 = 960$ $\quad \frac{27}{8}$

$16 \quad -84 \quad 124 \quad -24$

$86 \quad -30$

$16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 27 = 0$

$-30 - 4x + 3 = 0$

$\frac{-2}{(2x_0-2)^2}$ $\quad y_{кас.}=\frac{4x_0-3}{2x_0-2}+\left(\frac{-2}{(2x_0-2)^2}\right)(x-x_0)$ $\quad (4x_0-3)(2x_0-2)$

$2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha ...)$

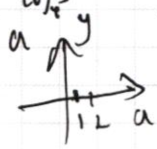
$8x_0^2-8x_0-6x_0+6-2x_0-2$ $\quad \frac{-2}{(2x_0-2)^2}$ $+\frac{-2x_0}{(2x_0-2)^2}+\frac{4x_0-3}{2x_0-2}=4$

$\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

45 45

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad a$ $\quad b$ $\quad 2-2\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha=0$

$\log_a 3$



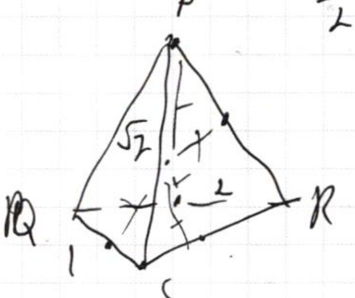
$-2x_0-2+\frac{}{(2x_0-2)^2}$ $\quad -1+2\sin^2 2\alpha+4\sin 2\alpha=-1$

$\frac{8x_0^2-16x_0+4}{(2x_0-2)^2}=4$ $\quad 2<0$ $\quad \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha=0$ sin

$\sin\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ sin $\quad \frac{2x_0^2-4x_0+1-4x_0^2+8x_0-4}{(2x_0-2)^2}=0$ $\quad D=16-24<0$

$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\quad y=a^x$



$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{-2x_0^2+4x_0-3}{(2x_0-2)^2}=0$ $\quad -1+\sqrt{2}$ $\quad -1-\sqrt{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$ $\quad \sin(2\beta)$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad -\sin(2\alpha+4\beta)-\sin 2\alpha=8\sin^2(2\alpha+2\beta)$ $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$-(2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta)$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\quad \cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}\left(\cos 2\beta+4\sin(2\alpha+2\beta)\right)=0$

cos

$\sin(\alpha+\beta)=$ $\quad 0$

$-\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha+1=0$

$D=4+4=8$

$\sqrt{1-(\sqrt{2}-1)^2}$ $\quad 4\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+4\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta+\cos 2\beta=0$

$\sin 2\alpha=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=$

$1-(2-2\sqrt{2}+1)$ $\quad \cos^2\beta-\sin^2\beta$ $\quad \cos 2\beta(4\sin 2\alpha+1)+4\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=0$ $\quad =-1\pm\sqrt{2}$

$\sqrt{-2+2\sqrt{2}}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad 1-2\sin^2\beta+4\sin(2\alpha+2\beta)=0$ $\quad 1-2\sin^2\beta-\frac{4}{\sqrt{17}}=0$ $\quad \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}-1=\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha=0\end{array}\right.$

$\cancel{1-2\sin^2\beta+8\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}=0$

$\alpha=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k-\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin^2\beta=\frac{1-\frac{4}{\sqrt{17}}}{2}=$

$\alpha=\frac{\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k-\frac{\sqrt{17}-4}{\sqrt{17}}}{2}$ $\quad \pi\cdot k$ $\quad \alpha=\frac{\pi\cdot k}{2}$

$=\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}$ $\quad \alpha=\arcsin\sqrt{2}-1$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cancel{\sin 2\beta}+\cos$

$\frac{1}{\sin}$ $\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=\frac{-8}{17}$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$ $\quad \left[\begin{array}{l}4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1\\ 4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$4^x = \frac{3}{5}$ $\quad a = x^2+6x \quad \log_4 \frac{3}{5}$

$3y(x-1) - 2(x-1)$ $\quad a^{\log_4 a}$

$(3y-2)(x-1)$ $\quad a^{\log_4 3} - a^{\frac{5}{3}\log_4 5} + a \geq 0$

$3\cancel{(x-1)^2}$ $\quad a \quad a^{\log_4 3}\left(1 - a^{\log_4 5 - \log_4 3}\right.$ $\quad \frac{4}{3}\cdot 3$

12 $\quad x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$ $\quad a^{\log_4 5} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \quad a^{\log_4 \frac{3}{5}}($ $\quad \log_4 \frac{5}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{25}{9} =$

17 $\quad (x-1)^2 - 1 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$ $\quad 1 - a \quad \frac{5}{3}$ $\quad a^{\log_4 5}\left(a^{\log_4 \frac{3}{5}}+1\right)$

22

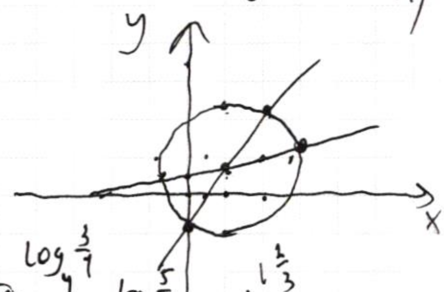
27 $\quad \frac{25}{9}$

33 $\quad \frac{4}{3} \quad \frac{12}{9}+\frac{4}{9} = \frac{16}{9}$

16

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \\ 3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \end{cases}$$

$\frac{5}{3} \quad a^{\log_4}$



$y = \frac{2}{3}$ $\quad 0 \quad (3y-2)($ $\quad a\left(a^{\log_4 \frac{3}{4}} - a^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1\right) \geq 0$ $\quad 1\frac{1}{3}$

$1-2x=0 \quad 3y-2x$

$3y-2x \geq 0$ $\quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad 3y-2 = a \quad -2b$

$x-1 = b \quad 3y-2$

$9y^2 - 12yx + 4x^2 = (3y-2)(x-1)$ $\quad \log_a a$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 3y - 2x + 2$ $\quad \sqrt{ab} = a+2-2b-2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 3y + 2x - 2 = 0$ $\quad \sqrt{ab} = a-2b$

$3y\cancel{(3y-5x+1)}\ \cancel{+2(2x^2+x-1)}$ $\quad a-2b \geq 0$

$\log_a\left(a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5}\right) \geq$ $\quad ab = a^2 - 4ab + 4b^2$

$x^2+6x>0$ $\quad \begin{cases} \frac{3y-2}{x-1} = 4 \\ \frac{3y-2}{x-1} = 1 \end{cases}$ $\quad 3y-2 = 4x-4 \quad 3y-2 = x-1$ $\quad a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \ /b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad \frac{x^2}{9} + 2\cdot\frac{x}{9} + \frac{1}{9}$ $\quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$ $\quad 2^5 + 2^8$ $\quad D = 25-16 = 9$

$\frac{a}{b} = \frac{5\pm 3}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = 4 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{array}\right.$

$a^n + b^n \quad 2\cdot\frac{4\cdot 2}{9}$

$4^{\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x)}$ $\quad \frac{8}{3} - \frac{2}{3}$ $\quad 3\left(\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{4}{9}\right.$ $\quad -\frac{4}{3} - 3$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$ $\quad \frac{6}{3}$ $\quad \frac{2+\sqrt{10}}{6} + \frac{2}{6}$ $\quad -32x \quad -50x$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}\left(1 - (x^2+6x)^{\log_4}\right.$ $\quad \frac{2-\sqrt{10}+2}{6}$ $\quad 31$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 60 + \sin 30 = \sqrt{3}$

$= 2\sin 45^\circ \cdot \cos 15$

$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{30}{2}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin(\alpha+\beta)$

$\sqrt{2}\cdot$

$\frac{1+\cos 30}{2}$

$\cos 30^\circ$ $\frac{1+\cos^2 15}{2}$

$2\alpha+4\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha+2\beta =$

$a^{\log_4 3} = a^{\log_4 5}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta = \frac{1}{17}$

$a^{\log_5 3} = 1 - a^{\log_4 5}$

$x^3 - x^{-2}$

$-8\sin^2(2\alpha+2\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$x(x+6)$

$a^{\log_4 4}$

$-\infty\ -6 \quad 0\ +\infty$

$\sin(2\alpha+2\beta)\left(4\sin(2\alpha+2\beta)+\cos 2\beta\right) = 0$

$2\alpha+2\beta = \pi\cdot k$

$\alpha+\beta = \frac{\pi\cdot k}{2}$

$4\sin(2\alpha+2\beta) + \cos 2\beta = 0$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} \quad x^3+6x \geq 0$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\log_a\left(a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3}\right) \geq 1$

$2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi\cdot k$

$a^{\log_4 3} \geq a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3}$

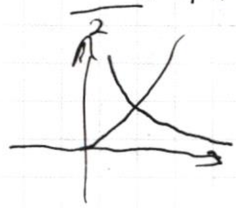
$2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi\cdot k$

$2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi\cdot k$

$\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi\cdot k$

$a^{\log_4 3}$

$\alpha = -\beta - \frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \pi\cdot k$



3^{-2}

$a>0$

$\alpha = -\beta + \frac{\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \pi\cdot k$

$0<a<1$

$x^2+6x\geq 0$

$-\infty;-6 \quad 0;+\infty$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha$

$x^2+6x-1<0$

$\cos 30+60 = 0$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$D = 36+4 = 40$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 2\beta = b$

$\sin 2\alpha = a$

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$

$-3-\sqrt{10} \quad -3+\sqrt{10}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\,b + a($

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha -$

$-\sin^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 a} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 a} \geq 1$

$(-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10})$

$x(x+6)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

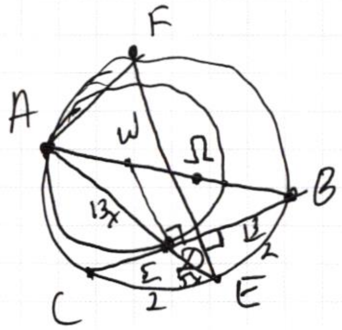
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



r - ?
R - ?
∠AFE - ?

$\frac{5}{2} : \frac{13}{2} = \frac{DE}{AD} = \frac{5}{13}$

S_{AEF} - ?

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p- простые число кол-во x; y

$3 \le x \le 27$; $3 \le y \le 27$ и $f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(a^{-2}b^{-2})$ $f(a^{-1}b^{-1}) = f(a^{-1}) + f(b^{-1})$

$f(a^2b^2) = f(ab) + f(ab) = 2f(a) + 2f(b)$

$f(ab^2) = f(ab) + f(b) = f(a) + 2f(b)$ $f(\frac{4}{3})$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$ $f(3) = 0$

$f(1) < 0$ $f(\frac{9}{4}) =$ $f(1) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$\left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0$

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(y) > f(x)$

$f(a \cdot b^n) = f(a)$

~~5-2~~

0 — 12
1 — 7
2 — 3
3 — 2
4 — 2
5 — 1

84 57 44 48

$7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 22 +$
$+ 2 \cdot 26$
26

$167 + 44 + 48$

$a \cdot b^{n-1}$
a
$f(ab) + f(b^{n-1})$

$f(ab^n) = f(ab) + f(b^{n-1})$

$f(b^{n-1}) =$

f(2) = 0
f(3) = 0
f(5) = 1
f(7) = 1
f(11) = 2
f(13) = 3
f(17) = 4
f(19) = 4
f(23) = 5
f(24) = 0
f(25) = 2
f(26) = 3
f(27) = 0
f(18) = 0
f(20) = 1
f(21) = 1

f(4) = 0
f(6) = 0
f(8) = 0
f(9) = 0
f(10) = 1
f(12) = 0
f(14) = 1
f(15) = 1
f(16) = 0
f(22) = 2

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)