МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Перепишем второе ур-е так:

$$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90 \Leftrightarrow (x-6)^2+9(2y-1)^2=90$$

А первое как:

$$(x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} a = x-6 \\ b = 2y-1 \end{cases}$$

Тогда система будет такой:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b\geq 0 \\ a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 6b \\ (a-4b)(a-9b)=0 \quad (1) \\ a^2+9b^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

Из (1) вытекает, что $\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$

То есть a и b одного знака

4 2 случая

→

1) $a, b > 0$, тогда $\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \cancel{9} \; a = 9b$

подставим в (2)

$81b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = 1$, $b > 0$

$a = 9$ $\Rightarrow$ $\underline{x = 15}$ $\underline{y = 1}$

2) $a, b < 0$, тогда $\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a = 4b$

подставим в (2)

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = \frac{18}{5}$, $b < 0$

$b = -3\sqrt{2,5}$

$a = -12\sqrt{2,5}$ $\Rightarrow$ $\underline{x = -\frac{12\sqrt{10}}{5} + 6}$

$\underline{y = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) + 1\right)}$

Ответ: $x_1 = 15$
$y_1 = 1$
$x_2 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} + 6$
$y_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5} + 1\right)$

1. Решим систему:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\sin\left(\frac{4\alpha + 4\beta}{2}\right) \cdot \cos 2\beta$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 1 = \pm 2\cos 2\alpha$

$\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 1 = 4\cos^2 2\alpha = 4 - 4\sin 2\alpha$

$5\sin^2 2\alpha + 2\sin\alpha - 3 = 0$

З: $\sin 2\alpha = t$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$\sin 2\alpha = -1$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

$tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$\cos 2\alpha = 0$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$

$\underline{tg\alpha = 1}$ $\qquad$ $tg\alpha = \underline{\pm\frac{1}{3}}$ $\qquad$ Отв: $tg\alpha = 1$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$

$tg\alpha = -\frac{1}{3}$

6. $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$g(x) = -32x^2 + 36 - 3$

$f(x)$ - гипербола, одна ветвь $(-\infty; \frac{5}{4})$

другая $(\frac{5}{4}; +\infty)$

$f(\frac{1}{4}) = 3$

$f(1) = 0$

$g(x)$ - пар-ла, ветвями вниз и

вершиной $= \frac{9}{16}$

$\Rightarrow$ необходимые условия (a, b):

$\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases}$

Осталось найти какие из остав-хся пр-х

лежат полностью выше, чем $f(x)$

$\cancel{y}\ ax + b = -4x + 5$

эта прямая проходит $[\frac{1}{4}; 4] \vee [1; 1]$

сравним с $f(x)$

$-4x + 5 - f(x) = \cancel{-4x}\ -4x + 5 - \frac{16x-16}{14x+5} =$

$= 16x^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 10x-x^2 \geq 0 \\ x^2-10x \leq 0 \\ x(x-10) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 10]$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\exists\ y = 10x - x^2$, по ОДЗ $|x^2-10x| = 10x - x^2$

$y + y^{\log_3 4} \geq y^{\log_3 5}$

две ф-ии ↑, одна из них станет > другой в некоторой точке

$\begin{cases} \text{при } y = 1 > y^{\log_3 4} \\ \text{при } y = 9 > y^{\log_3 5} \end{cases}$

таким образом при $y = 9$ ф-ии $=$ т.к.

$9 + 3^{2\log_3 4} = 9 + 16 = 25$

получается, что $y^{\log_3 5} = 25 \Rightarrow$

$y + y^{\log_3 4} \leq y^{\log_3 5} \Rightarrow y \leq 9$

Отв: $x \in [0; 1] \cup [9; 10]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha =$

не меньше 3-х

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$x^2 \sim 26$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha +$

$+$

$\sin 2\alpha$

$-\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$2\alpha(\sin \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos) = \frac{1}{5}$

$2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos$

2.

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-12y)^2 = 2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-24xy+y^2 = 2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \cancel{x^2}-24xy+y^2-2xy+12y+x=6 \\ \cancel{x^2}+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$-24xy-37y^2-2xy+48y+13x=-39$

$-26xy-37y^2+48y+13x+39=0$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$37y^2-48y+26xy-13x = -39$

А первое как

$(x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$y(37y-48)+13x(2y-1)=-39$

$(y+13x)(37y-48)(2y-1)=-39$

Сделаем замену

$$\begin{cases} a = x-6 \\ b = 2y-1 \end{cases}$$

Тогда система перепиш так:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x>4 \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x^2-10x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x>0 \\ x>10 \end{cases}$

0 4 10

$x \in (0;+\infty)$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$a-6b=$

a^2+9b^2 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a-6b \geq 0 \\ a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

6. $\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$ $x \in \left[\frac{1}{4};1\right]$

$\frac{16(x-1)}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

$-32x^2+36x-3=0$

$32x^2-36x-3=0$

~~$D=b^2-4ac=1620$~~

$32x^2-36x-3=0$

$32x(x-1)$ $3(\quad -1)=0$

$\times\,36$
36
216
108
1296
$+\,384$
1680

$\times\,32$
12
64
32
384

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}-x^2-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

$\begin{cases} -x^2+10x+(x^2-10x)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0 \\ x^2-10x \geq 0 \end{cases}$ $x \geq 0$ $x \geq 10$

$\begin{cases} -x^2+10x+(-x^2+10x)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0 \\ x^2-10x<0 \end{cases}$ $x<0$ $x<10$

$\begin{cases} x^2-10x+x^{2(\log_3 4)}-10x^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x<0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

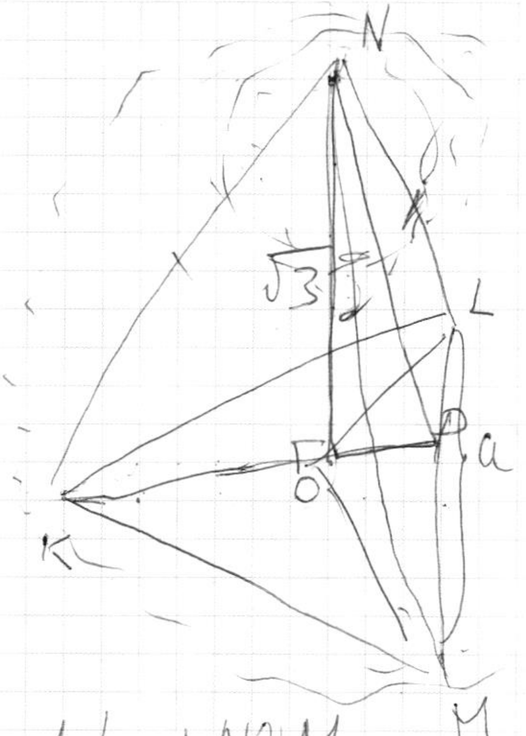
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$KL=3$ $NP=\sqrt{NO^2+OP^2}$

$KM=1$ $\sqrt{3+\frac{3a^2}{6}}$

$MN=\sqrt{2}$ $\frac{18}{6}+\frac{3a^2}{6}$

1) ΔKMO: у него $\angle NOM$ - пр/уг $\Rightarrow$ $KM=1$

$\Rightarrow tg\,90 = \frac{a}{b} = \frac{NO}{OM} = \frac{x}{1}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{1}$

$x=\sqrt{3}$

$\angle d = \angle NOM$

$\frac{18+3a^2}{6} = \frac{3(6+a^2)}{6} = \frac{6+a^2}{2}$ $\cancel{tg\,30} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\frac{a+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

2) $\Delta\,\Delta KLM$ - р/с

$KP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2}{3}$ $= \frac{116}{36}$ $\frac{4}{29}$

$\cancel{(x^2-10x-5)^{\log}}$ $\log_3(10-x^2)$

$\log_3 4 - \log_3(10x-x^2) \geq 0$

$\log_3(4-10x-x^2)=0$

$-x^2-10x+4=0$

$x^2-10x+x^{2(\log_3 4)}$

$x^2-10x+x^{2\log_{3}4}$

$x^2-10x+x^{\log_9 4}$

$-10x^{\log_3 4}-5\log_3 10x-\log_x x^2$

$x^2+10x-4=0$

$D=b^2-4ac=100+16=116$ $= 29\sqrt{2}$

$x_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-10+29\sqrt{2}}{2} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$\frac{32\pm8\sqrt5}{6}$ $4\sqrt5$ $8\sqrt5$ $2\sqrt{20}$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\left(\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+1\right)=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$\sqrt{80}=2\sqrt{20}$ $16=4$ 1680

$\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\alpha=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)+2\pi k$

$\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+1=-\frac{2}{5}$

$\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{7}{5}$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le-32x^2+36x-3$

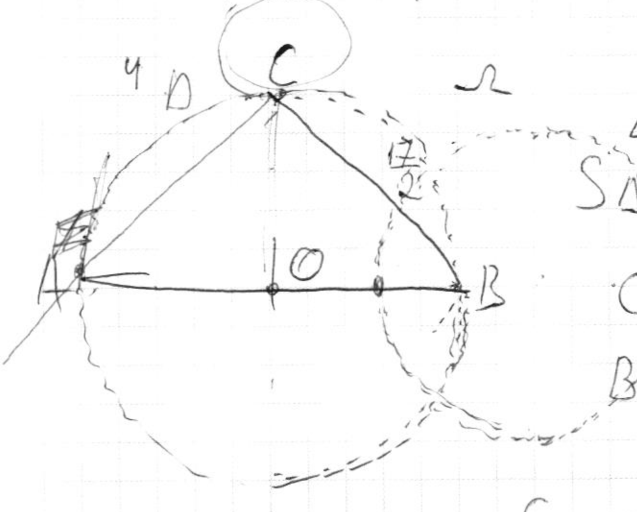
$\frac{16(x+1)}{4x-5}\le ax+b\le-32x^2+36x-3$

$16(x+1)\le ax+b(4x-5)\le$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le-32x^2+36x-3$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$



$\angle AFE=?$

$S_{\triangle AEF}=?$

$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$

$2\le x\le 25$ $2\le y\le 25$

$4y(27y-x)+13(x+2)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$$\begin{cases}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-12y)^2=2xy-12y-x+6\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

$$-\begin{cases}\cancel{x^2}-24y+144y^2-2xy+12y+x=6\\ \cancel{x^2}+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

$108y^2+13x-12y+12y=-39$

$108y^2+13x-2xy+39=0$

$4y(27y-x)+13(x+2)=0$

$144-36=108$

$36-24=12$

$108:4=27$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ (a-4b)(a-9b)=0 \quad (1) \\ a^2+9b^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

Из (1) вытекает, что $\cancel{(6b-4b)(6b-9b)}$ $\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$

, то есть a и b одного знака

два случая

1) $a, b > 0$, тогда $\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=9b$

подставим в (2)

$81b^2+9b^2=90$

$\Leftrightarrow$

$b^2=1 \Leftrightarrow b>0$

$a=9 \rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$

2) $a, b<0$, тогда

$\begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=4b$

подставим в (2)

$16b^2+9b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5} \Leftrightarrow b<0$

$b=-3\sqrt{\cancel{2,5}}$, $a=-12\sqrt{2,5} \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{12\sqrt{10}}{5}+6 \\ y=\frac{1}{2}\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)+1 \end{cases}$

1) Решим систему:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\sin\frac{(4\alpha+4\beta)}{2} \left(\cos 2\beta\right)$

$2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\cos 2\beta\right)$

$-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 1 = \pm 2\cos 2\alpha$

$\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 1 = 4\cos^2 2\alpha = 4 - 4\sin 2\alpha$

$5\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 3 = 0$

$t = \sin 2\alpha$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$\sin 2\alpha = -1 \quad \vee \quad \sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$\cos 2\alpha = 0 \quad \cup \quad \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$

$tg\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

3. $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 10x-x^2 \geq 0 \\ x^2-10x \leq 0 \\ x(x-10) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \{ x \in [0;10]$ по ОДЗ

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\exists\ y = 10x - x^2$, по ОДЗ $|x^2-10x| = 10x-x^2 \Rightarrow$

$y + y^{\log_3 4} \geq y^{\log_3 5}$

две f-ии ↑, одна из них станет > другой в некоторой точке

$\begin{cases} \text{при } y = 1 > y^{\log_3 4} \\ \text{при } y = 9 > y^{\log_3 5} \end{cases} \Rightarrow \{$ в некоторой точк $y^{\log_3 5} > y^{\log_3 4} + y$

таким образо при $y = 9$

f-ия = т.к

$9 + 3^{2\log_3 4} = 9 + 16 = 25$

получается что $y^{\log_3 5} = 25 \Rightarrow$ что,

$y + y^{\log_3 4} \le y^{\log_3 5} \Rightarrow y \le 9$

Учитывая ОДЗ $\begin{cases} [0; 10] \\ 10x - x^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x - x^2 \ge 0$

$x \in [0; 1] \cup [9; 10]$

6 $f(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5}$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$

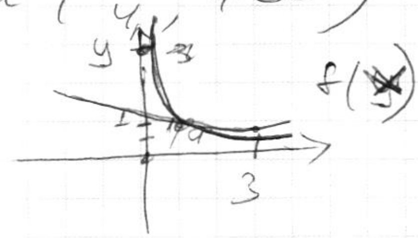
$f(x)$ - ~~гипер~~ гипербола, одна ветвь $(-\infty; \frac{5}{4})$.

другая $(\frac{5}{4}; +\infty)$

$f(\frac{1}{4}) = 3$,

$\Rightarrow$

$f(1) = 0$



$y=3$

$x=1$

$g(x)$ - пар, ветвями вниз и вершиной

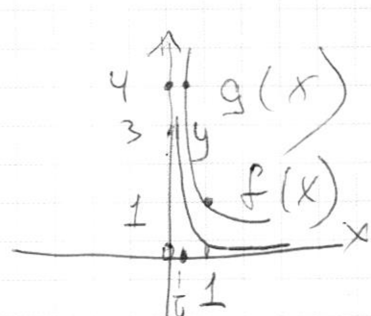
$\left(\frac{36}{64} = \frac{9}{16} \in\right.$

$[\frac{1}{4}; 1]$

осталось найти какие

остав f в лежат

выше $f(x)$



$ax + b = -4x + 5$

эта прям $g(\frac{1}{4}) = 4$

проходит

через точки $g(1) = 1$

$(\frac{1}{4}, 4)(1; \ )$ - и сравним ее $f(x)$

область м/у

дугами

$-4x + 5 - f(x) =$

$\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases}$ необходимые (1) условия на (a, b):

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)