МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(1) $x-2y=(x-2)-2(y-1)$

$xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

(2) $0=x^2+9y^2-4x-18y-12=$

$=x^2-4x+4+(3y)^2-2\cdot 3y\cdot 3+9-25=$

$=(x-2)^2+9(y-1)^2-25 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $x-2=p$; $y-1=q$, тогда имеем систему

$$\begin{cases} p-2q=\sqrt{pq} & (3) \\ p^2+9q^2=25 \end{cases}$$ ОДЗ: $p-2q\geq 0$

$pq\geq 0$

(3) $(p-2q)^2=pq$; $p^2-4pq+4q^2-pq=0$

$p^2-5pq+4q^2=0$

$D=25q^2-16q^2=9q^2$

$p_1=\frac{5q+3q}{2}=4q$

$p_2=\frac{5q-3q}{2}=q$

1) $p=4q$; $16q^2+9q^2=25$

$q^2=1$; $q=\pm 1$.

$p=\pm 4 \Leftrightarrow (4;1),(-4;-1)$,

но $-4+2<0 \Rightarrow$ имеем только $(4;1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2) $p = q$

$p^2 + 9q^2 = 10q^2 = 25$

$q^2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{5}{2}};\ p = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, т.е. имеем

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$ явно $< 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ не

подходит.

$-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{\frac{5}{2}} > 0$ и

$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) > 0 \Rightarrow$ т.к. $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ подходит.

Тогда имеем $x_1 = 4 + 2 = 6$ и $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} + 2 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}$

$y_1 = 1 + 1 = 2$ и $y_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $(6; 2)$ и $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \Leftrightarrow$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

Пусть $x^2+18x=t$. Тогда

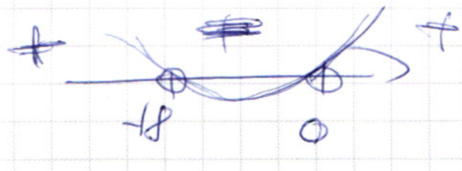
$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

~~Заметим~~ Заметим что $x^2+18x>0$, т.к. это значение логарифмируется $\Rightarrow$ $|t|=t$

1) ~~$t\geq 0$~~

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$



~~$t=5^{\log_5 t}$~~

~~$\frac{5^{\log_{12}t}\cdot 12^{\log_{12}t}}{5^{\log_{12}t}}+\frac{t\cdot t}{5^{\log_{12}t}}$~~

$$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13}-t \;;\; \log_{12}t=p \;,\; t=12^p; \; p\in R$$

$$5^p+12^p \geq \left(12^{\log_{12}13}\right)^p=13^p$$

$f(p)=5^p+12^p-13^p$; $f'(p)=5\ln p+12\ln p-13\ln p=4\ln p \Rightarrow$

~~$f(p)$ - возрастает и при $p\geq 2$ выпол-~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~нячем всегда, т.к~~ $f(2)=0$

~~=> При p~~ $\cancel{\leq 0}$

Отсюда $p \leq 2$, тогда

$\log_{12} t \leq 2 = \log_{12} 144 \Rightarrow$

$t \leq 144$, т.е

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$D = 18^2 + 4 \cdot 12^2 =$

$= 9^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 12^2 =$

$= 3^2 \cdot 2^2 (3^2 + 2^2 \cdot 2^2) =$

$= 6^2 \cdot 5^2 = 30^2 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-18+30}{2} = 6$

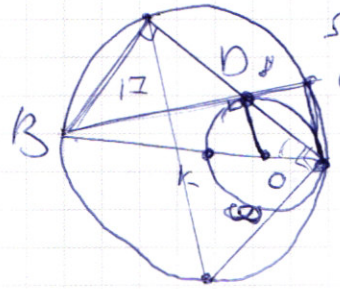
$x_2 = \frac{-18-30}{2} = -24$, т.е

$x \in [-24; 6]$

Ответ: $x \in [-24; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) 1) $\angle BDO = 90^\circ$, т.к BD - касат, а OD - радиус.

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к BA - диам $\Rightarrow$

$OD \parallel CA$ и $\triangle BDO \sim \triangle BCA$, то

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA} \Leftrightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R - r}{2R},$$ где

R - рад. большой окр, а r - радиус малой.

2) По свойству степени т. имеем $BD^2 = BK \cdot BA \Leftrightarrow$

$$17^2 = (2R - 2r)\,2R.$$

3) $$\begin{cases} 34R = 50R - 25r \Leftrightarrow 25r = 16R; \quad r = \frac{16}{25}R \\ 17^2 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$$17^2 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R = 4R^2 - \frac{64}{25}R^2 =$$

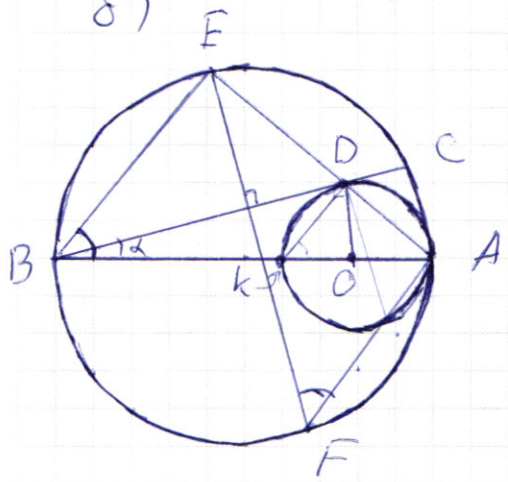
$$= \frac{100 - 64}{25}R^2 = \frac{36}{25}R^2,$$

$$17 = \frac{6}{5}R; \quad R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$r = \frac{85}{6} \cdot \frac{16}{25} = \frac{17 \cdot \cancel{5} \cdot 8 \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{5}} = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

4) $\angle$ ~~EBA~~ =

б)



$$OB = 2R - r = 2\cdot\frac{85}{\cancel{6}_3} - \frac{136}{15} = \frac{85\cdot 5 - 136}{15} = \frac{400+25-136}{15} = \frac{264+25}{15} = \frac{289}{15}$$

$$Ok = \frac{289}{15} - \frac{136}{15} = \frac{153}{15}$$

т.к $\angle BDO = 90^\circ$, то

$$\cos\angle DBO = \cos\alpha = \frac{289}{15}\cdot\frac{1}{17} = \frac{17}{15},$$

~~по т.~~ $$\sin\alpha = \frac{BO}{OD} = \frac{289}{15}\cdot\frac{15}{136} = \frac{289}{136} = \frac{17^2}{8\cdot 17} = \frac{17}{8}$$

по т. синусов $\frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin\angle BKD} \Rightarrow$

~~sin∠ ∠DKA∠~~

$$\sin\angle DKA = \sin\angle BKD = \frac{BD\cdot\sin\alpha}{BO} = \frac{17\cdot\frac{17}{8}}{289}\cdot 15 = \frac{15}{8}$$

$\angle DKA = \angle EBA$, т.к со н-го гомотетичн с центром в т. A

$\angle EBA = \angle EFA$, т.к они опир. на одну дугу $\Rightarrow$

$$\angle EFA = \arcsin\frac{15}{8}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

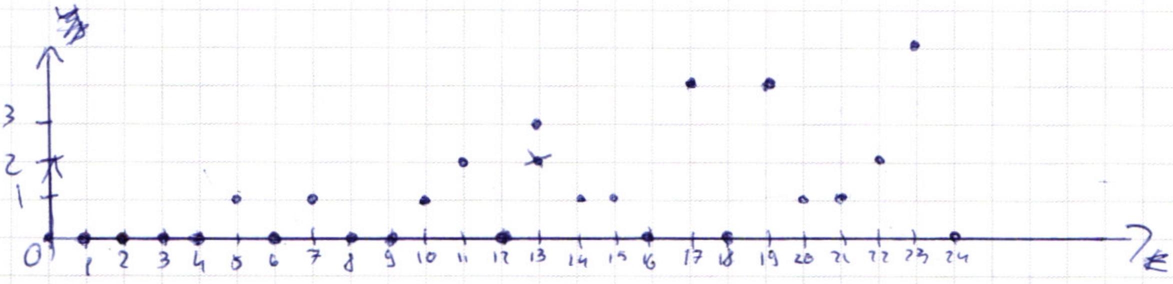
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



Для начала определим значение $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$ и $x \in [1; 24]$. Первым делом находим НТ f от простых чисел

Теперь имеем следующие ~~права~~

$$f(2) = f(1) + f(2)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\cancel{f(4)} \quad f(6) = f(2) + f(3) = 0$$

$$f(12) = f(3) + f(4) = 0$$

$$f(2) = f(6) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \text{ откуда}$$

$$f(4) = f(12) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \quad \text{и т.д.}$$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 1$$

В итоге получаем следующие значения

Далее $f(1) = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{k}\right) = -f(k)$

Т.е. не нулевые значения $f\left(\frac{1}{k}\right)$ имеют $f\left(\frac{1}{5}\right)$, $f\left(\frac{1}{7}\right)$, $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f\left(\frac{1}{11}\right)$, $f\left(\frac{1}{13}\right)$, $f\left(\frac{1}{14}\right)$; $f\left(\frac{1}{15}\right)$; $f\left(\frac{1}{17}\right)$, $f\left(\frac{1}{19}\right)$, $f\left(\frac{1}{20}\right)$, $f\left(\frac{1}{21}\right)$, $f\left(\frac{1}{22}\right)$, $f\left(\frac{1}{23}\right)$. Причем каждое из этих чисел < 0 (т.к. $f(n) \geq 0$), где $n \in \mathbb{N}$, $n \in [1; 24]$)

чтобы получить $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, надо
взять $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$, т.е
$$f\left(\frac{1}{y}\right) < -f(x).$$

Т.е алгоритм следующий: берём
$1 \le a \le 24$ и такую точку b, что
$$f(b) < f(a), \text{ тогда}$$
$$f(b) < f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right).$$
Если $f(a) = 1$, то $f(b)$ может взять
11 способами (все b, где $f(b) = 0 \cancel{\lor 1}$)
$f(a)$ не может взять 7 способами
и так далее. В итоге имеем

$$\sum = 7 \cdot 11 + 2 \cdot 18 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 23 =$$
$$= 77 + 36 + 20 + 42 + 23 =$$
$$= 100 + 56 + 42 = 198$$

Ответ: 198 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

Горизонт. асимп.: $y=3$

Вертикальная: $4x = -\frac{3}{4}$

Строим по нескольким точкам график

x	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{7}{8}$
y	2.5	2	1	-1

и симметрично при $x > -\frac{3}{4}$

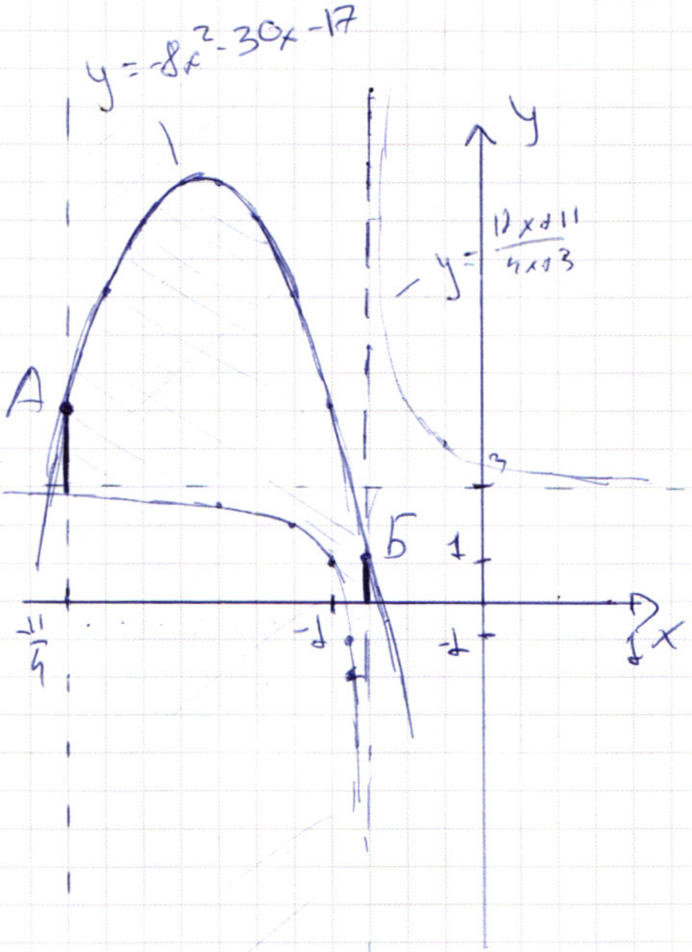
~~Не~~ так же имеем

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

Строим $y = -8x^2 - 30x - 17$

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

x	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{8}{4}$	$-\frac{7.5}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{6}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$
y	5	10	11	$11\frac{1}{8}$	11	10	5	1



Имеем, что на штрихован. участке прямая проходит под параб. и над гиперболой (это двойная штрих. область). При чем неравенств выполняется

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) при любом $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$ =>

прямая $y = ax + b$ проходит

через жирный отрезок, иначе

прямая пересекает график и условие

не выполняется.

Пусть прямая проходит через точки

$A\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $Б\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, т.е

$5 = -a\frac{11}{4} + b$ $\quad 4 = a\left(\cdot\frac{3}{4} - \frac{11}{4}\right) = -\frac{8}{4}a = -2a,$

$1 = -a\cdot\frac{3}{4} + b;$

$a = -2; \; b =$

$5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$, т.е

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}.$

$0 = 2x + \frac{7}{2} + \frac{2}{4x+3} = \frac{\left(2x + \frac{7}{2}\right)(4x+3) + 2}{4x+3} =$

$= \frac{8x^2 + 14x + 6x + \frac{21}{2} + 2}{4x+3} =$

$= \frac{8x^2 + 20x + \frac{25}{2}}{4x+3} = \frac{2\left(4x^2 + 10x + \frac{25}{4}\right)}{4x+3} =$

$= \frac{2\left(2x + \frac{5}{2}\right)^2}{4x+3} = 0$, т.е только 1 решение => $-2x - \frac{1}{2}$

касается гиперболы. Если хоть одна точка А

или Б будет ниже, то прямая будет пересекать гиперболу

и нестрогое неравенство не будет выполнено => или

$a = -2; \; b = -\frac{1}{2}$. Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ - точно нельзя сказать

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} = -\cos^2(2\alpha+2\beta)$

$\cancel{tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta +$

$+\sin 2\alpha =$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

пусть $\sin 2\alpha = a$; $\cos 2\alpha = b$; $\sin 2\beta = c$; $\cos 2\beta = d$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5}}b + \frac{2}{\sqrt{5}}c + a = -\frac{4}{5} \\ ad + bc = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12} t} = \cancel{12} \quad \frac{5\cdot 12}{12} =$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} \cdot 12^{\log_{12} t} =$$

$$= t \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} = t^{\log_{12} 13} - t$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} = t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1$$

$$\times\begin{array}{r} 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 97 \end{array}$$

$$\log_{12} t = p$$

$$t = 12^p$$

$$\times\begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ +125 \\ \hline 1853 \end{array}$$

$$5^p \cancel{+} 12^p \geq 12^{p \cdot \log_{12} 13} =$$

$$= 13^p$$

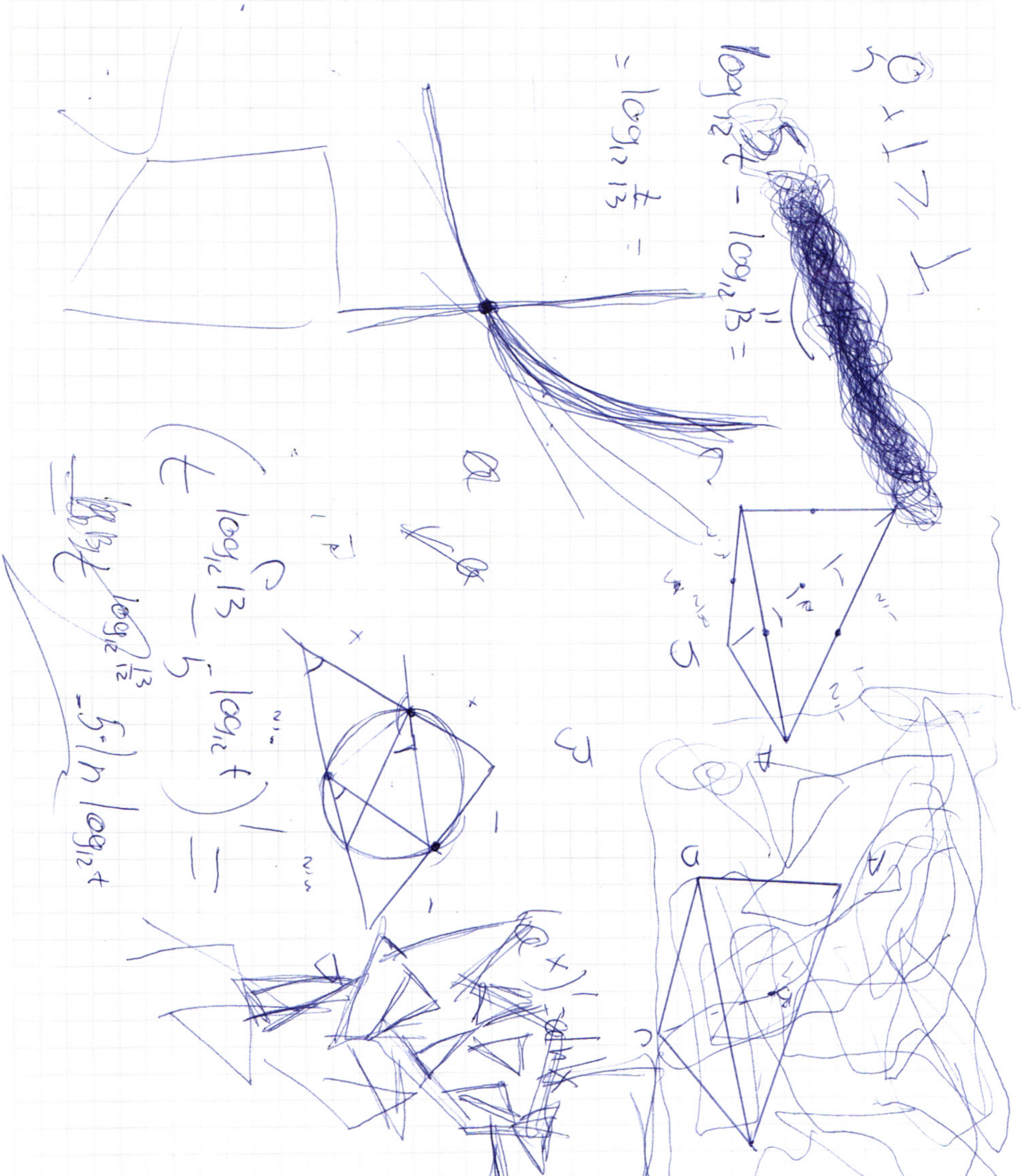
$$\frac{1}{5p} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} =$$

$125 +$

~~sin2α~~

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(5P) = 5 \cdot 1np \cdot + 12\,1np$

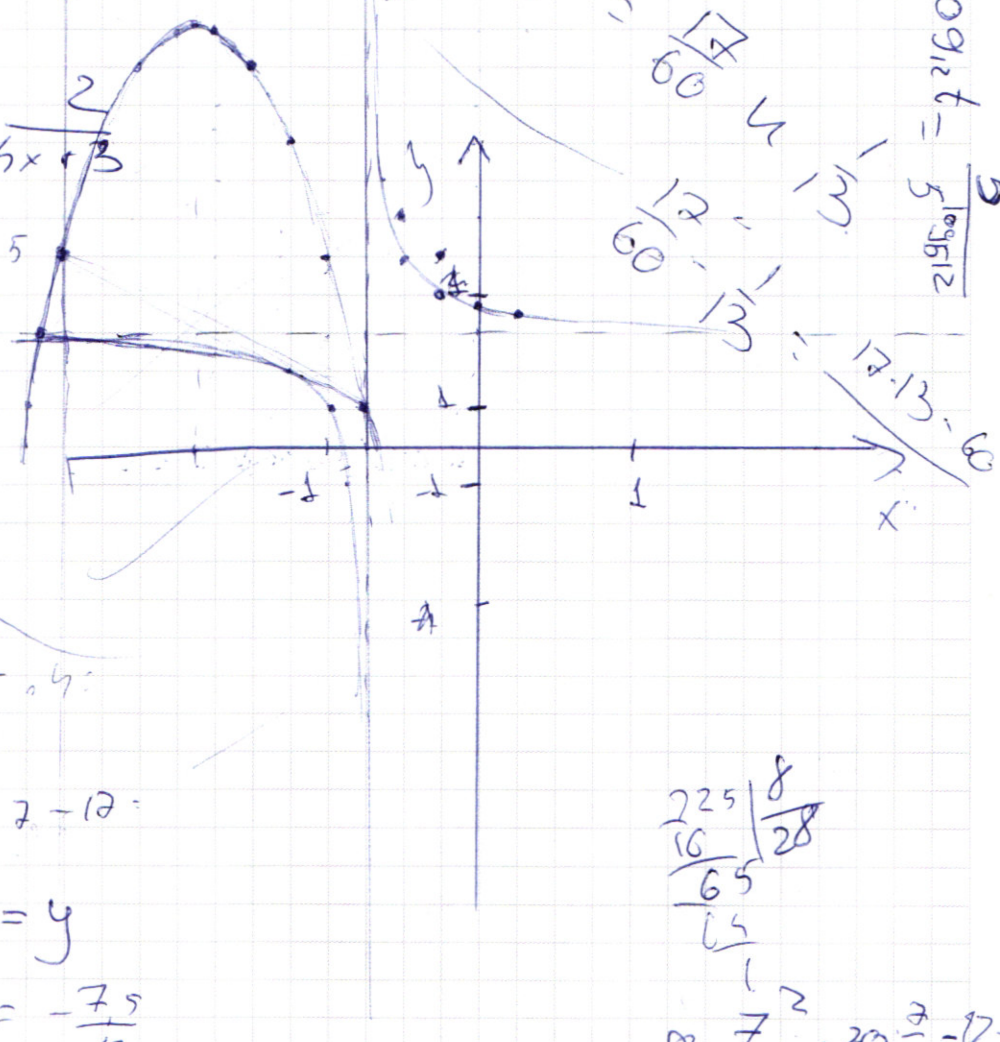
$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17 = 17\,1np.$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12+9}{60} \quad 4x+3 \neq 0 \quad x \neq -\frac{3}{4}$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} =$

$= 3 + \frac{2}{4x+3}$

$-\frac{3}{2}$



$-8 \cdot 7^2 + 30 \cdot 7 - 17 =$

$= -56 \cdot 7 - 30 \cdot 7 - 17 =$

$= \cancel{-7 \cdot 86 - 17} =$

$= -26 \cdot 7 - 17 =$

$-8x^2 - 30x - 17 = y$

$x_B = \frac{30}{16} = \frac{15}{-8} = -\frac{7{,}5}{4}$

$y_B = -\frac{8 \cdot 225}{64} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 =$

$= \frac{30 \cdot 15 - 15 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{15 \cdot 15}{8} - 17 =$

$-\frac{7}{4}$

$= \frac{225}{8} - 17 = 28\frac{1}{8} - 17 =$

$= 11\frac{1}{8}$

$=$

$\frac{225}{16} \Big| \frac{8}{28}$ $\quad 65 \quad 64 \quad 1$

$-8 \cdot \frac{7^2}{16} + 30 \cdot \frac{7}{4} - 17 =$

$= -\frac{14 \cdot 7}{4} + \frac{30 \cdot 7}{4} - 17$

$= \frac{7 \cdot 16}{4} - 17$

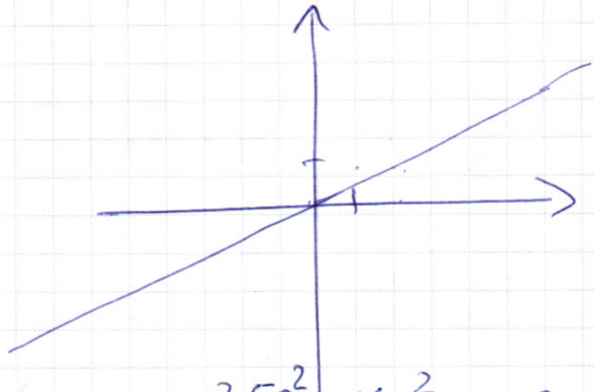
☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\cancel{x^2+9y^2=}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$



1) $x-2y\geqslant 0$

$\cancel{y\geqslant y}$ $x\geqslant 2y$

$y\leq \frac{1}{2}x$

$D=25p^2-16p^2=9p^2$

$t_1=\frac{5p+3p}{2}=4p$

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$t_2=p$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$t=4p$

$t=p$

$x^2+x\cancel{x}-5xy+2y+4y^2-2=0$

$x(x-y)+x+2y+4y(y-x)-2=0$

$\cancel{x(x-y+1)+2y(2y-2x+y)}-1=0$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=(x-2y)^2$

$x^2-4x+4+9y^2-2\cdot 3y\cdot 3+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x-2=t$ $\quad t^2+9p^2=5^2$

$y-1=p$ $\quad \sqrt{tp}=$

$tp\geq 0$

$t-2p\geq 0$

$x-2y=x-2-2(y-1)=(t-2p)^2$

$\begin{cases} tp=(t-2p)^2=t^2+4p^2-4tp \\ t^2+9p^2=25 \end{cases}$

$\cancel{5tp}$ $\begin{cases} t^2-5tp+4p^2=0 \\ t^2+9p^2=25 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} =$

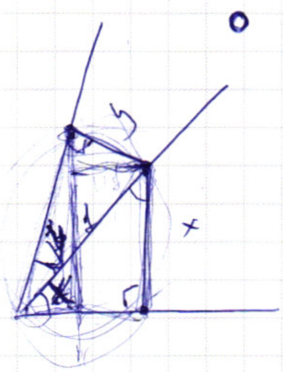
$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cancel{\sin(2\alpha + 4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha =}$

$\cancel{= 2\,[\ \sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$2\alpha = x;\ 2\beta = y$

$\sin(\alpha+2\beta) = \sin$



$\sin x = \frac{x}{1}$

$\sin y = y$

$\sin x+y = h$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = t$ $\qquad t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$ $\qquad \log_{12}13 = \frac{\log_5 13}{\log}$

1) $t \geq 0$

$x^2+18x \geq 0$ $\qquad + \quad - \quad +$ $\quad -18 \quad 0$

$x \in (-\infty; -18] \cup [0; +\infty)$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $\qquad \log_{12}13 = \frac{m}{n}$

$5^{\log_{12}t}$ $\qquad \log_{12}13 - t =$ $\qquad \log_{12}13 = \frac{\log_{13}13}{\log_{13}12} = \frac{1}{\log_{13}12} = \frac{m}{n}.$

$= \log_{12}13 - \log_{12}12 =$

$= t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - t$ $\qquad 12^{\frac{m}{n}} = 13$

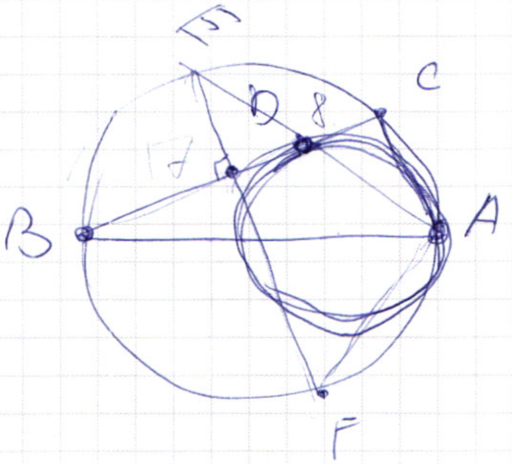
$\cancel{5^{\log_3 t}}$ $\qquad \sqrt[n]{12^m} = 13$

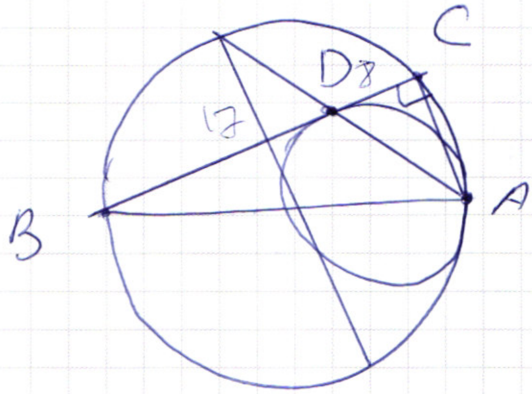
$\log_{12}t = \frac{\log_5 t}{\log_5 12}$ $\qquad 12^m = 13^n$

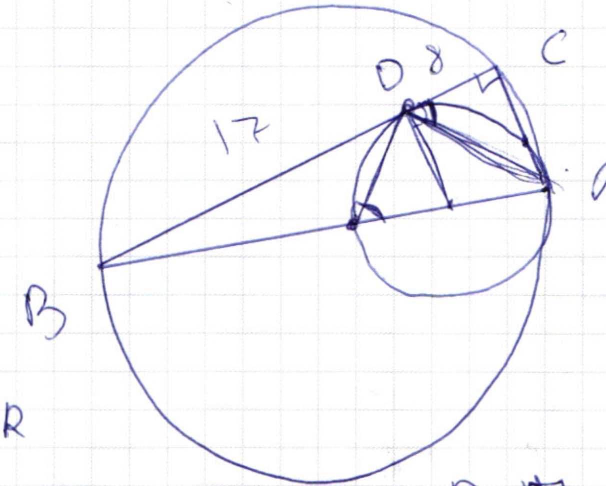
$\sqrt[\log_5 12]{t} + t = t^{\log_{12}13}$ $\qquad \log_{12}\frac{13}{12}$ $\qquad \log_{12}13 = \frac{\log_t 13}{\log_t 12}$

$\sqrt[\log_5 12]{t} = t(t^{\log_{12}13-1} - 1) = t$ $\qquad = \sqrt[\log_t 12]{13}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)







$50R - 25r = 34R$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16} r$

$\frac{D - \cancel{d}}{D} = \frac{17}{25}$

$\frac{D - \cancel{2d}}{17} = \frac{17}{r}$

$2Rr - 2r^2 = 17^2$

$\frac{50}{16} r^2 - 2r^2 = 17^2$

$$\begin{cases} \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{25} \\ \frac{2R - 2r}{17} = \frac{17}{r} \end{cases}$$

$\frac{50 - 32}{16} r^2 = 17^2$

$\frac{18}{16} r^2 = 17^2$

$r = \frac{17 \cdot 4}{\sqrt{18}} =$

$\cancel{136 \,|\, 17}$

8

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1\cdot 2) = f(1) + f(2) \Rightarrow$

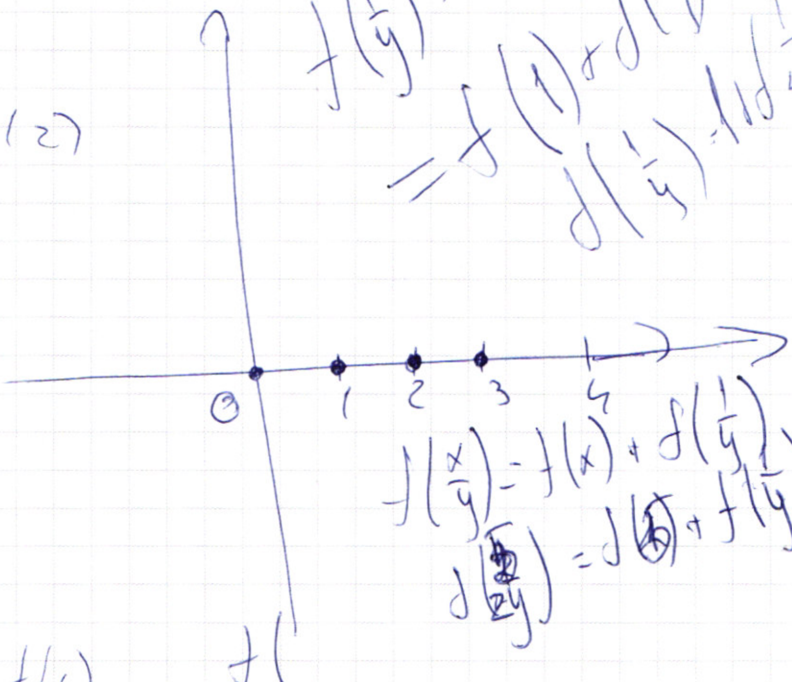
$f(1) = 0$

$f(2\cdot 3) = f(\ ) + f(2)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{54}\right) =$

$= f(1) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{54}\right)$



$f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{2}{24}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(2) = \frac{2}{2}$

$f(4\cdot 2) = f(2)\ f(4)$

$f(10) = f(5) + f(2)$

$f(2) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(3\cdot 2) = f(2) + f(3)$

$f(2\cdot 6) = f(2) + f($

$f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(12) = f(3) + f(4)$

$f(4) = f(1) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f(9) = f(18) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f(1)$

$f(4) = f(12) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

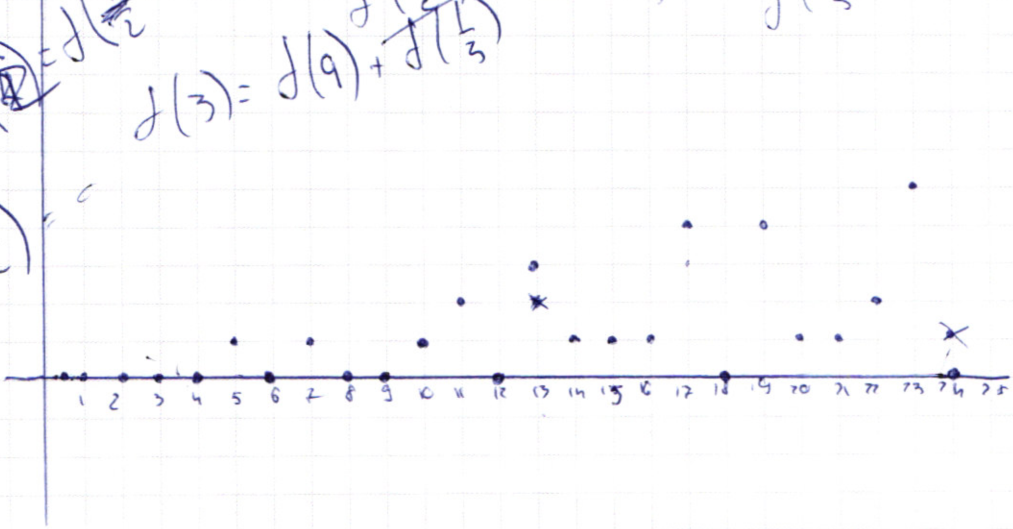
$f(4) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(3) = f(9) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f(1) = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-8\cdot\frac{9}{4}+30\cdot\frac{3}{2}-17=$

$-8+30-17=$

$=-18+45-17=$

$=$

$-\frac{3}{4}$

$-8\cdot\frac{25}{16}+30\cdot\frac{5}{4}-17=$

$-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17=$

$=-\frac{25}{2}+\cancel{30}\frac{15\cdot5}{2}-17=$

$=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$

$=\frac{15\cdot5-25}{2}-17=8$

$=\frac{36}{2}-17=$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)