МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

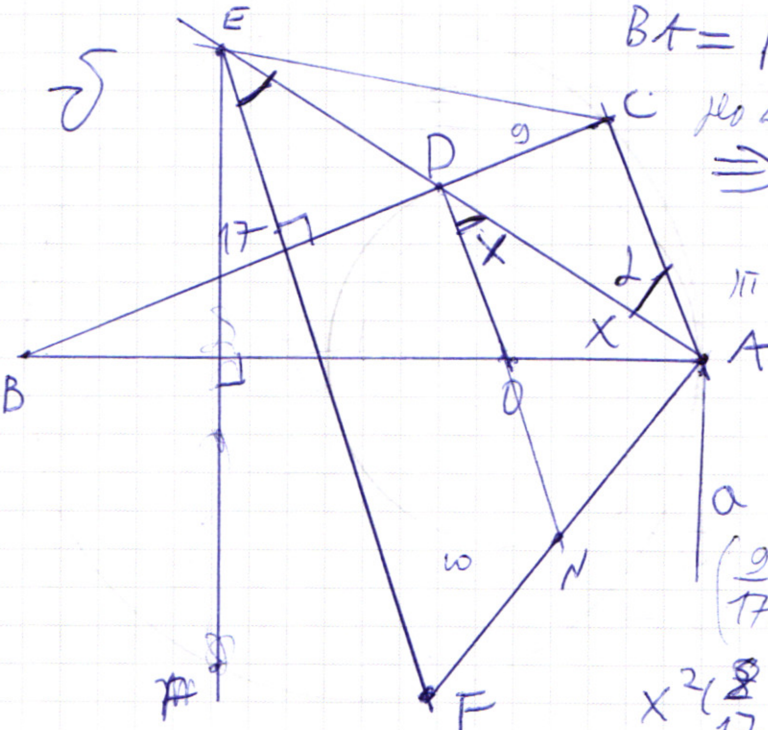
7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$OD = x$ – O - центр окр-ти ω, $BO = \sqrt{x^2+17^2}$; тогда

$BA = \sqrt{x^2+289} + x$



по $\triangle ABZ \sim \triangle OBD$ ($OD \parallel AC \perp BC$)

$\Rightarrow AB = OB \cdot \frac{26}{17}$

т.о $\sqrt{x^2+289} + x = \sqrt{x^2+289} \cdot \frac{26}{17}$

$\frac{9}{17}\sqrt{x^2+289} = x$

$\left(\frac{9}{17}\right)^2(x^2+289) = x^2$

$x^2\left(\frac{8}{17} \cdot \frac{26}{17}\right) = 81$

$x^2 = \frac{81 \cdot 17^2}{8 \cdot 26} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 17}{4\sqrt{13}}$ $\quad AB = OA \cdot \frac{26}{9} = \frac{26 \cdot 17}{4\sqrt{13}} = \frac{17\sqrt{13}}{2}$

$R = \frac{17\sqrt{13}}{4}$

$AC \parallel EF \perp BC \Rightarrow ACEF$ вписанная р/б трапеция

$\Rightarrow AF = CE$; $\angle EAC = \angle AEF$. $DO = x \cdot \frac{26}{17} = \frac{9 \cdot 26}{4\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ (?)

(3) $\cos\alpha = \sqrt{\frac{13}{17}}$ $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{17}}$. Заметим, что $\angle AND = \alpha \rightarrow DN \parallel EF$

$\Rightarrow$ ~~гомотетия с центром~~ в A $\triangle FEA \sim \triangle NDA \Rightarrow \angle EAF = 90°$(!)

$EF = AB = \frac{17\sqrt{13}}{2}$, $\quad S(AEF) = \frac{1}{2} EF^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17^2 \cdot 13}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = \frac{221\sqrt{13}}{4}$

№5

$f(\frac{a}{b}) + f(b) = f(a) \Rightarrow f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$

$f(1)<0$, если a и b — простые, то

$\frac{a}{b} < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) \le 0$ Простые доступные:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

Тогда наши отношения $\frac{x}{y}$ могут быть только отношения тех простых чисел,

$(\frac{2}{5}) \dots \frac{2}{23}$; $\frac{3}{5}; \dots \frac{3}{23}$; $\frac{5}{11}; \dots \frac{5}{23}$; $\frac{7}{11} \dots \frac{7}{23}$;

Ч.Т.Д. посчитаем все пары так: если знаменатель ≥ 12, таких знаменателей 4, то таких отношений по 1 штуке, т.к. числитель и зн-тель дроби не 2+ мы введем эти числа:

$(8 + 6 + \cancel{8}6 + 4) \cdot 1 = 24$

Всего 11 в зн-теле, числитель и зн-тель дробь может быть делима на 2, а т.к. числитель с зн-лем, то все ок (!).

для 11 $2 \cdot 4 = 8$

для семерок можем домножить на 3: $7 \cdot 3 = 21 \le 21$

$\Rightarrow$ 3 пары каждого простого отношения: всего $3 \cdot 2 = 6$

для 5 $5 \cdot 4 = 20$; $5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow$ 4 пары ч. отношений

всего $x; y$: таких $4 \cdot 2 = 8$

Итого:

$8 + 6 + 8 + 24 = 42$

Ответ: 42

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$$

$x^2+18x = t$; $t>0$ по ОДЗ

$$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13} \quad \Big| : t \text{ (можно, т.к } t>0)$$

$\cancel{1 + t^{\log_{12}5-1} \geq t^{\log_{12}13-1}}$; $\cancel{1 + t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq t^{\log_{12}\ldots}}$

т.к $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, т.о.

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t} \quad \Big/ \ 13^{\log_{12}t}$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t} \geq 1$$

Чем больше логарифм, тем меньше левая часть и наоборот. При $\log_{12}t = 2$ выполняется равенство, т.к. слева ф-ция монотонно убывает, то это ед. корень ур-я, т.к правая часть меньше, то т.к левая часть больше, то логарифм меньше, т.е

$$\log_{12}t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 144$$

$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$

-24 $\quad -18$ $\quad 0$ $\quad 6$

$-24 \leq x < -18$

$0 < x \leq 6$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

$x-2=a;\ y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+3b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (\sqrt{a}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=0 \ (1) \Rightarrow \\ a^2+(3b)^2=25 \quad (2) \end{array}$$

если $a=b=0$, то (2) очев. не выполняется $\rightarrow$

$\sqrt{a}=2\sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ a=4b \end{cases} \Rightarrow a=4b$

$$\begin{cases} (4b)^2+(3b)^2=25 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=1 \\ b>0 \end{cases} \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=4$$

Ответ $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}$ Ответ: $\{6; 2\}$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{array}$$

$1-\frac{2^3}{5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha-4\cos(4\beta+4\alpha)\sin 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha-4\cdot\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)=\pm\frac{4}{5}$

1) $\frac{4}{5}\cos 2\alpha-\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$

$2\cos 2\alpha+\frac{2}{5}\sin 2\alpha=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha=1 \\ \cos 2\alpha=-1 \end{array}\right.$

2) $-2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=2$

$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=1 \Rightarrow tg\,\alpha=0$

$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1 \Rightarrow tg^2\alpha=\pm 1$

Ответ: $(0; \pm 1)$

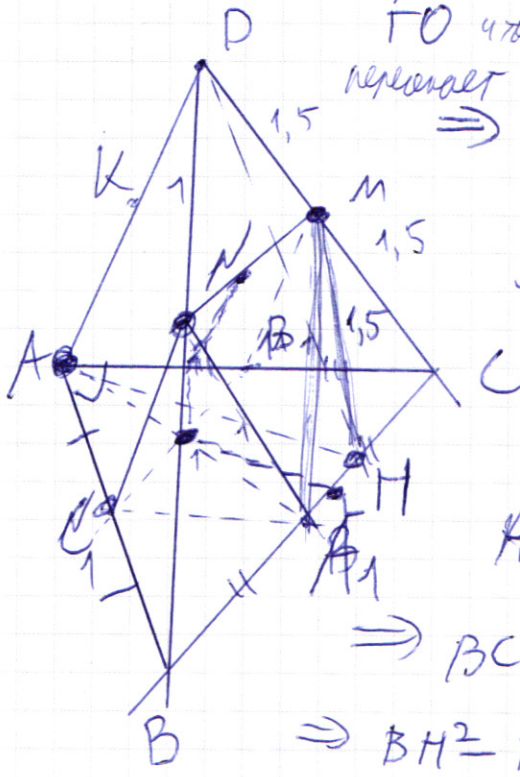
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

1) ; $A_1; B_1; C_1; M; N; K$ — середины $BC; AC; AB; CD; BD; AD$ соот.
Тогда т.к. C_1NMB_1 параллелограмм, то четыре его лежат в 1 пл-ти, которая пересекает сферу по окр-ти ⇒ C_1NMB_1 вписан ⇒
⇒ C_1NMB_1 прямоугольник ⇒
$BC \perp AD$ (!)



Аналогичное рассуждение для параллелограмма $AB_1A_1C_1$, тогда тоже прямоугольник ⇒
⇒ $AB \perp AC$ (!)

$AH \perp BC$, тогда $\left| \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{array} \right. \Rightarrow$
$\Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow DH \perp BC \Rightarrow$
$\Rightarrow BH^2 - HC^2 = BD^2 - DC^2$

Пусть $BC = x$ тогда $AC^2 = x^2 - 1$;
Тогда $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{1}{x}$; $CH = \frac{x^2-1}{x} = \frac{AC^2}{BC}$ (по св-ву высоты прямоуг. Δ-ка ABC)

$BH^2 - CH^2 = \frac{1}{x^2} - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4 - 9$

$\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2} + 2 = -5 \Rightarrow x = \sqrt{7}$

2) $AC = \sqrt{6}$; $H \in$ сфере (!): $AA_1 \cap BC = O_1$; $OO_1 \perp (ABC)$
т.к. O_1 - центр прямоугольника $A D$, но $O_1H = O_1A_1$ т.к. ΔAHA_1 прямоуг. O_1 - середина ⇒ $OH = OA_1$

№ 7 пр-е

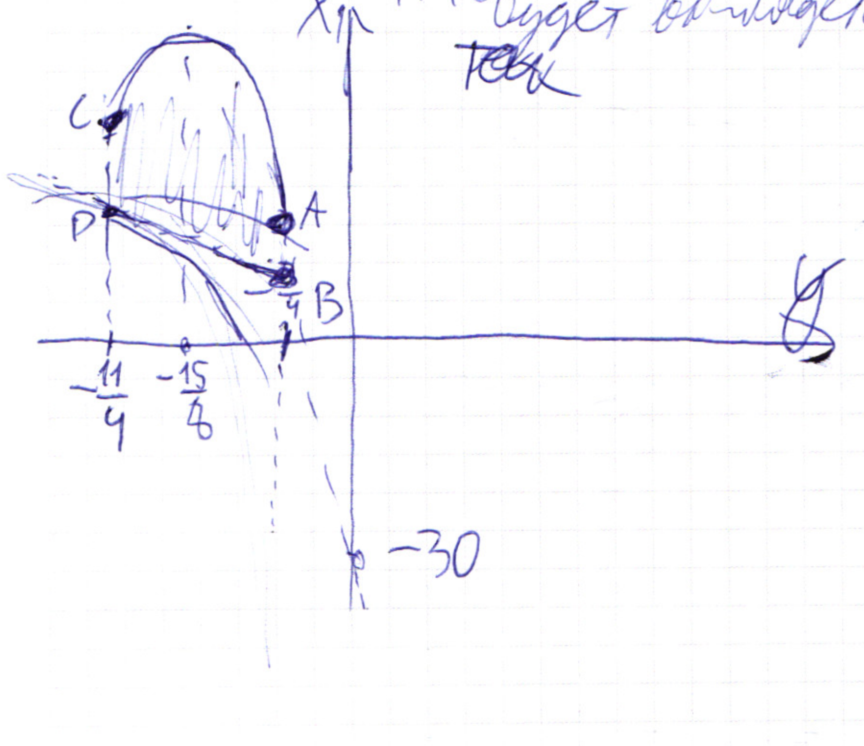
$BH = \frac{1}{\sqrt{7}}$ $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Ответ: ~~раз~~ $BC = \sqrt{7}$

№ 6

$x = -\frac{11}{4}$ $\frac{-33+11}{-11+35} \le -140$

будет выглядеть картинка примерно ~~так~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 $BC = BD - CD = 17 - 8 = 9$

R - радиус Ω; r - радиус ω

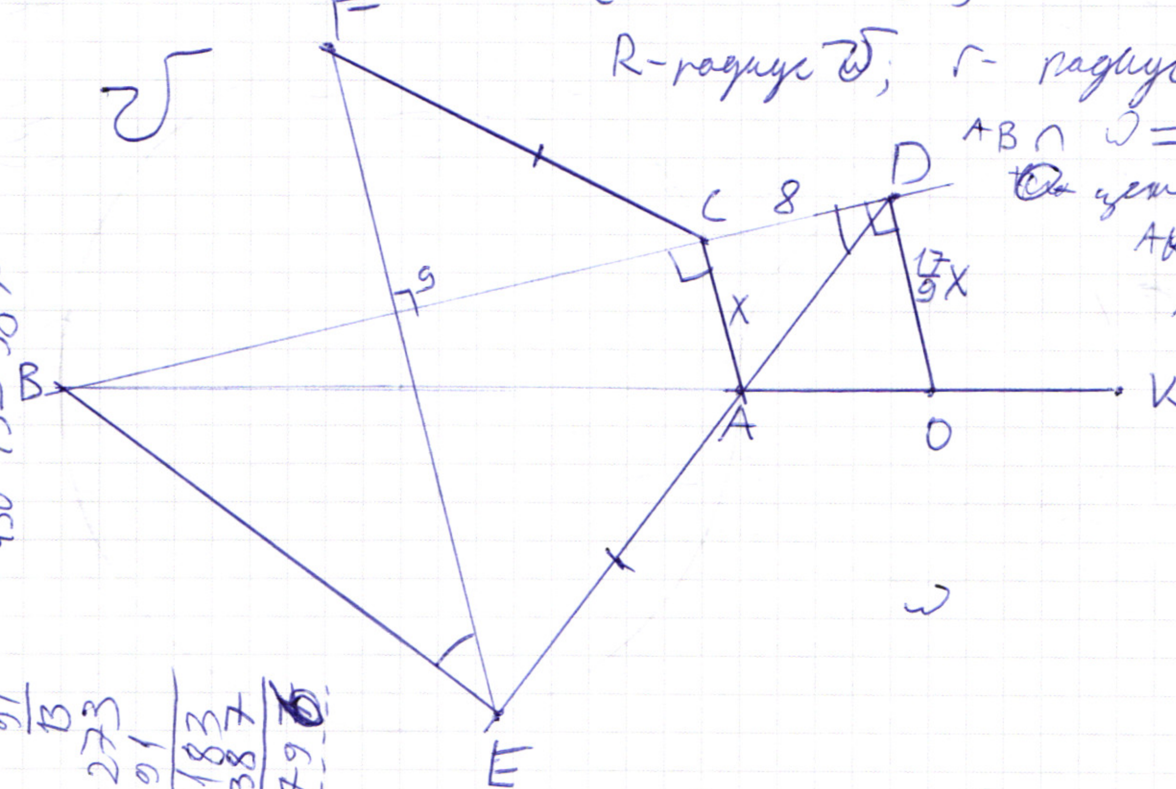
$AB \cap \omega = K$

O - центр ω.

AK - диаметр

$AK = 2r$

$AB = 2R$



$430 - 43 = 387$

91 · 13: 273, 91, 1183; 387 | 79

$4R(R+r)$

Тогда т.к. BD - касательная, то $BD^2 = BA \cdot BK$: $17^2 = 2R(2R+2r)$ (1)

$AC = x$. Тогда по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = x^2 + 81$ (2)

DO - радиус, ⊥ касательной BD: $\triangle ABC \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{9}$

$r = \frac{17}{9}x$; Тогда из (1) и (2) $17^2 = \cancel{4}\sqrt{x^2+81}\left(\sqrt{x^2+81} + \frac{17}{9}x\right)$

$17^2 = 4x^2 + 324 + 4\sqrt{x^2+81} \cdot \frac{17}{9}x \Leftrightarrow$

$52 - 17 = 35$

$52 + 17 = 69$

$70 \cdot 69 \cdot 4 = 280 \cdot 69$

$1 + 9 = 4 + 6$

$x^4\left(4^2 - \left(\frac{39}{13}\right)^2\right) = x^4\left(\frac{(52-39)(52+39)}{13^2}\right.$ −

$= \frac{18 \cdot 86}{13^2}$

$\frac{(91 \cdot 13 - 9 \cdot 43)(91 \cdot 13 + 9 \cdot 43)}{13^2} =$

$\frac{17}{9} \cdot \left(\frac{9 \cdot 43}{13}\right)^2 =$

$91^2 \cdot \cancel{5} \cdot \frac{120 \cdot (9 \cdot 43)^2}{13^2} = 91^2 + \left(\frac{11 \cdot 9 \cdot 43}{13}\right)^2$

$\frac{69}{28}$

$\frac{90}{13}$;

$\frac{26^2}{13^2} = 4 \cdot 35^{-2}$

$289 \cdot 2 - 430 + 43 =$

$= 578 - 430 + 43 =$

$= 48 + 43 = 91$

$9 \cdot 44$

$D = \frac{(91 \cdot 91 \cdot 13)^2}{13^2} - 90 \cdot 9 \cdot 43$

$81 + 144 = 225$

$-9 + 15 = 6$

$x - 2y$

$81 \cdot 81$, 698, 6561

$9 + 12 + 4 =$

$x - 2 = a$

$y - 1 = b$

$a - 2b = x - 2y$

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$91 \cdot 91$, 91, 91, 819, 8281

$8281 - 90 \cdot 13$

$91^2 + \frac{90}{13}\left(\frac{9}{43} \cdot 43\right)^2$

$\frac{\quad}{13}$

$a^2 + 3b^2 = 25$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{13}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) +$

$= 2\cos^2 2\alpha \quad 4 \sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{4}{5}$

$15^2 - 221$

$-\frac{\cos 4\beta}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5} + \cos 2\beta \sin^2 2\alpha$

$\cos 2\beta\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{5}$

$\sin(4\alpha + 4\beta) - \sin 2\alpha =$

$= \sin(4\alpha + 4\beta)\cos 2\alpha - \cos(4\alpha + 4\beta)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{4}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

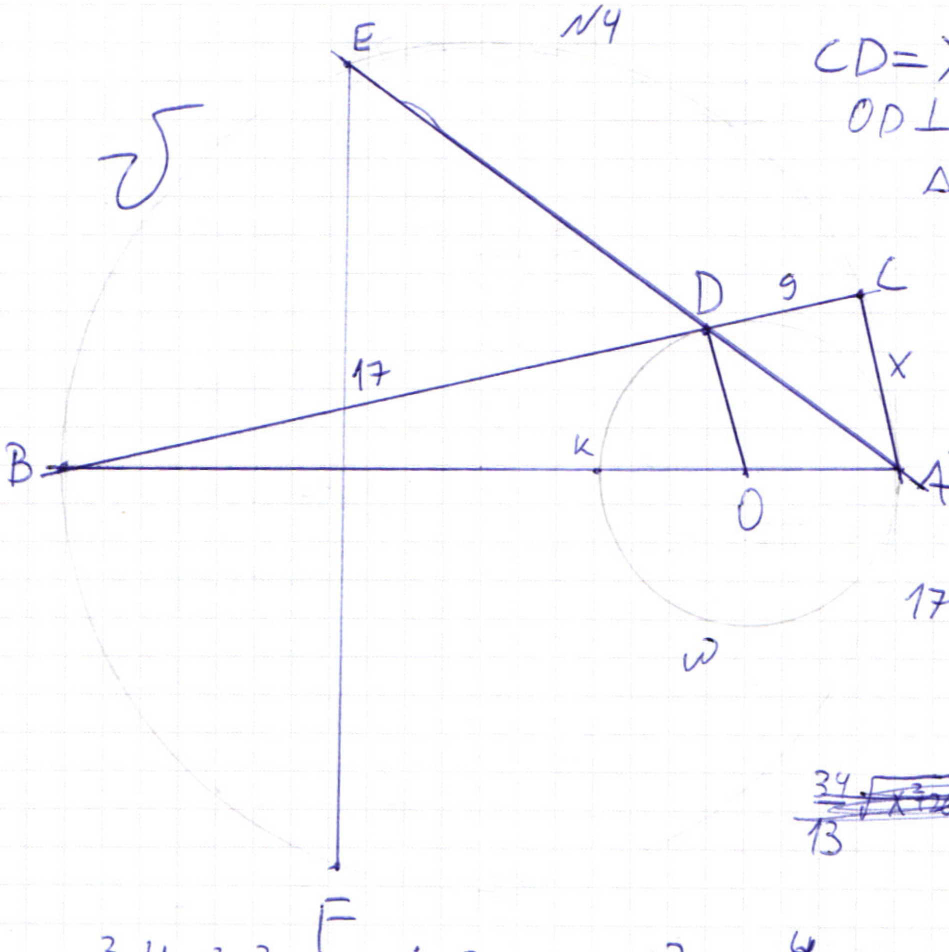
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$CD = X$; O - центр ω

$OD \perp BC$ (т.к радиус ...)

$\triangle ABC \sim \triangle OBD \Rightarrow$

$OD = AC \cdot \frac{BD}{BC} =$

$= X \cdot \frac{17}{26}$, $AK = \frac{17}{13}X$

$AB = \sqrt{X^2 + BC^2} = \sqrt{X^2+26^2}$

$BD^2 = BK \cdot BA$

$17^2 = \sqrt{X^2+26^2}\left(\sqrt{X^2+26^2} - \frac{17}{13}X\right)$

$\cancel{\frac{34}{13}\sqrt{X^2+26^2}\,X = 4X^2 + 4\cdot 26^2 - 17^2}$

$\cancel{\frac{34^2}{13^2}X^4 + \frac{34^2}{13^2}26^2X^2 = (4X^2+35\cdot 69)^2 = 16X^4 + (35\cdot 69)^2 + 2\cdot 4X^2\cdot 35\cdot 69}$

$\cancel{\frac{18\cdot 86}{13^2}X^4 + 35\cdot 4X^2}$

$X^2 + 9\cdot 43 = \frac{17}{13}X\sqrt{X^2+26^2}$

$X^4 + 2\cdot 9\cdot 43X^2 + (9\cdot 43)^2 = \left(\frac{17}{13}\right)^2X^4 + \frac{17^2}{13^2}X^2 26^2$

$\left(\frac{4\cdot 30}{13^2}\right)X^4 + X^2(4\cdot 17^2 - 2\cdot 9\cdot 43) - (9\cdot 43)^2 = 0$

$\frac{120}{13^2}X^4 + 2X^2\,391 - (9\cdot 43)^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\beta \cos 4\beta + \cos$

$2\sin\alpha \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\alpha$

$\frac{2tg(\alpha+\beta)}{1+tg^2(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $3+\frac{2}{4x+3} \le a+bx$

$8x^2+30x+17$

$D/4 = 225 - 8\cdot 17 =$

$= 225-56-80=$

$= 145-56=85$

$4\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = \frac{1}{5}$

$\sin 2\alpha$

$\sin\alpha \frac{1}{5\cos 2\beta} + \frac{\cos 2\alpha}{5(\cancel{4\beta^2}\cos^2 2\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\, 2\alpha = \frac{1}{5\cos\alpha \cos^2\beta}$

$-\frac{11}{4}$

$\cos 2\beta + tg\, 2\alpha \sin 2\beta$

$\cos 2\beta + ctg\, 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$