

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17

$OD = x$ - O - центр окружности, $BO = \sqrt{x^2 + 17^2}$; тогда

$BA = \sqrt{x^2 + 289} + x$

по $\triangle ABZ \sim \triangle OBD$ ($OD \parallel AC \perp BC$)
 $\Rightarrow AB = OB \cdot \frac{26}{17}$

т.о. $\sqrt{x^2 + 289} + x = \sqrt{x^2 + 289} \cdot \frac{26}{17}$

$\sqrt{x^2 + 289} = x$

$(\frac{9}{17})^2 (x^2 + 289) = x^2$

$x^2 (\frac{8}{17} \cdot \frac{26}{17}) = 81$

$x^2 = \frac{81 \cdot 17^2}{8 \cdot 26} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 17}{4\sqrt{13}}$

$AB = OA \cdot \frac{26}{9} = \frac{26 \cdot 17}{9} = \frac{17\sqrt{13}}{2}$

$R = \frac{17\sqrt{13}}{4}$

$AC \parallel EF \perp BC \Rightarrow ACEF$ впис. п/д. трапеция

$\Rightarrow AF = CE$; $\angle EAC = \angle AEF$. $DO = x \cdot \frac{26}{17} = \frac{9 \cdot 26}{4\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}$

$\text{tg } \alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ (*)

(3) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{17}$ $\sin \alpha = \frac{2}{17}$. Заметим, что $\angle AND = \alpha \Rightarrow DN \parallel EF$.

\Rightarrow вписанная четырехугольник в $\triangle FEA \sim \triangle NDA \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

$EF = AB = \frac{17\sqrt{13}}{2}$; $S(AEF) = \frac{1}{2} EF^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$

$= \frac{1}{2} \frac{17^2 \cdot 13}{4} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{\sqrt{13}}{17} = \frac{221\sqrt{13}}{4}$

N5

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \neq f(b) = f(a) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$f(1) < 0$, если a и b - простые, то

$$\frac{a}{b} < 0 \Rightarrow (a - f(b)) \leq 0 \text{ Простые дроби:}$$

2; 3; 5; 7; ~~11~~; 11; 13; 17; 19; 23

Полож. числ. отменен $\frac{x}{y}$ могут быть только отрицательные простые числа,

$$\left(\frac{2}{5} \dots \frac{2}{23}\right); \left(\frac{3}{5}\right); \dots \left(\frac{3}{23}\right); \frac{5}{11}; \dots \frac{5}{23}; \frac{7}{11}; \dots \frac{7}{23};$$

ч. т. д. считаем все пары так: если знаменатель $\neq 12$, тогда знаменателем 4, то тогда отменен по 1 штуке, а дроби ~~или $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$~~ $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{4}$ или $\frac{3}{6}$ или $\frac{4}{8}$ или $\frac{5}{10}$ или $\frac{6}{12}$ или $\frac{7}{14}$ или $\frac{8}{16}$ или $\frac{9}{18}$ или $\frac{10}{20}$ или $\frac{11}{22}$ или $\frac{12}{24}$ или $\frac{13}{26}$ или $\frac{14}{28}$ или $\frac{15}{30}$ или $\frac{16}{32}$ или $\frac{17}{34}$ или $\frac{18}{36}$ или $\frac{19}{38}$ или $\frac{20}{40}$ или $\frac{21}{42}$ или $\frac{22}{44}$ или $\frac{23}{46}$ или $\frac{24}{48}$ или $\frac{25}{50}$ или $\frac{26}{52}$ или $\frac{27}{54}$ или $\frac{28}{56}$ или $\frac{29}{58}$ или $\frac{30}{60}$ или $\frac{31}{62}$ или $\frac{32}{64}$ или $\frac{33}{66}$ или $\frac{34}{68}$ или $\frac{35}{70}$ или $\frac{36}{72}$ или $\frac{37}{74}$ или $\frac{38}{76}$ или $\frac{39}{78}$ или $\frac{40}{80}$ или $\frac{41}{82}$ или $\frac{42}{84}$ или $\frac{43}{86}$ или $\frac{44}{88}$ или $\frac{45}{90}$ или $\frac{46}{92}$ или $\frac{47}{94}$ или $\frac{48}{96}$ или $\frac{49}{98}$ или $\frac{50}{100}$ или $\frac{51}{102}$ или $\frac{52}{104}$ или $\frac{53}{106}$ или $\frac{54}{108}$ или $\frac{55}{110}$ или $\frac{56}{112}$ или $\frac{57}{114}$ или $\frac{58}{116}$ или $\frac{59}{118}$ или $\frac{60}{120}$ или $\frac{61}{122}$ или $\frac{62}{124}$ или $\frac{63}{126}$ или $\frac{64}{128}$ или $\frac{65}{130}$ или $\frac{66}{132}$ или $\frac{67}{134}$ или $\frac{68}{136}$ или $\frac{69}{138}$ или $\frac{70}{140}$ или $\frac{71}{142}$ или $\frac{72}{144}$ или $\frac{73}{146}$ или $\frac{74}{148}$ или $\frac{75}{150}$ или $\frac{76}{152}$ или $\frac{77}{154}$ или $\frac{78}{156}$ или $\frac{79}{158}$ или $\frac{80}{160}$ или $\frac{81}{162}$ или $\frac{82}{164}$ или $\frac{83}{166}$ или $\frac{84}{168}$ или $\frac{85}{170}$ или $\frac{86}{172}$ или $\frac{87}{174}$ или $\frac{88}{176}$ или $\frac{89}{178}$ или $\frac{90}{180}$ или $\frac{91}{182}$ или $\frac{92}{184}$ или $\frac{93}{186}$ или $\frac{94}{188}$ или $\frac{95}{190}$ или $\frac{96}{192}$ или $\frac{97}{194}$ или $\frac{98}{196}$ или $\frac{99}{198}$ или $\frac{100}{200}$ или $\frac{101}{202}$ или $\frac{102}{204}$ или $\frac{103}{206}$ или $\frac{104}{208}$ или $\frac{105}{210}$ или $\frac{106}{212}$ или $\frac{107}{214}$ или $\frac{108}{216}$ или $\frac{109}{218}$ или $\frac{110}{220}$ или $\frac{111}{222}$ или $\frac{112}{224}$ или $\frac{113}{226}$ или $\frac{114}{228}$ или $\frac{115}{230}$ или $\frac{116}{232}$ или $\frac{117}{234}$ или $\frac{118}{236}$ или $\frac{119}{238}$ или $\frac{120}{240}$ или $\frac{121}{242}$ или $\frac{122}{244}$ или $\frac{123}{246}$ или $\frac{124}{248}$ или $\frac{125}{250}$ или $\frac{126}{252}$ или $\frac{127}{254}$ или $\frac{128}{256}$ или $\frac{129}{258}$ или $\frac{130}{260}$ или $\frac{131}{262}$ или $\frac{132}{264}$ или $\frac{133}{266}$ или $\frac{134}{268}$ или $\frac{135}{270}$ или $\frac{136}{272}$ или $\frac{137}{274}$ или $\frac{138}{276}$ или $\frac{139}{278}$ или $\frac{140}{280}$ или $\frac{141}{282}$ или $\frac{142}{284}$ или $\frac{143}{286}$ или $\frac{144}{288}$ или $\frac{145}{290}$ или $\frac{146}{292}$ или $\frac{147}{294}$ или $\frac{148}{296}$ или $\frac{149}{298}$ или $\frac{150}{300}$ или $\frac{151}{302}$ или $\frac{152}{304}$ или $\frac{153}{306}$ или $\frac{154}{308}$ или $\frac{155}{310}$ или $\frac{156}{312}$ или $\frac{157}{314}$ или $\frac{158}{316}$ или $\frac{159}{318}$ или $\frac{160}{320}$ или $\frac{161}{322}$ или $\frac{162}{324}$ или $\frac{163}{326}$ или $\frac{164}{328}$ или $\frac{165}{330}$ или $\frac{166}{332}$ или $\frac{167}{334}$ или $\frac{168}{336}$ или $\frac{169}{338}$ или $\frac{170}{340}$ или $\frac{171}{342}$ или $\frac{172}{344}$ или $\frac{173}{346}$ или $\frac{174}{348}$ или $\frac{175}{350}$ или $\frac{176}{352}$ или $\frac{177}{354}$ или $\frac{178}{356}$ или $\frac{179}{358}$ или $\frac{180}{360}$ или $\frac{181}{362}$ или $\frac{182}{364}$ или $\frac{183}{366}$ или $\frac{184}{368}$ или $\frac{185}{370}$ или $\frac{186}{372}$ или $\frac{187}{374}$ или $\frac{188}{376}$ или $\frac{189}{378}$ или $\frac{190}{380}$ или $\frac{191}{382}$ или $\frac{192}{384}$ или $\frac{193}{386}$ или $\frac{194}{388}$ или $\frac{195}{390}$ или $\frac{196}{392}$ или $\frac{197}{394}$ или $\frac{198}{396}$ или $\frac{199}{398}$ или $\frac{200}{400}$ или $\frac{201}{402}$ или $\frac{202}{404}$ или $\frac{203}{406}$ или $\frac{204}{408}$ или $\frac{205}{410}$ или $\frac{206}{412}$ или $\frac{207}{414}$ или $\frac{208}{416}$ или $\frac{209}{418}$ или $\frac{210}{420}$ или $\frac{211}{422}$ или $\frac{212}{424}$ или $\frac{213}{426}$ или $\frac{214}{428}$ или $\frac{215}{430}$ или $\frac{216}{432}$ или $\frac{217}{434}$ или $\frac{218}{436}$ или $\frac{219}{438}$ или $\frac{220}{440}$ или $\frac{221}{442}$ или $\frac{222}{444}$ или $\frac{223}{446}$ или $\frac{224}{448}$ или $\frac{225}{450}$ или $\frac{226}{452}$ или $\frac{227}{454}$ или $\frac{228}{456}$ или $\frac{229}{458}$ или $\frac{230}{460}$ или $\frac{231}{462}$ или $\frac{232}{464}$ или $\frac{233}{466}$ или $\frac{234}{468}$ или $\frac{235}{470}$ или $\frac{236}{472}$ или $\frac{237}{474}$ или $\frac{238}{476}$ или $\frac{239}{478}$ или $\frac{240}{480}$ или $\frac{241}{482}$ или $\frac{242}{484}$ или $\frac{243}{486}$ или $\frac{244}{488}$ или $\frac{245}{490}$ или $\frac{246}{492}$ или $\frac{247}{494}$ или $\frac{248}{496}$ или $\frac{249}{498}$ или $\frac{250}{500}$ или $\frac{251}{502}$ или $\frac{252}{504}$ или $\frac{253}{506}$ или $\frac{254}{508}$ или $\frac{255}{510}$ или $\frac{256}{512}$ или $\frac{257}{514}$ или $\frac{258}{516}$ или $\frac{259}{518}$ или $\frac{260}{520}$ или $\frac{261}{522}$ или $\frac{262}{524}$ или $\frac{263}{526}$ или $\frac{264}{528}$ или $\frac{265}{530}$ или $\frac{266}{532}$ или $\frac{267}{534}$ или $\frac{268}{536}$ или $\frac{269}{538}$ или $\frac{270}{540}$ или $\frac{271}{542}$ или $\frac{272}{544}$ или $\frac{273}{546}$ или $\frac{274}{548}$ или $\frac{275}{550}$ или $\frac{276}{552}$ или $\frac{277}{554}$ или $\frac{278}{556}$ или $\frac{279}{558}$ или $\frac{280}{560}$ или $\frac{281}{562}$ или $\frac{282}{564}$ или $\frac{283}{566}$ или $\frac{284}{568}$ или $\frac{285}{570}$ или $\frac{286}{572}$ или $\frac{287}{574}$ или $\frac{288}{576}$ или $\frac{289}{578}$ или $\frac{290}{580}$ или $\frac{291}{582}$ или $\frac{292}{584}$ или $\frac{293}{586}$ или $\frac{294}{588}$ или $\frac{295}{590}$ или $\frac{296}{592}$ или $\frac{297}{594}$ или $\frac{298}{596}$ или $\frac{299}{598}$ или $\frac{300}{600}$ или $\frac{301}{602}$ или $\frac{302}{604}$ или $\frac{303}{606}$ или $\frac{304}{608}$ или $\frac{305}{610}$ или $\frac{306}{612}$ или $\frac{307}{614}$ или $\frac{308}{616}$ или $\frac{309}{618}$ или $\frac{310}{620}$ или $\frac{311}{622}$ или $\frac{312}{624}$ или $\frac{313}{626}$ или $\frac{314}{628}$ или $\frac{315}{630}$ или $\frac{316}{632}$ или $\frac{317}{634}$ или $\frac{318}{636}$ или $\frac{319}{638}$ или $\frac{320}{640}$ или $\frac{321}{642}$ или $\frac{322}{644}$ или $\frac{323}{646}$ или $\frac{324}{648}$ или $\frac{325}{650}$ или $\frac{326}{652}$ или $\frac{327}{654}$ или $\frac{328}{656}$ или $\frac{329}{658}$ или $\frac{330}{660}$ или $\frac{331}{662}$ или $\frac{332}{664}$ или $\frac{333}{666}$ или $\frac{334}{668}$ или $\frac{335}{670}$ или $\frac{336}{672}$ или $\frac{337}{674}$ или $\frac{338}{676}$ или $\frac{339}{678}$ или $\frac{340}{680}$ или $\frac{341}{682}$ или $\frac{342}{684}$ или $\frac{343}{686}$ или $\frac{344}{688}$ или $\frac{345}{690}$ или $\frac{346}{692}$ или $\frac{347}{694}$ или $\frac{348}{696}$ или $\frac{349}{698}$ или $\frac{350}{700}$ или $\frac{351}{702}$ или $\frac{352}{704}$ или $\frac{353}{706}$ или $\frac{354}{708}$ или $\frac{355}{710}$ или $\frac{356}{712}$ или $\frac{357}{714}$ или $\frac{358}{716}$ или $\frac{359}{718}$ или $\frac{360}{720}$ или $\frac{361}{722}$ или $\frac{362}{724}$ или $\frac{363}{726}$ или $\frac{364}{728}$ или $\frac{365}{730}$ или $\frac{366}{732}$ или $\frac{367}{734}$ или $\frac{368}{736}$ или $\frac{369}{738}$ или $\frac{370}{740}$ или $\frac{371}{742}$ или $\frac{372}{744}$ или $\frac{373}{746}$ или $\frac{374}{748}$ или $\frac{375}{750}$ или $\frac{376}{752}$ или $\frac{377}{754}$ или $\frac{378}{756}$ или $\frac{379}{758}$ или $\frac{380}{760}$ или $\frac{381}{762}$ или $\frac{382}{764}$ или $\frac{383}{766}$ или $\frac{384}{768}$ или $\frac{385}{770}$ или $\frac{386}{772}$ или $\frac{387}{774}$ или $\frac{388}{776}$ или $\frac{389}{778}$ или $\frac{390}{780}$ или $\frac{391}{782}$ или $\frac{392}{784}$ или $\frac{393}{786}$ или $\frac{394}{788}$ или $\frac{395}{790}$ или $\frac{396}{792}$ или $\frac{397}{794}$ или $\frac{398}{796}$ или $\frac{399}{798}$ или $\frac{400}{800}$ или $\frac{401}{802}$ или $\frac{402}{804}$ или $\frac{403}{806}$ или $\frac{404}{808}$ или $\frac{405}{810}$ или $\frac{406}{812}$ или $\frac{407}{814}$ или $\frac{408}{816}$ или $\frac{409}{818}$ или $\frac{410}{820}$ или $\frac{411}{822}$ или $\frac{412}{824}$ или $\frac{413}{826}$ или $\frac{414}{828}$ или $\frac{415}{830}$ или $\frac{416}{832}$ или $\frac{417}{834}$ или $\frac{418}{836}$ или $\frac{419}{838}$ или $\frac{420}{840}$ или $\frac{421}{842}$ или $\frac{422}{844}$ или $\frac{423}{846}$ или $\frac{424}{848}$ или $\frac{425}{850}$ или $\frac{426}{852}$ или $\frac{427}{854}$ или $\frac{428}{856}$ или $\frac{429}{858}$ или $\frac{430}{860}$ или $\frac{431}{862}$ или $\frac{432}{864}$ или $\frac{433}{866}$ или $\frac{434}{868}$ или $\frac{435}{870}$ или $\frac{436}{872}$ или $\frac{437}{874}$ или $\frac{438}{876}$ или $\frac{439}{878}$ или $\frac{440}{880}$ или $\frac{441}{882}$ или $\frac{442}{884}$ или $\frac{443}{886}$ или $\frac{444}{888}$ или $\frac{445}{890}$ или $\frac{446}{892}$ или $\frac{447}{894}$ или $\frac{448}{896}$ или $\frac{449}{898}$ или $\frac{450}{900}$ или $\frac{451}{902}$ или $\frac{452}{904}$ или $\frac{453}{906}$ или $\frac{454}{908}$ или $\frac{455}{910}$ или $\frac{456}{912}$ или $\frac{457}{914}$ или $\frac{458}{916}$ или $\frac{459}{918}$ или $\frac{460}{920}$ или $\frac{461}{922}$ или $\frac{462}{924}$ или $\frac{463}{926}$ или $\frac{464}{928}$ или $\frac{465}{930}$ или $\frac{466}{932}$ или $\frac{467}{934}$ или $\frac{468}{936}$ или $\frac{469}{938}$ или $\frac{470}{940}$ или $\frac{471}{942}$ или $\frac{472}{944}$ или $\frac{473}{946}$ или $\frac{474}{948}$ или $\frac{475}{950}$ или $\frac{476}{952}$ или $\frac{477}{954}$ или $\frac{478}{956}$ или $\frac{479}{958}$ или $\frac{480}{960}$ или $\frac{481}{962}$ или $\frac{482}{964}$ или $\frac{483}{966}$ или $\frac{484}{968}$ или $\frac{485}{970}$ или $\frac{486}{972}$ или $\frac{487}{974}$ или $\frac{488}{976}$ или $\frac{489}{978}$ или $\frac{490}{980}$ или $\frac{491}{982}$ или $\frac{492}{984}$ или $\frac{493}{986}$ или $\frac{494}{988}$ или $\frac{495}{990}$ или $\frac{496}{992}$ или $\frac{497}{994}$ или $\frac{498}{996}$ или $\frac{499}{998}$ или $\frac{500}{1000}$

$$(8 + 6 + 8 + 4) \cdot 1 = 24$$

Всего 11 др. , там же, ~~или $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$~~ дроби могут быть дроби на 2, а др. $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{7}{14}$ $\frac{8}{16}$ $\frac{9}{18}$ $\frac{10}{20}$ $\frac{11}{22}$ $\frac{12}{24}$ $\frac{13}{26}$ $\frac{14}{28}$ $\frac{15}{30}$ $\frac{16}{32}$ $\frac{17}{34}$ $\frac{18}{36}$ $\frac{19}{38}$ $\frac{20}{40}$ $\frac{21}{42}$ $\frac{22}{44}$ $\frac{23}{46}$ $\frac{24}{48}$ $\frac{25}{50}$ $\frac{26}{52}$ $\frac{27}{54}$ $\frac{28}{56}$ $\frac{29}{58}$ $\frac{30}{60}$ $\frac{31}{62}$ $\frac{32}{64}$ $\frac{33}{66}$ $\frac{34}{68}$ $\frac{35}{70}$ $\frac{36}{72}$ $\frac{37}{74}$ $\frac{38}{76}$ $\frac{39}{78}$ $\frac{40}{80}$ $\frac{41}{82}$ $\frac{42}{84}$ $\frac{43}{86}$ $\frac{44}{88}$ $\frac{45}{90}$ $\frac{46}{92}$ $\frac{47}{94}$ $\frac{48}{96}$ $\frac{49}{98}$ $\frac{50}{100}$ или $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{6}{18}$ $\frac{7}{21}$ $\frac{8}{24}$ $\frac{9}{27}$ $\frac{10}{30}$ $\frac{11}{33}$ $\frac{12}{36}$ $\frac{13}{39}$ $\frac{14}{42}$ $\frac{15}{45}$ $\frac{16}{48}$ $\frac{17}{51}$ $\frac{18}{54}$ $\frac{19}{57}$ $\frac{20}{60}$ $\frac{21}{63}$ $\frac{22}{66}$ $\frac{23}{69}$ $\frac{24}{72}$ $\frac{25}{75}$ $\frac{26}{78}$ $\frac{27}{81}$ $\frac{28}{84}$ $\frac{29}{87}$ $\frac{30}{90}$ $\frac{31}{93}$ $\frac{32}{96}$ $\frac{33}{99}$ $\frac{34}{102}$ $\frac{35}{105}$ $\frac{36}{108}$ $\frac{37}{111}$ $\frac{38}{114}$ $\frac{39}{117}$ $\frac{40}{120}$ $\frac{41}{123}$ $\frac{42}{126}$ $\frac{43}{129}$ $\frac{44}{132}$ $\frac{45}{135}$ $\frac{46}{138}$ $\frac{47}{141}$ $\frac{48}{144}$ $\frac{49}{147}$ $\frac{50}{150}$ или $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{5}{20}$ $\frac{6}{24}$ $\frac{7}{28}$ $\frac{8}{32}$ $\frac{9}{36}$ $\frac{10}{40}$ $\frac{11}{44}$ $\frac{12}{48}$ $\frac{13}{52}$ $\frac{14}{56}$ $\frac{15}{60}$ $\frac{16}{64}$ $\frac{17}{68}$ $\frac{18}{72}$ $\frac{19}{76}$ $\frac{20}{80}$ $\frac{21}{84}$ $\frac{22}{88}$ $\frac{23}{92}$ $\frac{24}{96}$ $\frac{25}{100}$ или $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{20}$ $\frac{5}{25}$ $\frac{6}{30}$ $\frac{7}{35}$ $\frac{8}{40}$ $\frac{9}{45}$ $\frac{10}{50}$ $\frac{11}{55}$ $\frac{12}{60}$ $\frac{13}{65}$ $\frac{14}{70}$ $\frac{15}{75}$ $\frac{16}{80}$ $\frac{17}{85}$ $\frac{18}{90}$ $\frac{19}{95}$ $\frac{20}{100}$ или $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{3}{18}$ $\frac{4}{24}$ $\frac{5}{30}$ $\frac{6}{36}$ $\frac{7}{42}$ $\frac{8}{48}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{10}{60}$ $\frac{11}{66}$ $\frac{12}{72}$ $\frac{13}{78}$ $\frac{14}{84}$ $\frac{15}{90}$ $\frac{16}{96}$ $\frac{17}{102}$ $\frac{18}{108}$ $\frac{19}{114}$ $\frac{20}{120}$ или $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{14}$ $\frac{3}{21}$ $\frac{4}{28}$ $\frac{5}{35}$ $\frac{6}{42}$ $\frac{7}{49}$ $\frac{8}{56}$ $\frac{9}{63}$ $\frac{10}{70}$ $\frac{11}{77}$ $\frac{12}{84}$ $\frac{13}{91}$ $\frac{14}{98}$ $\frac{15}{105}$ $\frac{16}{112}$ $\frac{17}{119}$ $\frac{18}{126}$ $\frac{19}{133}$ $\frac{20}{140}$ или $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{16}$ $\frac{3}{24}$ $\frac{4}{32}$ $\frac{5}{40}$ $\frac{6}{48}$ $\frac{7}{56}$ $\frac{8}{64}$ $\frac{9}{72}$ $\frac{10}{80}$ $\frac{11}{88}$ $\frac{12}{96}$ $\frac{13}{104}$ $\frac{14}{112}$ $\frac{15}{120}$ $\frac{16}{128}$ $\frac{17}{136}$ $\frac{18}{144}$ $\frac{19}{152}$ $\frac{20}{160}$ или $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{18}$ $\frac{3}{27}$ $\frac{4}{36}$ $\frac{5}{45}$ $\frac{6}{54}$ $\frac{7}{63}$ $\frac{8}{72}$ $\frac{9}{81}$ $\frac{10}{90}$ $\frac{11}{99}$ $\frac{12}{108}$ $\frac{13}{117}$ $\frac{14}{126}$ $\frac{15}{135}$ $\frac{16}{144}$ $\frac{17}{153}$ $\frac{18}{162}$ $\frac{19}{171}$ $\frac{20}{180}$ или $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{20}$ $\frac{3}{30}$ $\frac{4}{40}$ $\frac{5}{50}$ $\frac{6}{60}$ $\frac{7}{70}$ $\frac{8}{80}$ $\frac{9}{90}$ $\frac{10}{100}$ или $\frac{1}{11}$ $\frac{2}{22}$ $\frac{3}{33}$ $\frac{4}{44}$ $\frac{5}{55}$ $\frac{6}{66}$ $\frac{7}{77}$ $\frac{8}{88}$ $\frac{9}{99}$ $\frac{10}{110}$ $\frac{11}{121}$ $\frac{12}{132}$ $\frac{13}{143}$ $\frac{14}{154}$ $\frac{15}{165}$ $\frac{16}{176}$ $\frac{17}{187}$ $\frac{18}{198}$ $\frac{19}{209}$ $\frac{20}{220}$ или $\frac{1}{12}$ $\frac{2}{24}$ $\frac{3}{36}$ $\frac{4}{48}$ $\frac{5}{60}$ $\frac{6}{72}$ $\frac{7}{84}$ $\frac{8}{96}$ $\frac{9}{108}$ $\frac{10}{120}$ $\frac{11}{132}$ $\frac{12}{144}$ $\frac{13}{156}$ $\frac{14}{168}$ $\frac{15}{180}$ $\frac{16}{192}$ $\frac{17}{204}$ $\frac{18}{216}$ $\frac{19}{228}$ $\frac{20}{240}$ или $\frac{1}{13}$ $\frac{2}{26}$ $\frac{3}{39}$ $\frac{4}{52}$ $\frac{5}{65}$ $\frac{6}{78}$ $\frac{7}{91}$ $\frac{8}{104}$ $\frac{9}{117}$ $\frac{10}{130}$ $\frac{11}{143}$ $\frac{12}{156}$ $\frac{13}{169}$ $\frac{14}{182}$ $\frac{15}{195}$ $\frac{16}{208}$ $\frac{17}{221}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq \sqrt{3} |x^2+18x|^{\log_{12} 3} - 18x$$

$$x^2+18x = t; \quad t > 0 \text{ из ОДЗ}$$

$$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 3} \quad | : t \text{ (можно, т.к. } t > 0)$$

~~$$t^{\log_{12} 5 - 1} \geq t^{\log_{12} 3 - 1} \quad | : t^{\log_{12} 5 - 1} \rightarrow t^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12} 3}, t > 0$$~~

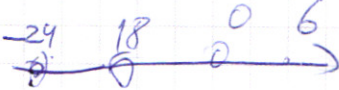
$$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 3^{\log_{12} t} \quad | : 3^{\log_{12} t}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_{12} t} + \left(\frac{12}{3}\right)^{\log_{12} t} \geq 1 \quad \text{т.к. левая часть логарифма, тем меньше}$$

левая часть и наоборот. при $\log_{12} t = 2$ вычисляется
ровенство, т.т.к левая часть монотонно убывает, то
это означает ур. $\log_{12} t \leq 2$, т.к. правая часть меньше т.т.к левая
часть больше, то неравенство меньше, т.е

$$\log_{12} t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 144$$

$$\begin{cases} 2x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} -24 \leq x < 18 \\ 0 < x \leq 6 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } [-24; 18) \cup (0; 6]$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 9x - 18y = 12 \end{cases} \stackrel{N2}{\Rightarrow} \begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

$$x - 2 = a; \quad y - 1 = b$$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

если $a = b = 0$, то (2) урав. не выполняется \rightarrow
 $\sqrt{a} = 2\sqrt{b} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4b$

$$\begin{cases} (4b)^2 + 9b^2 = 25 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 4$$

Ответ $\begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ Ответ: $\{6; 2\}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \stackrel{N1}{\Rightarrow} \begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) \cos 2\alpha - \cos(4\beta + 4\alpha) \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) \cos 2\alpha - 4 \cdot \frac{3}{5} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) = \pm \frac{4}{5}$$

$$1) \frac{4}{5} \cos 2\alpha - \frac{3}{5} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \cos 2\alpha + \frac{2}{5} \sin 2\alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = 1 \\ \cos 2\alpha = -1 \end{cases}$$

$$2) -2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan^2 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha} = 1 &\Rightarrow \tan 2\alpha = 0 \\ \frac{1 - \tan^2 2\alpha}{1 + \tan^2 2\alpha} = -1 &\Rightarrow \tan 2\alpha = \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

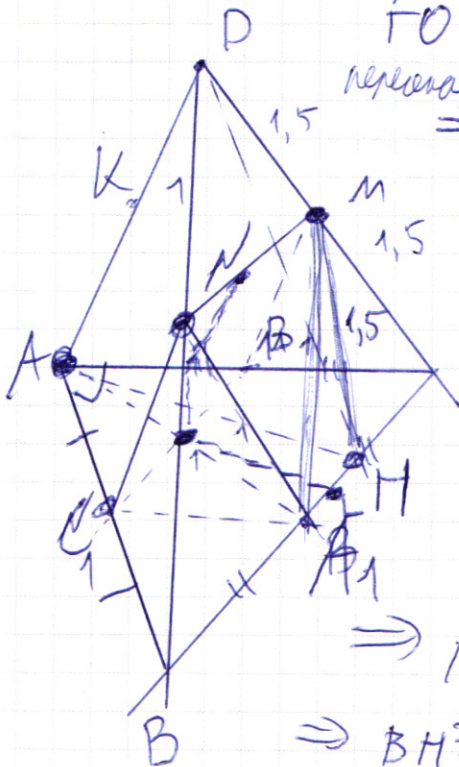
Ответ: $(0; \pm 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

1) $A_1; B_1; C_1; M; N; K$ - середины $BC; AC; AB; CD; BD; AD$ соответственно

Поскольку K, M, N - середины BC, AC, AB параллельны,
то что и есть диаметр BM - т.е., тогда
перпендикулярна AD \Rightarrow $BM \perp AD$ (!)



Аналогичные рассуждения
для параллельных

C, A_1, B_1, C_1 , тогда тогда $AB \perp AC$ (!)

$AH \perp BC$, тогда $BC \perp AH \Rightarrow$
 $BC \perp AD \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow DH \perp BC$

$$\Rightarrow BH^2 = HC^2 = BD^2 - DC^2$$

Пусть $BC = x$ тогда $AC^2 = x^2 - 1$;

Тогда $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{1}{x}$; $AH = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{AC^2}{BC}$ (используя теорему Пифагора в $\triangle ABC$)

$$BH^2 - CH^2 = \frac{1}{x^2} - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - x^2 + 2 - \frac{1}{x^2} = 2 - x^2$$

$$\frac{1}{x^2} - x^2 + 2 = -5 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

2) $AC = \sqrt{6}$; $H \in$ сфере (!): $AA_1 \perp BC = O_1$; $OO_1 \perp BC$

Ст. и O_1 - центр вписанной окружности AB , но $O_1M = O_1A_1$ т.к. $\triangle AA_1M$ равнобедренный
 O_1 - середина $\Rightarrow OH = OA_1$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

№ 7 up-е

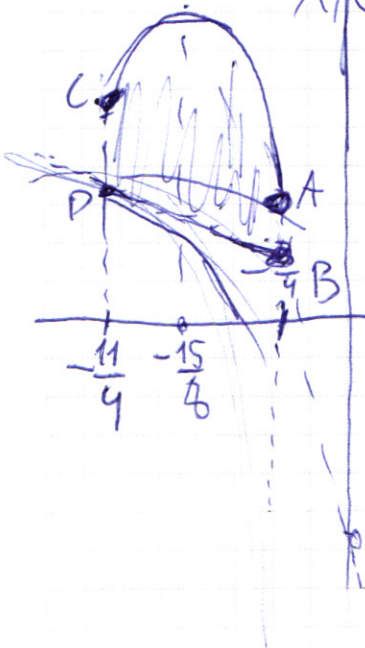
$$DM = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: ~~№ 6~~ $BC = \sqrt{7}$

№ 6

$$x = -\frac{11}{45} \quad \frac{-33+11}{-11+35} = \frac{-140}{24}$$

будет выводить картину функции
Тема



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{4}$
 $BC = BD - CD = 17 - 8 = 9$
 R - радиус ω ; r - радиус ω
 $AB \cap \omega = K$
 O - центр ω
 AK - диаметр
 $AK = 2r$
 $AB = 2R$

$430 - 43 = 387$

$\frac{91}{B}$
 $\frac{273}{91}$
 $\frac{183}{91}$
 $\frac{387}{91}$
 $\frac{79}{91}$

Поскольку BD - диаметр, то $BD^2 = BA \cdot BK$: $17^2 = 2R(2R + 2r)$ (1)
 $AC = x$. Тогда по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = x^2 + 81$ (2)
 DO - радиус, \perp хорде AB : $\triangle ABC \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{9}$
 $r = \frac{17}{9}x$; Тогда из (1) и (2) $17^2 = 4\sqrt{x^2 + 81}(\sqrt{x^2 + 81} + \frac{17}{9}x)$
 $17^2 = 4x^2 + 324 + 4\sqrt{x^2 + 81} \cdot \frac{17}{9}x \Leftrightarrow$
 $52 - 17 = 35$
 $52 + 17 = 69$
 $70 \cdot 69 \cdot 4 = 280 \cdot 69$
 $1 + 9 = 4 + 5$

$4R(R+r)$
 $(91 \cdot 13 - 9 \cdot 43)(91 \cdot 13 + 9 \cdot 43) = 13^2$
 $91^2 - 9^2 = \frac{120 \cdot 6 \cdot 43}{13^2} = 51 + \frac{11 \cdot 9 \cdot 43}{13}$
 $\frac{18 \cdot 86}{13^2}$

69
28

$\frac{90}{13}$;

$$\frac{26^2}{13^2} = 4 \cdot 35^{-2}$$

$$289 \cdot 2 - 430 + 43 = 578 - 430 + 43 = 48 + 43 = 91$$

$$9 \cdot 44$$

$$D = \frac{(91 - 91 \cdot 13)^2 - 90 \cdot 9 \cdot 43}{13^2}$$

$$81 + 144 = 225$$

$$-9 + 15 = 6$$

$$x - 2y$$

$$\begin{aligned} x - 2 &= a \\ y - 1 &= b \end{aligned}$$

$$9 + 12 + 4 =$$

$$a - 2b = x - 2y$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 81 \\ \hline 698 \\ 6561 \end{array}$$

$$a - 2b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 + 3b^2 = 25$$

$$\begin{array}{r} 51 \cdot 91 \\ 91 \\ 91 \\ \hline 91 \\ 819 \\ 8281 \end{array}$$

$$8281 - 30 \cdot 13$$

$$91^2 + \frac{90}{13} \left(\frac{9 \cdot 43}{13}\right)^2$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) \sin 2\alpha = \sin(4\alpha + 4\beta) \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{13}$$

$$= 13$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha &= \sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1 + 1) \\ &= 2\cos^2 2\alpha \quad \text{и} \quad \sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$-\frac{\cos 4\beta}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5} + \cos 2\beta \sin^2 2\alpha$$

$$\cos 2\beta \left(\sin^2 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\alpha \quad \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos$$

$$\frac{2\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad 3 + \frac{2}{4x+3} \leq a+b$$

$$8x^2 + 30x + 17$$

$$\frac{2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{5}$$

$$D/q = 225 - 4 \cdot 17 =$$

$$= 225 - 56 = 80 =$$

$$= 145 - 56 = 89$$

$$\sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha \frac{1}{5\cos 2\beta} + \frac{\cos 2\alpha}{5(\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{5\cos 2\beta \cos^2 2\beta} \quad -\frac{11}{4}$$

$$\cos 2\beta + \operatorname{tg} 2\alpha \sin 2\beta$$

$$\cos 2\beta + \operatorname{tg} 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$