МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} = 3^{\frac{\log_3 x^2+6x}{\log_3 4}} = \left(3^{\log_3 x^2+6x}\right)^{\frac{1}{\log_3 4}} = (x^2+6x)^{\log_4 3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$x^2+6x=1$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}\left(1+(x^2+6x)^{\log_4 \frac{4}{3}}\right) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

возьмём $\log_{x^2+6x}$ $(x^2+6x\neq 1)$

$\log_4 3 + \log_{x^2+6x}\left(1+(x^2+6x)^{\log_4 \frac{4}{3}}\right) \geq \log_4 5$

$\log_{x^2+6x}\left(1+(x^2+6x)^{\log_4 \frac{4}{3}}\right) \geq \log_4 \frac{5}{3}$

$\mathcal{D} = 36+4 = 40 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$

$x_1 = -3+\sqrt{10}$

$x_2 = -3-\sqrt{10}$

№4. Дано:

окр. Ω и ω касаются в A (внутр. образом)

AB - диаметр Ω

BC - касательная к ω ($BC \cap \omega = D$)

луч $AD \cap \Omega = E$

$FE \perp BC$; т $F \in \Omega$

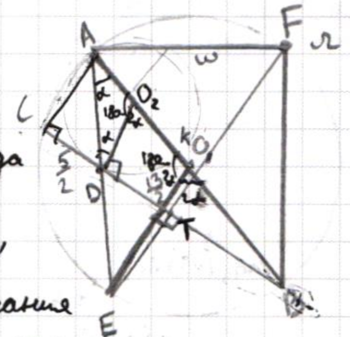
R, r - ?, где R - радиус Ω, r - радиус ω

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$.

Решение:



① Пусть O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω; тогда т.к. AB - диаметр Ω, то $O_1, O_2 \in AB$ (т. касания соединённая с центром окр., образует прямую, проходящую через центр другой, если окр. касаются).

Пусть $AB \cap \omega = K$, тогда $AK = 2r$, $KB = 2R - 2r$.

для окр ω: BD - касательная; BA - секущая из одной точки $\Rightarrow$ $BK \cdot AB = BD^2$

$$2(R-r)\cdot 2R = \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$4R(R-r) = \frac{169}{4} \quad |:4$$

$$R^2 - rR - \frac{169}{16} = 0 \quad (*)$$

② проведём O_2D; $O_2D \perp BD$; тогда в $\triangle O_2BD$ - прям:

$O_2D = r$; $BO_2 = 2R - r$; $BD = \frac{13}{2}$.

по т. Пифагора:

$$BO_2^2 = O_2D^2 + BD^2$$

$$4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + \frac{169}{4}$$

③ $AE \cap CB = D \Rightarrow$ (хорды Ω)

$$AD \cdot DE = DB \cdot CD$$

$$AD \cdot DE = \frac{65}{4} \Rightarrow \cancel{DE = \frac{65}{4AD}}$$

$$\cancel{\frac{AE}{AD} = 1 + \frac{DE}{AD}}$$

$$AD = \frac{65}{4DE}$$

~~$\triangle AO_2D$ и $\triangle AO_1E$ - подобны;~~

$\triangle AO_2D$ и $\triangle AO_1E$ - подобны, т.к. $\angle EO_1B = 2\alpha$, то $\angle EAB = \alpha = \angle ADO_2$, т.к. $AO_2 = O_2D = r \Rightarrow \angle AO_2D = 180° - 2\alpha = \angle AO_1E$ и $AO_1 = O_1E = R \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R}$ $\cancel{\Rightarrow \frac{65}{4DE^2} = \frac{r}{R} \ldots \frac{AD^2}{65}}$

$$1 + \frac{DE}{AD} = \frac{R}{r}$$

$\angle EAB = \angle EFB = \frac{1}{2}\smile EB = \alpha \Rightarrow \angle AFE = 90° - \alpha$; т.к. AB - диаметр

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + AD^2 - r^2}{2\cdot r\cdot AD} = \frac{AD}{2r} \Rightarrow \sin(90°-\alpha) = \cos\alpha = \sin(\angle AFE)$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot FE\cdot \sin(90°-\alpha)$$

$$R = \frac{AE}{2\sin(90°-\alpha)} = \frac{(AD+DE)2r}{2AD} = r\left(1 + \frac{DE}{AD}\right) \Rightarrow \frac{r}{R} =$$

$\triangle ACD \sim \triangle ETD$ (по 2 угл.) $\Rightarrow \frac{AC}{ET} = \frac{AD}{ED} = \frac{CD}{TD} = \frac{r}{R-r}$

из т. Пифагора для $\triangle ACB$: $AC = \sqrt{4R^2 - 81}$

$\triangle O_2BD \sim \triangle ABC$ (по 2 угл.) $\Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{r}{\sqrt{4R^2-81}} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{2\cdot 9}$$

$$18(2R-r) = 13\cdot 2R$$

$$36R - 18r = 26R$$

$$12R = 18r$$

$$R = \frac{3}{2}r \quad - \text{в} \circledast$$

$$\frac{9}{4}r^2 - \frac{3}{2}r^2 - \frac{169}{16} = 0$$

$$\frac{3}{4}r^2 = \frac{169}{16} \quad \Big| \cdot \frac{4}{3}$$

$$r^2 = \frac{169}{12}$$

$$r = \frac{13}{6}\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{3}{2}\cdot\frac{13}{6}\sqrt{3} = \frac{13}{4}\sqrt{3}$$

$$\angle \cancel{AFE} \quad AD\cdot DE = \frac{65}{4}$$

$$1 + \frac{DE}{AD} = \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{DE}{AD} = \frac{1}{2}; \quad DE = 2AD$$

$$2\cdot AD^2 = \frac{65}{4}$$

$$AD = \sqrt{\frac{65}{8}}, \quad DE = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

$$\sin(\angle AEF) = \cos\alpha = \frac{AD}{2r} = \frac{\sqrt{65}\cdot 42}{\sqrt{8}\cdot 2\cdot 13\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{65}}{13\sqrt{6}}$$

$$\frac{AC}{ET} = \frac{r}{R-r}$$

$$ET = \frac{R-r}{r}\cdot AC = \frac{\frac{3}{2}r - r}{r}\cdot\sqrt{4\cdot\frac{169}{16}\cdot 3 - 81} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{169\cdot 3}{4} - 81}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 61}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{183} \quad ; \quad ET\cdot TF = BT\cdot CT$$

$$\frac{CD}{TD} = \frac{r}{R-r} = 2 \Rightarrow TD = 2CD = 5 \Rightarrow CT = 7{,}5; \; TB = 1{,}5$$

$$TF = \frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4}{\sqrt{183}} = \frac{45}{\sqrt{183}} \Rightarrow EF = ET + TF = \frac{45\sqrt{183}}{183} + \frac{\sqrt{183}}{4} =$$

$$= \frac{(180 + 183)\sqrt{183}}{183\cdot 4} = \frac{363\sqrt{183}}{732} \Rightarrow$$

Ответ: $R = \frac{13}{4}\sqrt{3}$; $r = \frac{13}{6}\sqrt{3}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{\sqrt{65}}{13\sqrt{6}}$.

$$\begin{array}{r} 183 \\ \times\ 4 \\ \hline 732 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ 4 \\ \hline 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ -108 \\ \hline 61 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

a, b -? , верно для $\forall x \in (1;3]$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ – обратная пропорц. со сдвигом на 2 вверх, на 1 вправо и сжатием в $k=\frac{1}{2}$ раза

$g(x) = 8x^2-34x+30$ – парабола, ветви вверх

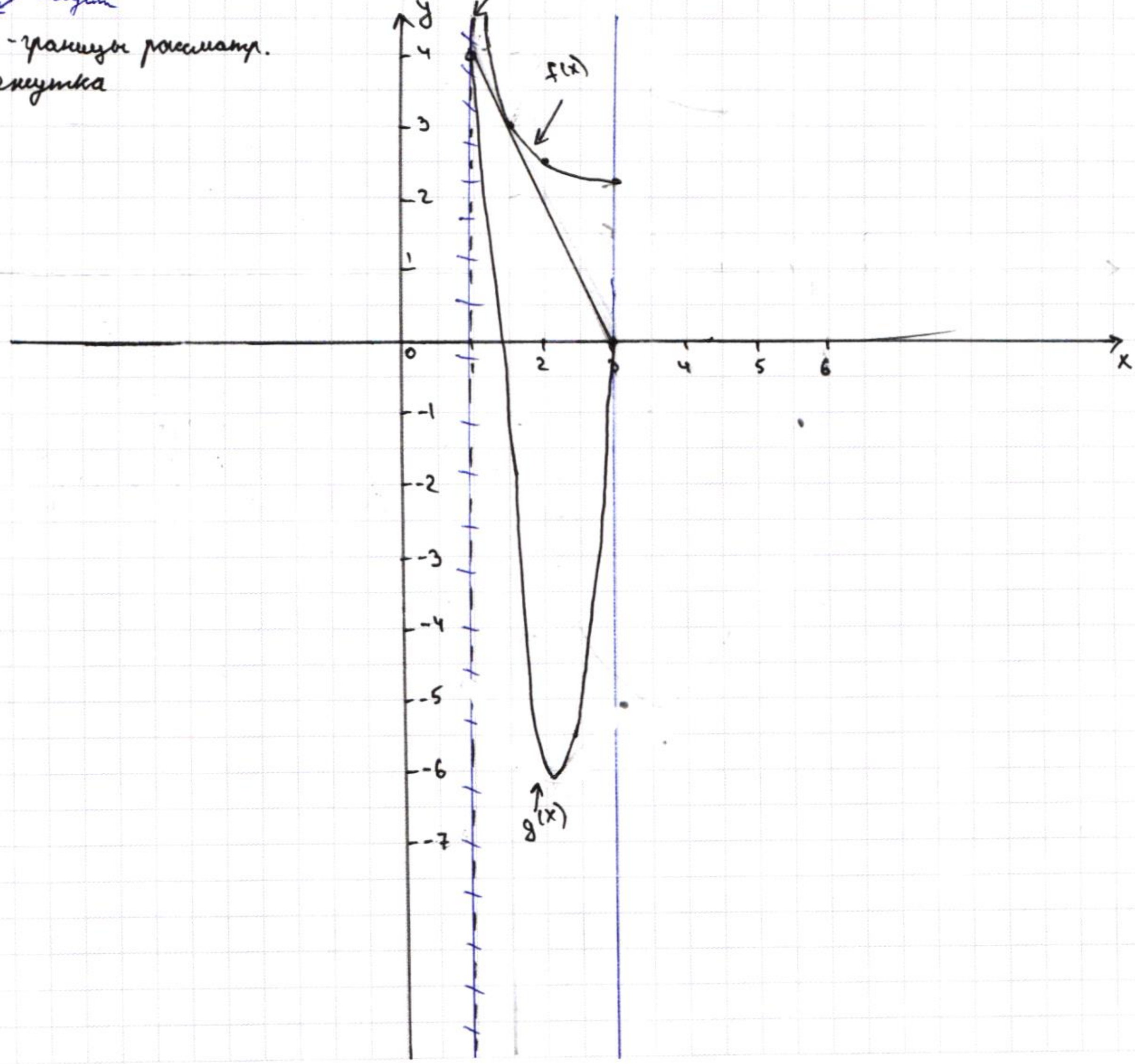
$x_0 = \frac{34}{16} = 2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}$

$y_0 = 8 \cdot \frac{17^2}{64} - \frac{34 \cdot 17}{8} + 30 = \frac{8 \cdot 289}{\cancel{64}8} - \frac{289 \cdot 2}{8} + 30 = -\frac{289}{8} + 30 =$

$= \frac{240-289}{8} = -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$ асимптота

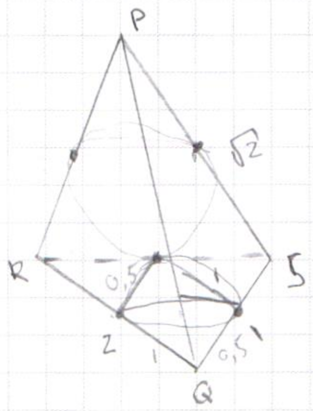
$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17\ \ \\ \hline 289 \end{array}$

не входит, входит – границы рассматр. промежутка



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

·критические случаи:

1сл. прямая $y = ax+b$ проходит через $g(3)$ и касается $f(x)$

2сл. прямая $y = ax+b$ проходит через $g(1)$ и касается $f(x)$

1сл: $g(3) = 0 = 8\cdot 9 - 34\cdot 9 + 30 \Rightarrow$

$y(3) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$; $b = -3a$

$y_к = f'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = \frac{0 - (2x-2)'\cdot 1}{(2x-2)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$y_к = \underbrace{-\frac{1}{2(x_0-1)^2}}_{a} x + \underbrace{\frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}}_{b} \Rightarrow$

$a = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}$

$b = \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = \frac{3}{2(x_0-1)^2}$

$\frac{x_0 - 3}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = 0 \quad | \cdot 2(x_0-1)^2 > 0$

$x_0 - 3 + x_0 - 1 + 4(x_0-1)^2 = 0$

$2x_0 - 4 + 4x_0^2 - 8x_0 + 4 = 0$

$4x_0^2 - 6x_0 = 0$

$x_0 = 0$ или $x_0 = \frac{3}{2}$ - абсциссы т. касания

неуд. промежутку $(1;3]$ $\quad \Downarrow$

$a = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = -2 \Rightarrow b = 6$

$$\boxed{y = -2x + 6}$$

2сл: $g(1) = 8 - 34 + 30 = 4 \Rightarrow$

$y(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4$

$b = 4 - a$

$a = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}$

$b = \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = 4 + \frac{1}{2(x_0-1)^2}$

$b = \frac{(x_0-1)}{2(x_0-1)^2} - 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = 0$

$\frac{1}{x_0-1} = 2$

$x_0 - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -2$; $b = 6 \Rightarrow y = -2x+6$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~рассмотрим случай $a=0$: $\Rightarrow \frac{4x-3}{2x-2} \geq b \geq 8x^2-34x+30$~~

~~$y=b$ - горизонтальная прямая.~~

~~критические случаи: $\cdot f(3)=b$ и $g(1)=b$~~

~~$f(3)=2{,}25=b$; $g(1)=8-34+30=4=b$~~

~~включительно; не включительно~~

~~b лежит между этими случаями~~

~~$a=0$; $b\in[2{,}25;4)$~~

~~рассмотрим случай $b=0 \Rightarrow \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax \geq 8x^2-34x+30$~~

~~$y=ax$ - прямая пропорцион.~~

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\quad 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}}$

- $y = \frac{4x-3}{2x-2}$

$y' = \frac{(4x-3)'(2x-2)-(2x-2)'(4x-3)}{(2x-2)^2} =$

$= \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{4(x-1)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{4(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$y_к. = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2x_0-2}$

$y(3)=0$

зат $b=-3$

$3a+b=0$

$-3a=b$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(x/y) < 0$

$f(x\cdot y^{-1}) = f(x)+f(y^{-1}) < 0$

$f(x)+f(y^{-1}) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2x_0-2} = x_1 a - 3a \\ f'(x_0)=a \end{cases}$$

$b = \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2x_0-2} = -3a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. критические случаи совпадают, то а и в принимают единственные значения.

Ответ: $a=-2$; $b=6$.

№5. $f(ab)=f(a)+f(b)$

p-простое, $f(p)=[p/4]$

$N(x,y)$ – ? $3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f(x/y)<0$

$f(x/y)=f(x)+f(y^{-1})<0$

Если x/y – простое и $x/y<4$, то $f(x/y)=0$, т.е.

~~таких случаев~~

$x/y=2$ или $x/y=3$

$x=2y$ $x=3y$

таких вариантов $x\in\{3;13\}$ – 11   таких вариантов $x\in\{3;9\}$ – 7

$$-(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^{\log_4 5} \le (x^2+6x) \quad | : \log_{x^2+6x}$$

$$\cancel{\log_{x^2+6x}(x^2+6x)^{\log_4 3}\left(\log_{x^2+6x}^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) \le 1}$$

$$\cancel{\log_4 3 + \log_{x^2+6x}\left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) \le 1}$$

$$\cancel{\log_{x^2+6x}\left((x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}\right) \le \log_{x^2+6x}(x^2+6x)}$$

$$\cancel{(x^2+6x-1)(x^2+6x}$$

$$\cancel{(x^2+6x)^{\log_4 5} \le 1\cdot(x^2+6x) + (x^2+6x)^{\log_4 3} \quad | \log_{x^2+6x}}$$

$$\cancel{\log_{x^2} \log_4 5 \le \log_4 3 + \log_{x^2+6x}\left(1 + \log \cdot (x^2+6x)^{\log_4 \frac{4}{3}}\right)}$$

$$\cancel{\log_4 \frac{5}{3} \le \log}$$

Пусть $x^2+6x=t$, тогда

$$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \le 0$$

$$\underset{>0}{t^{\log_4 3}}\left(1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} - t^{\log_4 \frac{4}{5}}\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$t^{\log_4 \frac{4}{5}} - t^{\log_4 \frac{4}{3}} \ge 1$$

$$\frac{t}{t^{\log_4 5}} - \frac{t}{t^{\log_4 3}} \ge 1 \quad | : t > 0$$

$$t\left(\frac{1}{t^{\log_4 5}} - \frac{1}{t^{\log_4 3}}\right) \ge 1$$

$$t\left(t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5}\right) \ge t^{\log_4 8} = t^{\frac{3}{2}} \quad | : t > 0$$

$$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \ge t^{\frac{1}{2}} \qquad \log_t,\ t \ne 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & ① \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & ② \end{cases}$$

ОДЗ: $3xy-2x-3y+2\geq 0$

① $3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

при $3y-2x<0$ – нет решений

при $3y-2x\geq 0$:

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

② $3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3(x^2-2x+1)+\frac{1}{3}(9y^2-12y+4)=3+\frac{4}{3}+4$

$3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2=\frac{25}{3}\,|\cdot 3$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=25$

$3y-2x=3y-2-2x+2=(3y-2)-2(x-1)$

$(3y-2x)^2=(3y-2)^2-4(3y-2)(x-1)+4(x-1)^2$

$(3y-2)^2+4(x-1)^2=5(3y-2)(x-1)$

$(3y-2)^2-5(3y-2)(x-1)+4(x-1)^2=0$

решаем как квадратное относительно $(3y-2)$:

$D=25(x-1)^2-16(x-1)^2=9(x-1)^2\geq 0$

$(3y-2)=\dfrac{5(x-1)\pm 3|x-1|}{2}$

1сл: $(3y-2)=4(x-1)$ или 2сл: $(3y-2)=(x-1)$

подставим в ②: 1сл: $9(x-1)^2+16(x-1)^2=25$

$(x-1)^2=1$

$x-1=\pm 1$

$x=2$ или $x=0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$3y-2=4$ $3y-2=-4$

$y=2$ $y=-\frac{2}{3}$

подставим в исходную систему!

$x=2;\ y=2$

$\underbrace{3\cdot 2}_{6}-\underbrace{2\cdot 2}_{4}=\sqrt{\underbrace{3\cdot 2\cdot 2}_{12}-\underbrace{2\cdot 2}_{4}-\underbrace{3\cdot 2}_{6}+2}$ – верно

$\underbrace{3\cdot 4}_{12} + \underbrace{3\cdot 4}_{12} - \underbrace{6\cdot 2}_{12} - \underbrace{4\cdot 2}_{8} = 4$ – верно

$x = 0$; $y = -\frac{2}{3}$:

$\underbrace{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{-2} - \underbrace{2\cdot 0}_{0} = \sqrt{\underbrace{3\cdot 0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{0} - \underbrace{2\cdot 0}_{0} - 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2}$ – неверно

или: $9(x-1)^2 + (x-1)^2 = 25$

$(x-1)^2 = \frac{5}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{2,5}$

$x = 1 \pm \sqrt{2,5} \Rightarrow$ $3y - 2 = \sqrt{2,5}$ $\quad y = \frac{2+\sqrt{2,5}}{3}$; $x = 1 + \sqrt{2,5}$

или

$3y - 2 = -\sqrt{2,5}$ $\quad y = \frac{2-\sqrt{2,5}}{3}$; $x = 1 - \sqrt{2,5}$

проверка: $3y - 2x \geq 0$

$y = \frac{2+\sqrt{2,5}}{3}$; $x = 1 + \sqrt{2,5}$: $2 + \sqrt{2,5} - 2 - 2\sqrt{2,5} \geq 0$ – неверно

$y = \frac{2-\sqrt{2,5}}{3}$; $x = 1 - \sqrt{2,5}$: $2 - \sqrt{2,5} - 2 + 2\sqrt{2,5} \geq 0$ – верно

$3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$!

$(2 - \sqrt{2,5})(1 - \sqrt{2,5}) - 2 + 2\sqrt{2,5} - \cancel{2} + \sqrt{2,5} + \cancel{2} \geq 0$

$\cancel{2} - \sqrt{2,5} - 2\sqrt{2,5} + 2,5 - \cancel{2} + 2\sqrt{2,5} \geq 0$ – верно

$\boxed{\text{Ответ: } (2;2) ;\ \left(1 - \sqrt{2,5} ;\ \frac{2-\sqrt{2,5}}{3}\right).}$

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$tg\,\alpha$ -? - существует, принимает не менее трёх значений.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha \underbrace{\frac{1+\cos 4\beta}{2}}_{\cos^2 2\beta} + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha \cos 2\beta +$

$\sin 2\beta \cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 = 2\cdot\frac{16}{17} - 1 = \frac{32}{17} - \frac{17}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin 4\beta = 2\cos 2\beta \sin 2\beta = \pm\frac{8}{17}.$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ или $\sin 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2tg\,\alpha \cdot \cos 2\beta}{1+tg^2\alpha} + \frac{(1-tg^2\alpha)\sin 2\beta}{1+tg^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1сл. $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$:

$2tg\,\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + (1-tg^2\alpha)\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+tg^2\alpha) \quad | \cdot\sqrt{17}$

$8tg\,\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha}$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

2сл: $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$:

$2tg\,\alpha\,\frac{4}{\sqrt{17}} + (1-tg^2\alpha)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+tg^2\alpha) \quad | \cdot\sqrt{17}$

$8tg\,\alpha + tg^2\alpha - \cancel{1} = -tg^2\alpha - \cancel{1}$

$2tg\,\alpha(tg\,\alpha+4) = 0$

$tg\,\alpha = 0 \quad tg\,\alpha = -4$

Ответ: $tg\,\alpha = \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & ① \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & ② \end{cases}$

ОДЗ:

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$x=1 \quad y=\frac{2}{3}$

$x\in(-\infty;1]; \; y\in(-\infty;\frac{2}{3}]$

$x\in[1;+\infty); y\in[\frac{2}{3};+\infty)$ или

①: $3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

при $3y-2x<0$ – нет решений, т.к. правая часть неотрицательна.

при $3y-2x\geq 0$: возведём в квадрат:

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1) \Rightarrow \quad x-1=\frac{(3y-2x)^2}{3y-2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \qquad 3y-2=\frac{(3y-2x)^2}{x-1}$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

②: $3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3(x^2-2x+1)+\frac{1}{3}(9y^2-12y+4)=7+\frac{4}{3}$

$y=8x^2-34x+30$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{34}{16}=$

$=\frac{17}{8}$

$3(x-1)^2+\frac{(3y-2)^2}{3}=\frac{25}{3} \quad |\cdot 3$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=25 \Rightarrow \quad 9(x-1)^2+\frac{(3y-2x)^4}{(x-1)^2}=25$

$y_0=\frac{289}{64}\cdot 8-\frac{34\cdot 17}{8}$

$\frac{9(3y-2x)^4}{(3y-2)^2}+(3y-2)^2=25 \qquad 9(x-1)^4-25(x-1)^2+(3y-2x)^4=0$

$+30=\frac{17^2-2\cdot 17^2}{8}+30$

$=\frac{-17^2}{8}+30=$

$=$

$(3y-2)^4-25(3y-2)^2+9(3y-2x)^4=0$

$(3y-2)^2=t, \; t\geq 0$

$t^2-25t+9(3y-2x)^4=0$

$72-34\cdot 3+30=$

$=$

$D=625-36(3y-2x)^4\geq 0$

$t_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{625-36(3y-2x)^4}}{2} \qquad (3y-2x)^4\leq\frac{625}{36}$

$y(3)=0$

$3a+b=0$

$b=-3a$

$A(x_1,y_1)$

$(3y-2x)^2\in\left(-\frac{25}{6};\frac{25}{6}\right)$

т.к. $(3y-2x)^2\geq 0$, то

$\begin{cases} ax_1-3a=y_1 \\ y_1=2+\frac{1}{2x_1-2} \end{cases}$

$0\leq(3y-2x)^2\leq\frac{25}{6}$

$y(1)=4$

$3y-2x\in[-\frac{5}{\sqrt6};\frac{5}{\sqrt6}]$

y

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)