МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$ из (1):

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ из О.Т.Т.: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Подставим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad /\cdot\sqrt{17} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad /\cdot\sqrt{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \quad (1^*) \\ \Leftrightarrow \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \quad (2^*) \end{array}\right.$$

$(1^*) = 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

т.к. $tg\alpha$ определён $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow 4\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

(2^*) $4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -1 \Leftrightarrow$ по О.Т.Т.:

$8\sin\alpha\cos\alpha \underbrace{-\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha \underbrace{-\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$2\sin\alpha(\sin\alpha + 4\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0}{\cos\alpha} = 0 \\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -4 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -4\cos\alpha\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{1}{4}$; 0; -4.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

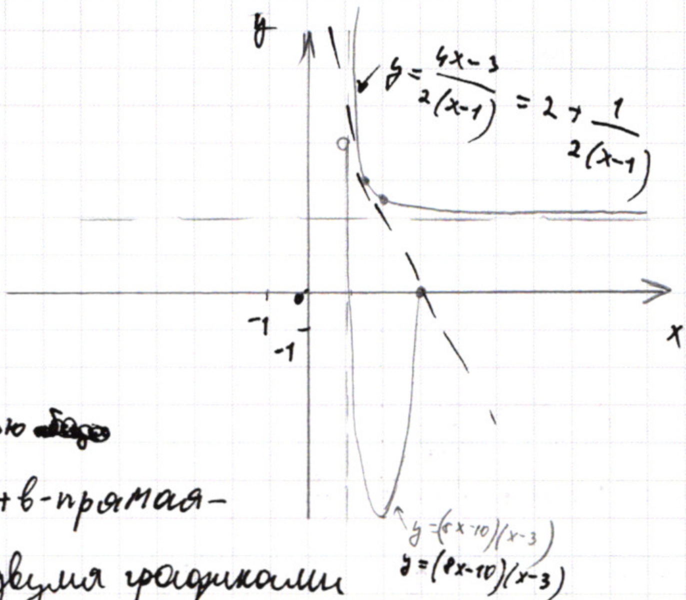
№ 8.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$8x^2-34x+30 = (8x-10)(x-3)$$

Нарисуем:

$y = \frac{4x-3}{2x-2}$; $y = (8x-10)(x-3)$
$x=\frac{5}{4}$; $x=3$ - т. перес. с осью



т.к. должно выполн. ≠ нер-во $\Rightarrow$ $ax+b$ - прямая - должна проходить „между" ост. двумя графиками (см рис.)

Пусть $ax+b$ проходит через т. $(1;4)$ и $(3;0)$:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ b=6 \end{array}\right.$$

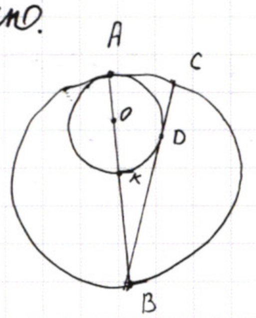
~~Посмотрим~~ Найдём т. кас. прямой ~~ax+b~~ $-2x+b$ и гип. $\frac{4x-3}{2x-2}$:

$$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6 \Leftrightarrow -4x^2+12x+\cancel{4x}-12 = \cancel{4x}-3 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow$$
$$(2x-3)^2=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow \text{т. кас: } x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=3 \Rightarrow$$

наши графики $\left(-2x+6 \text{ и } \frac{4x-3}{2x-2}\right)$ действительно касаются $\Rightarrow$
(пр. прох через 3 т.! $\Rightarrow$ она единств.)

$\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ b=6 \end{array}\right.$ - ед. пара чисел, удовл. условию.

№ 4.



$BC = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2}$

Сначала найдём радиусы:

т.к. AB - диаметр и A - т. кас. $\Rightarrow$ AB проходит и через центр мал. окр-ти ω O. Пусть $AB \cap \omega = K \Rightarrow$

$AO = OK = x$, $KB = y$

По т. о сек. и кас: $BD^2 = BK \cdot BA = y(y+2x) = \frac{169}{4}$ (1)

т.к. AB - диам $\Rightarrow \angle ACB = 90°$

т.к. OD - рад; D - т. кас $\Rightarrow \angle ODB = 90°$ $\Big| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ODB$ ($\angle B$ - общ.; $\angle ACB = \angle ODB = 90°$) $\Rightarrow$

$$\frac{OB}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{13}{2} \times \frac{2}{18} = \frac{13}{18} \Leftrightarrow \frac{x+y}{y+2x} = \frac{13}{18} \Leftrightarrow 18x+18y = 13y+26x \quad 8x = 5y$$

(1): $y(y+2x) = \frac{169}{4} \Big|\cdot 4 \Leftrightarrow y(4y+8x) = 169 \Leftrightarrow y(9y) = 169 \Rightarrow y = \frac{13}{3} \Rightarrow x = \frac{13}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{65}{24} \Rightarrow$

рад. мал. окр-ти ω $r_\omega = x = \frac{65}{24} \Rightarrow$ рад больш. окр-ти Ω $R = \frac{2x+y}{2} = \frac{\frac{65}{12}+\frac{52}{12}}{2} = \frac{117}{24} = \frac{39}{8}$

$$AC = \frac{18}{13} \times \overset{x}{OD} = \frac{18}{13} \times \frac{65}{24} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

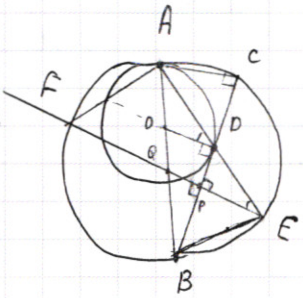
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

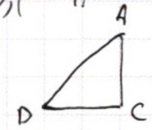
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение).



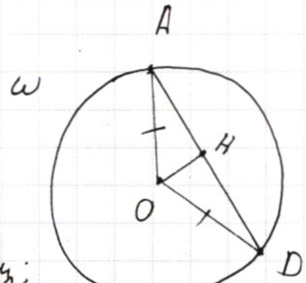
т.к. $EF \perp BC$ и $OD \perp BC \Rightarrow OD \parallel EF$ (накрест леж. $\angle ODB = \angle DPE$) ($DB \cap FE = P$); ($PF \cap AB = Q$) $\Rightarrow$

$PQ \parallel OD \parallel AC$.



$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$

$= \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{\sqrt{325}}{4}$



$DH = AH = \frac{AD}{2}$ ($\triangle AOD$-р/б) $= \frac{\sqrt{325}}{8} = \frac{5}{8}\sqrt{13}$

$\cos \angle ADO = \frac{DH}{OD} = \frac{\frac{5}{8}\sqrt{13}}{} \times \frac{24}{65} = \frac{3\sqrt{13}}{13} =$

$= \cos \angle AEF \Rightarrow$ (т.к. $\triangle$ ~~$\triangle$~~ $ADO \sim \triangle AQE$ (у $\angle A$-общ; $OD \parallel QE \Rightarrow \angle ADO = \angle AEF$-соотв.)

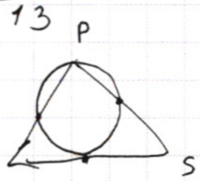
$\angle AEF = \arccos \frac{3\sqrt{13}}{13}$

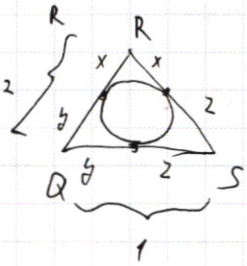
№7

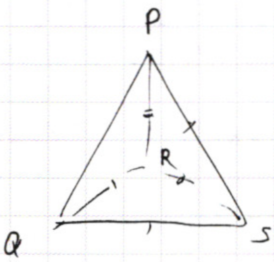
$QR = 2$

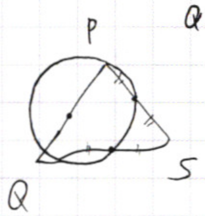
$QS = 1$

$PS = \sqrt{2}$









т.к. сер $\Rightarrow$

~~$y = x$~~

~~$y = 2$~~

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

т.к. x^2+6x стоит ~~под~~ в логарифме $\Rightarrow$ $x^2+6x>0$ (модуль раскрывает без изменения знака)

Замена: $x^2+6x=t>0$

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$ По св-ву log: $t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geq 0$

$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}$ $\qquad 4^{\log_4 t}=t$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}$ $\qquad k=\log_4 t$

$3^k+4^k\geq 5^k$

№5.

$f(1)=[\frac{1}{4}]=0$; $f(2)=[\frac{2}{4}]=0$; $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=[\frac{5}{4}]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(7)=[\frac{7}{4}]=1$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$; $f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(\frac{x}{y})$: $\frac{x}{y}$ при $\begin{matrix}3\leq x\leq 27\\ 3\leq y\leq 27\end{matrix}$ может приним. знач. от 1 до 9. $[1;9]\Rightarrow$

f(нат. числа) мы рассмотрели. Все они ≥ 0.

Остаются комб. f (не нат. числа >0): напр. $\frac{3}{4}$ $f(\frac{3}{4})$ - мы не сможем понять, сколько это точно будет

Таких чисел:

$x=3$ $y=3, 4 \dots 27$ - 24 вар; $x=4$ $y=3;5\dots 27$ - 24 вар; $x=5$ - 24 вар

$x=6$ - 23 вар; $y=4,5,7\dots 27$ $x=7$ - 24 вар $x=8$ - 23 вар $y=3,5,6,7,9\dots 27$; $x=9$ - 23 вар; $x=10$ - 23 вар; $x=11$ - 24 вар

$x=12$ - 21 вар $y=5,7,8,9,10,11,13\dots 27$; $x=13$ - 24 вар; $x=14$ - 23 вар; $x=15$ - 22 вар; $x=16$ - 22 вар; $x=17$ - 24 вар,

$x=18$ - 21 вар; $x=19$ - 24 вар; $x=20$ - 21 вар; $x=21$ - 22 вар, $x=22$ - 23 вар, $x=23$ - 24 вар, $x=24$ - 19 вар,

$x=25$ - 23 вар; $x=26$ - 23 вар; $x=27$ - 22 вар.

$\sum = 24\cdot 9+23\cdot 8+22\cdot 3+21\cdot 3+19\cdot 1$ = Ответ: 548 вар максимально

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\boxed{\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\frac{+\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{+3\pi}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} =$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17}$

$2\alpha = x+y$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad \alpha+\beta = x$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \quad \alpha-\beta = y$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta+\cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\boxed{\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}+\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta = \cancel{2\cos^2 2\beta-1}$

$\frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\sin 2\alpha+\frac{\cos 2\alpha}{\cancel{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$

т.к. tg опр $\Rightarrow \cos\alpha\neq 0$.

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}$

$2\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha(\sin\alpha+4\cos\alpha) = 0$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha} = -\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}$

$2\cos^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$2\cos\alpha(\cos\alpha+4\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = -4\sin\alpha$

$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{4}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha\cancel{-1} = \cancel{-1}$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+1) = 0$

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$3\leq x\leq 27$

$3\leq y\leq 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

(2) $3x^2+3y^2=3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0$

$3(x+y)^2-6x(y+1)-4(y+1)=0$

$3(x+y)^2-(6x+4)(y+1)=0$

(1) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 \Leftrightarrow 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

9+6

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3(x+y)^2-(6x+4)(y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$3y(3y+1)+2x(2x+1)-15xy-2=0$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$3y(3y-3x+1)+2x(2x-3y+1)-2=0$

$\cancel{3(x^2+y^2+2xy)+6xy-6x-4y-4=0}$

$y>\frac{2}{3}x$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3(x^2+y^2)-6x-4y=4 \end{cases}$$

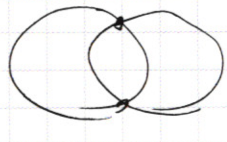
$3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$3y^2-4y-7=0 \Leftrightarrow 3\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{7}{3}\right)$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$ $\quad$ $9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$3(x^2+y^2+2xy)-6xy-6x-4y-4=0$

$3(x+y)^2-6x(y+1)-4(y+1)=0 \Leftrightarrow 3(x+y)^2-(6x+4)(y+1)=0$



$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2$

$3y(3y+1)+2x(2x+1)-15xy=2$

$3y(3y-3x+1)+2x(2x-3y+1)=2$

~~$3x^2-6x+3$~~

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

Замена: $x^2+6x = t$

$\boxed{t^{\log_4 3} + t > |t|^{\log_4 5}}$

$\cancel{3^{\log_4 t} + t > 5^{\log_4 t}}$

$\cancel{3^{\log_4 t} - \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + t > 0}$

$\cancel{3^{\log_4 t}\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_4 t} + t\right) > 0}$

$\cancel{t^{\log_4 3}\left(1 - \log t^{\log_4 \frac{5}{3}} + t\right) > 0}$

$t^{\log_4 3} + t > |t|^{\log_4 5}$ $\boxed{t > 0}$ - всегда

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} > 0$

$\boxed{t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} - t^{\log_4 5} > 0}$

$t^{\log_4(4-1)} + t - t^{\log_4(4+1)} > 0$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} > 0$

$\log_4 t = k$

$3^k + 4^k - 5^k > 0$

$3^k + 4^k > 5^k$

$3^k + 4^k = 5^k$

$k < 1$

$k < 0$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} > \frac{1}{5}$ $-1 < k < -2$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} > \frac{1}{25}$

$16 + 9 = 144$

$17 \cdot 17 = 119$, 17, 289

$x_0 =$ 60

$8x^2 - 34x + 30 = 0$

$4x^2 - 17x + 15$

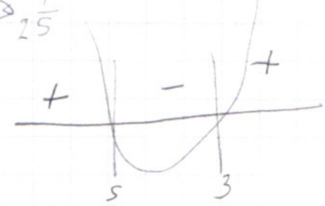
$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8}$ $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$\frac{289}{8} - \frac{289}{4} + \frac{240}{8} = 0\ 8$

$\frac{15}{4} =$

$-\frac{49}{8}$

$8 - 34 + 30$



$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$8x^2 - 34x + 30 = 2(\cancel{4x^2 - 17x + 15})$

$8x^2 - 34x + 30 = (x-3)(8x-10) = 0$

$x_0 = +\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ $\frac{5}{4}$

$x \in (1; 3]$

$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x + 6$

$4x - 3 = -4x^2 + 4x + 12x - 12$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq (8x-10)(x-3)$

$\frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$\frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$

$ax + b$ $\begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6 \end{array}}$

$\begin{cases} a + b = 4 \\ \frac{3}{2}a + b = 3 \end{cases}$

$\frac{1}{2}a = -1$

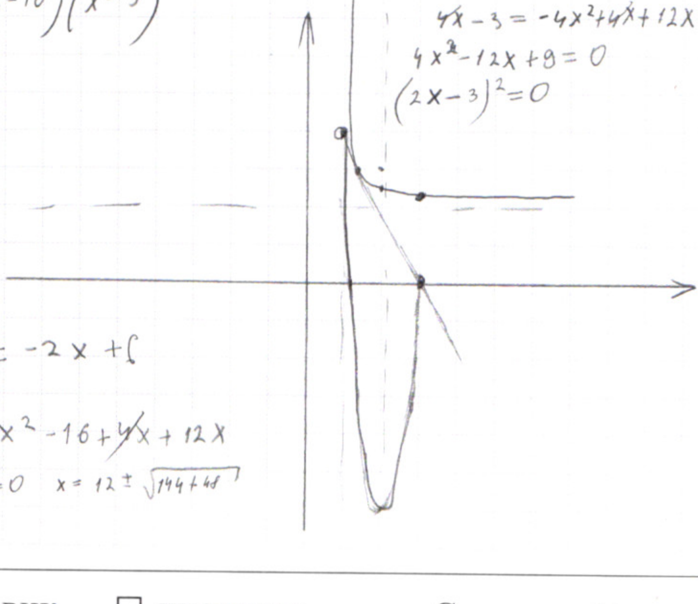
$a = -2$

$b = -6$

$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x + 6$

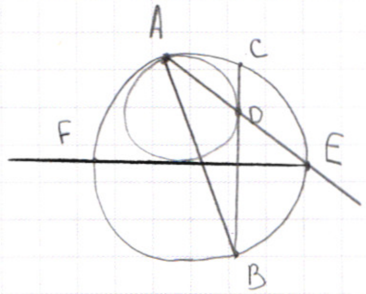
$\cancel{4x} - 3 = -4x^2 - 16 + \cancel{4x} + 12x$

$4x^2 - 12x - 3 = 0$ $x = 12 \pm \sqrt{144 + 48}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\triangle ABC$ - п/у

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

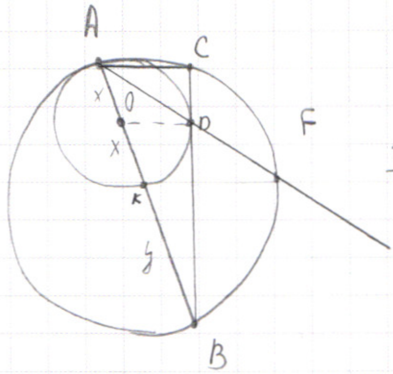
$\log_4 t = k$

$3^k + 4^k \geq 5^k$

3

$\triangle BOD \sim \triangle ABC \quad k = \frac{13}{2} \times \frac{2}{18} = \frac{13}{18}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$BD^2 = KB \cdot BA$

$BK = y$

$\frac{169}{4} = BK(BK + 2x)$

$\frac{BK + x}{BK + 2x} = \frac{13}{18} \qquad \frac{y + x}{y + 2x} = \frac{13}{18}$

$18y + 18x = 13y + 26x$

$8x = 5y$

$\times \begin{array}{r} 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 117 \end{array}$

$\frac{65}{12} + \frac{13}{3} = \frac{65 + 52}{12} = \frac{117}{12}$

$\frac{169}{4} = y(y + 2x) \quad / \cdot 4$

$AB = \frac{117}{12} = \quad BC = \frac{18}{2}$

$= \frac{39}{4}$

$169 = y(4y + 8x)$

$r = \frac{65}{24}$

$169 = y(4y + 5y) = 9y^2$

$y = \frac{13}{3} \qquad x = \frac{5y}{8} = \frac{65}{24} \qquad R = \frac{117}{24}$

$\times \begin{array}{r} 81 \\ 16 \\ \hline 486 \\ 81 \\ \hline 1296 \\ +225 \\ \hline 1521 \end{array}$

$FK^2 = \cancel{BA \cdot AD}$ $\cancel{AR \cdot AF}$ $FD \cdot FA$

$\cancel{AC^2} =$

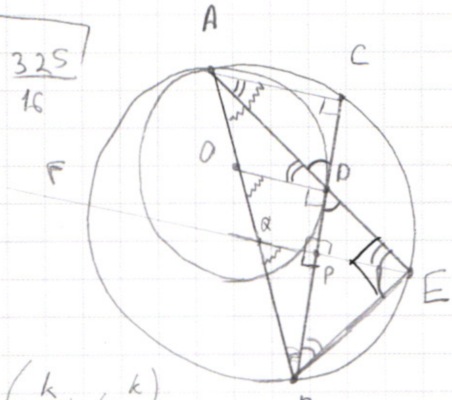
$\cancel{OD = 13}$ $AC = \frac{18}{23} \times \frac{65}{24} = \frac{15}{4}$

$\frac{225 + 100}{16} = \sqrt{\frac{325}{16}}$

$\frac{225}{16} + 81 = \frac{1521}{16}$

$\begin{array}{r|l} 325 & 25 \\ -25 & 13 \\ 75 & \end{array}$

$\alpha + \beta = 90°$



$\log_4 5 = \log_4 3 \cdot \frac{5}{3} =$

$= \log_4 3 + \log_4 5 - \log_4 3$

$\frac{PB}{PE} = \frac{PE}{PD}$

$PE^2 = PB \cdot PD$

$\log_4 (3^k + 4^k)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |\cdot 3$

$9x^2+9y^2-18x-12y-12=0$

$9y^2=15xy-2x-3y-4x^2+2$

$9y^2=18x+12y+12-9x^2$

$3\leq x\leq 27$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)$

p-простое.

$f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)$

$f(15)=\left[\frac{15}{4}\right]=3$

$\cancel{f(0)=\left[\frac{0}{4}\right]=0}$

$f(1)=\left[\frac{1}{4}\right]=0$ $\quad f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ $\quad f(5)=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=0 \quad f(10)=$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

3

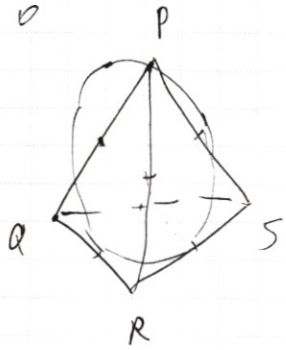
$$\begin{array}{r} \times\ 24 \\ 9 \\ \hline 216 \\ +\ 184 \\ \hline 400 \\ +\ 466 \\ 63 \\ \hline 529 \\ +\ 19 \\ \hline 548 \end{array}$$

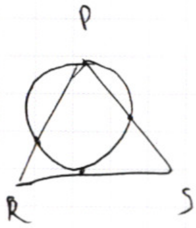
$$\begin{array}{r} \times\ 23 \\ 8 \\ \hline 184 \end{array}$$ 66 63 19

$QR=2$

$QS=1$

$PS=\sqrt{2}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)