МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \ (1) \end{cases}$ Для (1) имеем:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot$

$\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; т.о. (поделим (1) на 2):

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$.

1) Для $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{2}{\sqrt5}} + \underbrace{\sin 2\beta}_{\frac{1}{\sqrt5}}\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}(2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $2\,tg\alpha = -1 \Leftrightarrow tg\alpha = \boxed{-0{,}5}$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\cos\alpha = 0}_{\nexists\, tg\alpha} \vee \overline{2\sin\alpha = -\cos\alpha} \ \Big| \cdot\frac{1}{\cos\alpha} \ (\cos\alpha \ne 0)$

2) Для $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{2}{\sqrt5}} + \underbrace{\sin 2\beta}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}(2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$ $tg\alpha = \boxed{2}$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin\alpha = 0}_{tg\alpha = 0} \vee \overline{2\cos\alpha = \sin\alpha} \cdot \Big|\frac{1}{\cos\alpha} \ (\cos\alpha \ne 0)$

Т.о., $tg\alpha \in \{-0{,}5; 0; 2\}$. **Ответ:** $-0{,}5; 0; 2$

(2) $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-2y+2 = \sqrt{y(x-2)-(x-2)} \\ x^2-4x+4+9(y^2-2y+1) = 12+9+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$ Замена: $a = x-2$, $b = y-1$. Тогда:

1. Условие: $a-2b \geq 0 \wedge ab \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{a \geq 2b \wedge ab \geq 0}$ I.

2. $\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \ (1) \\ a^2+9b^2 = 25 \ (2) \end{cases}$ (1): $a^2-4ab+4b^2 = ab$

$a^2-5ab+4b^2 = 0$

$a(a-b)-4b(a-b) = 0$

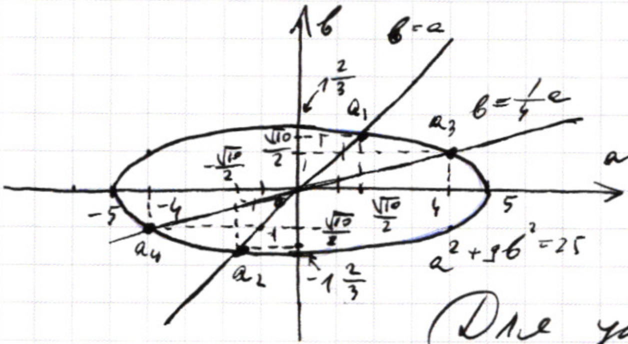
(2): $a^2+9b^2 = 25$ $\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 4b \end{array}\right.$ — объединение двух прямых:

Эллипс, центр $(0;0)$. $b = a$ и $b = \frac{1}{4}a$.

Построим график системы (1) и (2):

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)



Как видно по графику, $a_3=4$ ($b_3=1$), $a_4=-4$ ($b_4=-1$). Для a_1 и a_2:

$$\begin{cases} b=a \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow 10a^2=25 \Leftrightarrow a^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2};$$

$$\begin{cases} a_1=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b_1=\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a_2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b_2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Для условия I:

$\begin{cases} a \geq 2b \text{ — не уд-ет } (a_4; b_4) \text{ и } \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)=(a_1;b_1) \\ ab \geq 0 \text{ — уд-ют все реш-я} \end{cases}$

Т.о., для $x=a+2$ и $y=b+1$ имеем:

$\left[\begin{array}{l} x=2+4=6 \text{ и } y=1+1=2 \\ x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ и } y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

(3)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \quad (1) \end{cases}$$

(1): Замена: $t=\log_{12}(x^2+18x)$. Тогда:

$12^{\log_{12}(x^2+18x)} = 12^t = x^2+18x$. Имеем для (1):

$5^t + 12^t \geq (12^t)^{\log_{12}13}$. $(12^t)^{\log_{12}13} = (12^{\log_{12}13})^t = 13^t$.

$5^t+12^t \geq 13^t$. Числа 5, 12 и 13 образуют

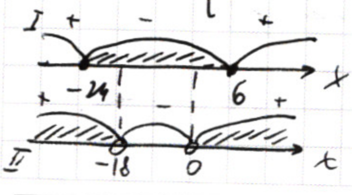
пифагорову тройку (т.е. $5^2+12^2=25+144=169=13^2$), а потому:

$\left| \begin{array}{l} \text{для } t>0: \quad 5^t+12^t \geq 13^t \text{ — выполняется для } t \leq 2 \\ \text{для } t<0: \quad \frac{1}{5^t} > \frac{1}{13^t} \ (5^t<13^t) \\ \qquad\qquad \frac{1}{12^t} > \frac{1}{13^t} \ (12^t<13^t) \end{array} \right| \Rightarrow \frac{1}{5^{-t}}+\frac{1}{12^t} > \frac{1}{13^t}$.

т.е., для $t \in R$.

Получаем: $t \leq 2$ ($t=0$: $5^0+12^0=1+1=2 \geq 13^0=1$). Тогда:

$$\begin{cases} \log_{12}(x^2+18x) \leq 2 = \log_{12}144 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+18x-144 \leq 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \quad \text{I} \\ x(x+18)>0 \quad \text{II} \end{cases}$$



Т.о., $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

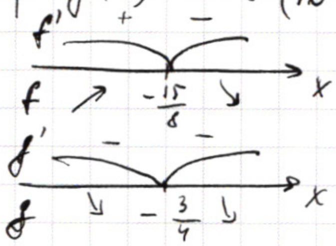
$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$f(x) = -8x^2-30x-17$ | $f'(x) = -16x-30 = -2(8x+15)$

$g(x) = 3+\frac{2}{4x+3}$ | $g'(x) = 2\left(-\frac{1}{(4x+3)^2}\right) = -\frac{2}{(4x+3)^2}$

f' – нуль: $x = -\frac{15}{8}$.

g' – нулей нет.



С-но, $x_{max} = \left(-\frac{15}{8}\right)$ – максимум ф-и f, в котором она принимает наибольшее значение.

(1) $\begin{cases} a\left(-\frac{11}{4}\right)+b \geq \frac{11}{4} \\ a>0 \end{cases}$ – ф-ия $ax+b$ будет возрастать на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, а потому $ax+b \geq 3+\frac{2}{4x+3}$. } принимать значения

(2) $a\left(-\frac{15}{8}\right)+b \le f\left(-\frac{15}{8}\right) = \frac{255}{8}$ – ф-я $ax+b$ будет не меньше, чем f. Из (1) и (2):

$\begin{cases} -\frac{11a}{4}+b \geq \frac{11}{4} \\ -\frac{15a}{8}+b \le \frac{255}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{22a}{8}+b \geq \frac{22}{8} \\ \frac{15a}{8}-b \geq -\frac{255}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7a}{8} \geq -\frac{233}{8} \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

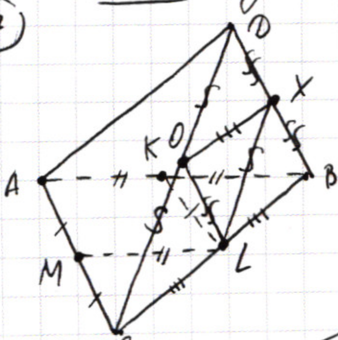
$\Leftrightarrow 0<a \le \frac{233}{7} = 33\frac{2}{7}$

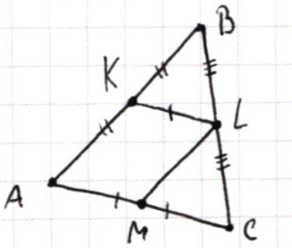
Для таких a имеем: $b \geq \frac{22}{8}(a+1); \frac{22}{8}$

$b \geq \frac{22}{8}(a+1) = \frac{22}{8}\cdot\frac{\cancel{240}}{7} = \frac{660}{7} = 94\frac{2}{7}$

Ответ: для $a \in \left(0; 33\frac{2}{7}\right)$ и, соот-но, $b \in \left(\frac{22}{8}; 94\frac{2}{7}\right)$

7





1) В $\triangle ABC$: KL – средняя линия, с-но, $KL = \frac{1}{2}AC = AM$, и $KL \parallel AC$. Аналогично: $ML = \frac{1}{2}AB = AK$, $ML \parallel AB$.

Тогда AKLM – параллелограмм; для $\triangle KBL$ и $\triangle CLM$: по лемме о подобии, $\triangle KBL \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \triangle ABC$ и $\triangle CLM \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \triangle CBA \Rightarrow S_{KBL} = S_{CLM} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

получаем: $S_{AKLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. г) Аналогично для (BCD): $S_{LON} = \frac{1}{4} S_{CBD}$.

□ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\operatorname{tg}\alpha = ?$ — $\exists \operatorname{tg}\alpha$, не меньше 3-х значений.

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$= 2(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2(\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta + \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha) =$

$= \sin 2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin 2\beta + \sin 2\beta\cos^2\alpha + \sin 2\alpha\sin^2\beta = \sin 2\alpha + \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(4\alpha+4\beta)\cos(4\beta) = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin(4\alpha+4\beta)\cos 4\beta = -\frac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(4(\alpha+\beta))\cos 4\beta = -\frac{2}{5} \\ \sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{\sqrt5}{5} \end{cases}$$

$= 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$-\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

$1-2\sin^2\alpha$ $\quad 2\cos^2\alpha - 1$

1) если $\sin 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

2) если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$: $\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 1-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ $\quad 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$ $\quad 2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$= \frac{1}{\sqrt5}(2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) = \sqrt5\cdot\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{aligned} &\cos\alpha = 0 \\ &2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \ (1) \end{aligned}\right.$$

(1): $2\sin\alpha = -\cos\alpha \quad |\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$

$2\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ 1

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$$\left[\begin{aligned} &\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad 2 \\ &\cos\alpha = \sin\alpha \ (2) \end{aligned}\right.$$

(2): $\sin\alpha = \cos\alpha \quad |\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = 1$ 3

Ответ: $-\frac{1}{2}; 0; 1$

$(3y)^2 \quad 2\cdot 3y\cdot 3$

2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \ (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \ (2) \end{cases}$$

$+9y+4$

(2): $x^2-4x+4+9y^2-18y+9 = 12+13 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2$ $\quad \omega_2((2;+1);5)$

(3): $x^2-5xy+x+4y^2+2y-2 = 0$

$x^2+2x+1-x-5xy+4y^2+8y+4-6y-2$

$-5 = 0$

$(x+1)^2 + 4(y+1)^2$

(1): $x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2-2y+2$

$(x-2)-2(y-1)$

$$\begin{cases} x > 2y \\ x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2 \ (3) \end{cases}$$

$\sqrt{x(y-1)-2y(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)} = x-2y$

Замена: $a = x-2$, $b = y-1$. Тогда

(1): $ab = a^2-4ab+4b^2$

$a^2-5ab+4b^2 = 0$

$a(a-b)-4b(a-b) = 0$

$$\left[\begin{aligned} &a = b \\ &a = 4b \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \sqrt{ab} = a-2b \ (1) \\ a^2+9b^2 = 25 \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \text{ или } a = 4b \ (1) \\ a^2+9b^2 = 25 \ (2) \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

③ $5^{\log_{12}(x+18)+\log_{12}x}+x^2 \geq |x(x+18)|^{\log_{12}13}-18x$ | Замена: $t=\log_{12}(x(x+18))$. Тогда: $x(x+18)=12^{\log_{12}(x(x+18))}$, и:

$5^{\log_{12}(x(x+18))}+x(x+18)-|x(x+18)|^{\log_{12}13}\geq 0$

$5^t+12^t-|12^t|^{\log_{12}13}\geq 0$; $5^t+12^t-(12^{\log_{12}13})^t\geq 0$; $(12^t>0)$

$5^t+12^t-13^t\geq 0$; $5^t+12^t\geq 13^t$ (1) 5, 12, 13 – пифагорова тройка

(т.е. $5^2+12^2=25+144=169=13^2$), с-но: $t\in[0,2]$ уд-ют нер-ву (1);

для $t<0$:

$5^t<13^t \Rightarrow \frac{1}{5^t}>\frac{1}{13^t}$
$12^t<13^t \Rightarrow \frac{1}{12^t}>\frac{1}{13^t}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{5^t}+\frac{1}{12^t}\geq\frac{1}{13^t}$

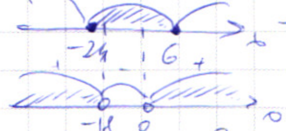
$\Rightarrow$ (1) выполняется для всех $t<0$.

$t\leq 2 \Leftrightarrow$ ~~$x^2+18x-2\leq 0$~~ с учетом ~~того~~, что

$\log_{12}(x(x+18))\leq 2=\log_{12}144 \Leftrightarrow 0<x(x+18)\leq 144$. Тогда:

$\begin{cases} x^2+18x-144\leq 0; \\ 0<x^2+18x \end{cases}$ $\begin{cases} (x+24)(x-6)\leq 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases}$

($12\cdot 12=24\cdot 6$)



т.о. $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

⑤ $D(f)$: $x>0, x\in Q$.

Для $a\in D(f)$ и $b\in D(f)$:

$f(ab)=f(a)+f(b)$. Для простого p: $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$.

$x\in N, y\in N$: $1\leq x\leq 24$, $1\leq y\leq 24$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$. – число пар $(x;y)$?

$\begin{cases} f(xy)=f(x)+f(y) \\ f\left(\frac{x}{y}\right)=0 \end{cases}$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}=3{,}75$

$-(8x^2+30x+17)=-(8x^2$

⑥ $g\downarrow$ на $D(g)$ $g(x)$ | $g'(x)=\frac{-2}{(4x+3)^2}$ $g'(x)=0$ – нет корней $f(x)$ $D=900-32\cdot 17=$

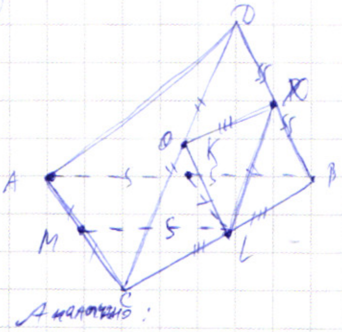
$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17$ $f'(x)=-16x-30=-2(8x+15)$

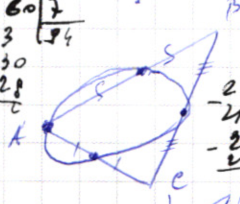
$g\left(-\frac{11}{4}\right)=3+\frac{2}{3-11}=3-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}=2{,}75$

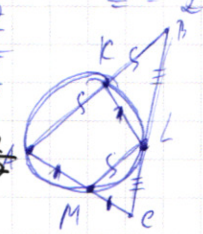
$-8x^2-30x-17=-2(4x^2+15x)-17=-2(2x+\frac{15}{4})^2+2\cdot 3{,}75^2-17$ $f\nearrow$ $-\frac{15}{8}$

⑦

$\begin{array}{r|l} 660 & 7 \\ -63 & 94 \\ 30 & \\ -28 & \\ 2 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 233 & 7 \\ -21 & 33 \\ 23 & \\ -21 & \\ 2 & \end{array}$ $33\frac{2}{7}$



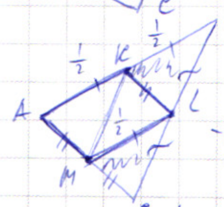




$AK \parallel LM$, $AK=LM$ (средняя линия);

$AM=KL$ (по теореме)

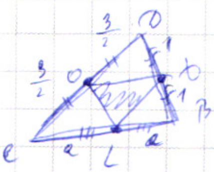
$\Rightarrow AKLM$ – параллелогр.



$S_{ABC}=S_1$; $S_{KBL}=S_{MLC}=\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{4}S_1$. т.о.:

$S_{KBL}+S_{MLC}=\frac{1}{2}S_1$

Аналогично:



$-\frac{225}{8}+\frac{225}{8}\cdot\frac{15}{16}+\frac{17\cdot 15}{8}=\frac{255}{8}$

$S_{LOX}=\frac{1}{4}S_{CDB}=\frac{1}{4}S_2$

$g\downarrow$ на $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

$ax+b=\frac{11}{4}$ – чтобы $(ax+b)\nearrow$ на $\left[-\frac{11}{4};\frac{3}{4}\right]$

2) $f\nearrow$ на $\left[-\frac{11}{4};-\frac{15}{8}\right]$, $f\downarrow$ на $\left[-\frac{15}{8};+\infty\right)$ $a>0$

$\begin{cases} a\left(-\frac{15}{4}\right)+b=f\left(-\frac{11}{4}\right)=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=22-17=5 \\ ~~a\ldots~~ \\ a\left(-\frac{15}{8}\right)+b<f\left(-\frac{15}{8}\right)=\frac{255}{8} \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 (продолжение) (1): объединение прямых $b=a$ и $b=\frac{1}{4}a$ $\quad \frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

(2): Эллипс, центр $(0;0)$.

$\begin{cases} x=a+2 \\ y=b+1 \end{cases}$, координаты $(x;y)$: точки a_1 и a_2:

$(6;2)$; ~~$(-2;0)$~~;

~~$\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2}; 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$~~;

$\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$\begin{cases} a=b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$10b^2=25$

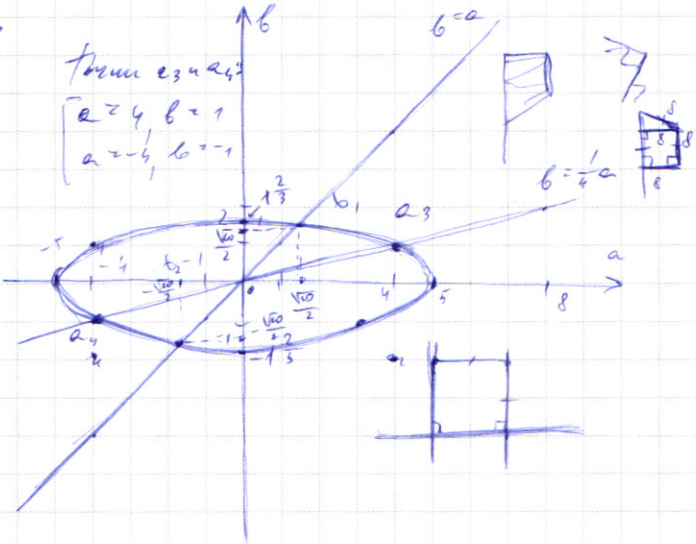
$b^2=\frac{5}{2}$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

Точки a_3, a_4:

$\left[\begin{array}{l} a=4, b=1 \\ a=-4, b=-1 \end{array}\right.$



Условие:

$x>2y$: $6>4$ — ok

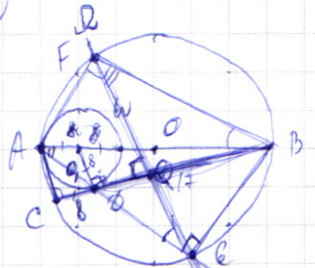
$-2>0$ — не ok

$2+\frac{\sqrt{10}}{2}>2+\frac{2\sqrt{10}}{2}$ — не ok

$2-\frac{\sqrt{10}}{2}>2-2\frac{\sqrt{10}}{2}$ — ok

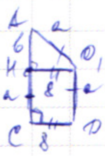
Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

4



1) $\angle ACB=90°$ (вписанный в Ω, опирается на диаметр AB),

$\angle CDO_1=90°$ (между касательной BC и радиусом O_1D). Тогда



$b^2+64=a^2$

$8a+4b=8\cdot\frac{a+c+b}{2}=8a+4b$

Ответ $\left(\frac{9}{4}; \frac{215}{16}\right)$

$\begin{array}{r} 26 \\ 255 \\ \times 4 \\ \hline 1020 \end{array}$

$\begin{array}{r} 33 \\ \times 17 \\ \hline \end{array}$

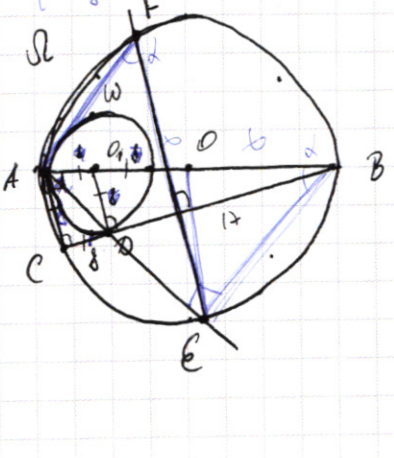
6 (продолжение) $\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b=\frac{11}{4}, \\ -\frac{15}{4}a+b=5, \\ -\frac{15}{8}a+b<\frac{255}{8} \end{cases}$

$a=5-\frac{11}{4}=\frac{9}{4}=2{,}25$. Тогда

~~$-\frac{15\cdot 2{,}25}{8}+\frac{b}{2}$~~

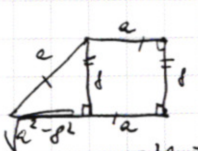
$\frac{15}{4}\cdot\frac{9}{4}+5=b=\frac{215}{16}$

$\frac{215}{16}-\frac{15\cdot 9}{32}=\frac{430-135}{32}=\frac{295}{32}<\frac{255}{8}=\frac{1020}{32}$



$d^2+8^2=25^2$

$d=\sqrt{(25-8)(25+8)}=$
$\quad 17 \quad 33$



~~$4\sqrt{a^2-8^2}+8a=\frac{2a+\sqrt{a^2-8^2}}{2}\cdot 8$~~

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА