МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

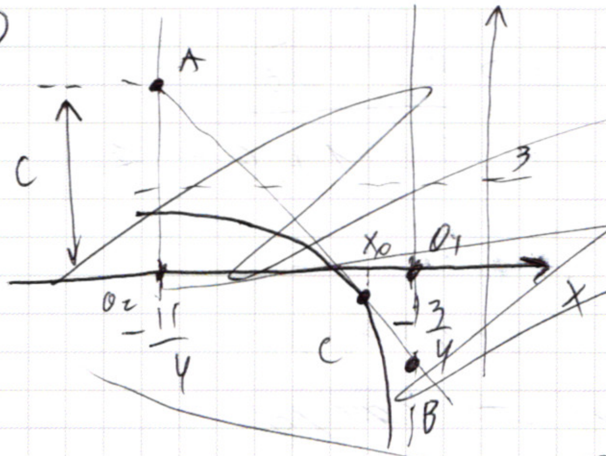
$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

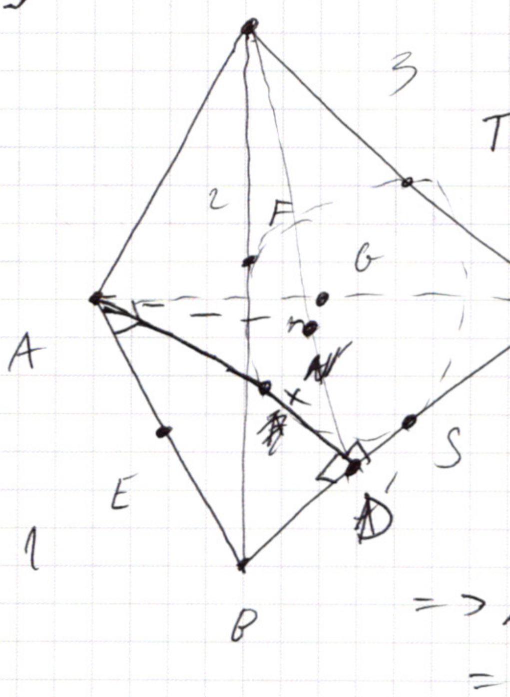
3



• зафиксируем C и найдём крайние значения при O, B тогда AB — касат к $F(x)$ в т. C.

~~$tg\,\alpha = F'(x) = -\frac{2}{(4x_0+3)^2}\cdot 4$~~

=>



т.к. A, T, F, G, E, S — лежат на одной сфере =>

т. A, E, G, S — лежат на проекции сферы на (ABC) на окружности, но AGSE — параллелограмм

=> AGSE — прямоугольник

=> $\angle A = 90°$

• D' — проекц D на (BC), тогда F, A', T, S — лежат на одной окр. (окр. 9 точек).

=> D' — лежит на нашей сфере.

=> проекц D' на (ABC) — лежит на окр 9 точек ΔABC => $AD' \perp BC$ и $DD' \perp BC$ => $AD \perp BC$.

Тогда по Th Пифагора:

$(BD')^2 - (D'C)^2 =$

$= 1 - AC^2 = 4 - 9$

$\Rightarrow AC^2 = 1 + 9 - 4 = 6 \Rightarrow \underline{AC = \sqrt{6}}$

$\Rightarrow$ по Th Пифагора $BC^2 = 1 + 6 = 7$

$\Rightarrow \underline{BC = \sqrt{7}}$

• Заметим, что при гомотет H_A^2; наша сфера $\to$ сферу ~~в~~ которую вписан ΔABC.

и ~~R~~ наим рад сферы будет тогда, когда у гомотечной сфере бедет наим радиус.

~~ОТВЕ~~

$\Rightarrow$ Вписанная сфера = сфера после H_A^2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

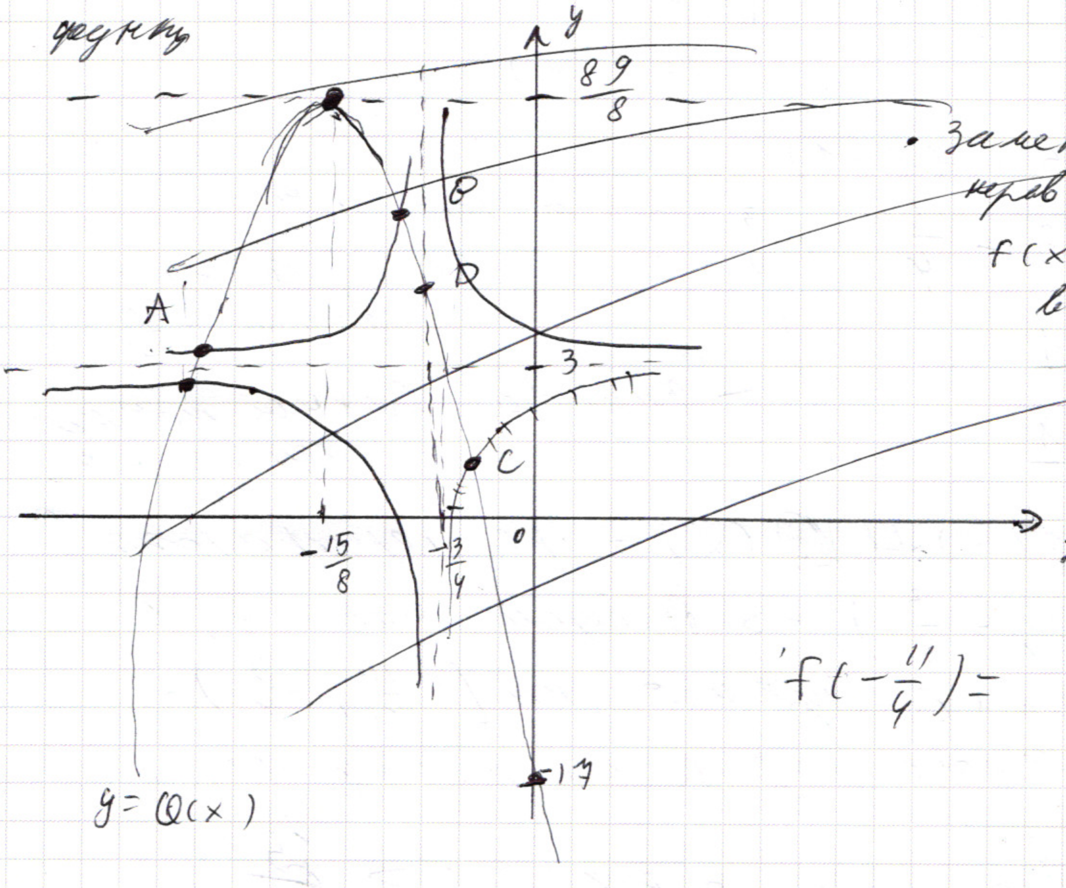
6

• $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = f(x)$

• $-8x^2-30x-17 = -\left((\sqrt{8}x)^2 + 2\cdot(\sqrt{8}x)\cdot\frac{15}{\sqrt{8}} + \frac{225}{8} - \frac{89}{8}\right) =$

$= -\left(\sqrt{8}x + \frac{15}{\sqrt{8}}\right)^2 + \frac{89}{8} = -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8} = Q(x)$

• Построим графики схематично этих функц



• Заметим, что нерав.

$f(x) \le Q(x)$

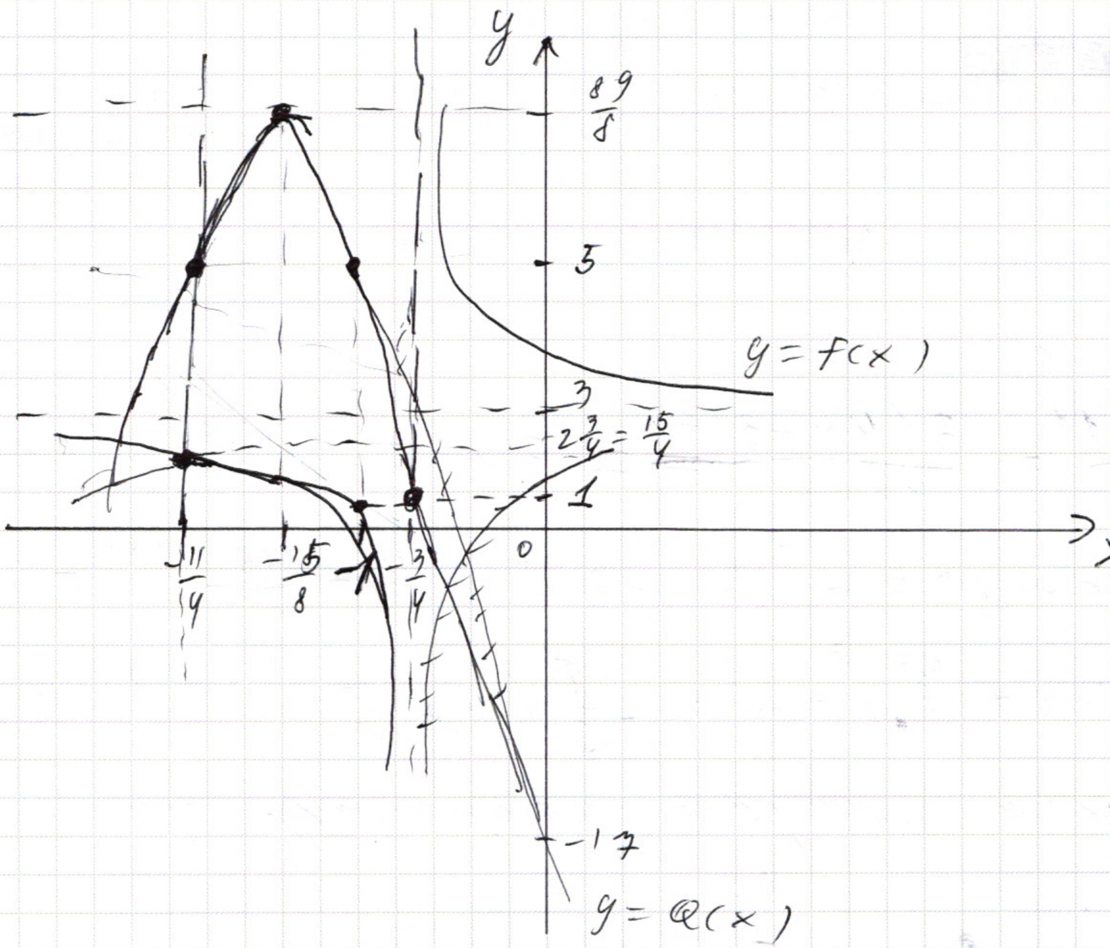
выполняется только на промеж.

$A \to B$

т.к. требуется

$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) =$



$Q(-\frac{11}{4}) = 5 = f(-1)$

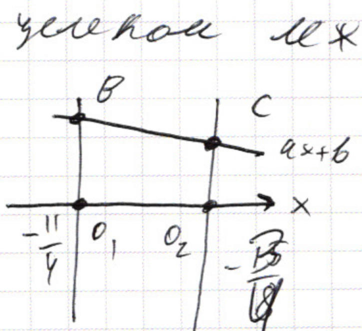
$f(-\frac{11}{4}) = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$ => т. пересечения $f(x)$; $Q(x)$ — дальше $-\frac{11}{4}$

$f(-1) = 1$

$Q(-\frac{3}{4}) = 1$

— найдём важн. точки пересечения.

, тогда $f(x)$ и $Q(x)$ — не пересекаются на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ => Выберем такие a, b, чтобы $ax+b$ — прямая на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ — целиком лежала под $Q(x)$ и над $f(x)$.



тогда ~~$O_1B \le$~~ должно выполняться:
$$\begin{cases} O_1B \geq \frac{15}{4} \\ O_2C \leq 1 \\ O_2C \geq \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

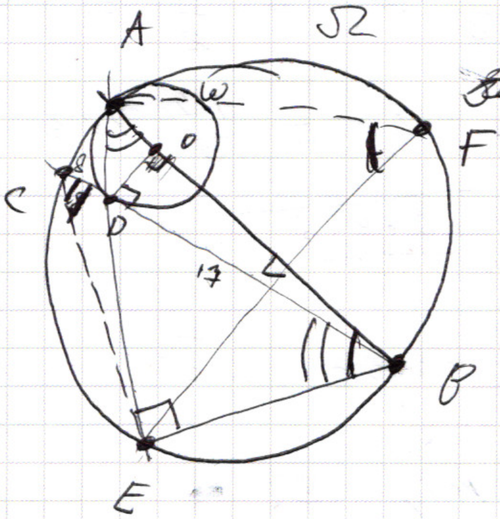
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



• По лемме Архимеда E — середина дуги BC Ω.

$\Rightarrow \angle CBE = \angle ECB$, но из-за вписанная

и $\angle EAB = \angle ECB \Rightarrow EB$ — касат к описанной окр $\triangle DAB \Rightarrow$

$EB^2 = ED \cdot EA = ED(ED + AD) =$

$= ED^2 + ED \cdot AD$, но $ED \cdot AD = CD \cdot DB$ (т.к $\cap$ хорды) 8, 17

$\Rightarrow EB^2 = ED^2 + 8 \cdot 17 \Rightarrow EB^2 - ED^2 = 8 \cdot 17$

• т.к AB — диаметр $\Omega \Rightarrow \angle AEB = 90°$

$\Rightarrow$ по Th. Пифагора: $ED^2 + EB^2 = 17^2$

$\Rightarrow 2EB^2 = 17^2 + 8 \cdot 17 = 17 \cdot 25$

$\Rightarrow EB = 5\sqrt{\frac{17}{2}} \Rightarrow ED^2 = -\frac{17 \cdot 25}{2} + \frac{2 \cdot 17 \cdot 17}{2} =$

$= \frac{17}{2} \cdot \frac{2 \cdot 17 - 25}{1} = \frac{17}{2}(34 - 25) = \frac{17}{2} \cdot 9$

$\Rightarrow ED = \sqrt{\frac{17}{2}} \cdot 3$ $\Rightarrow$ т.к $AD \cdot DE = 8 \cdot 17$

$\Rightarrow AD = \frac{8 \cdot 17}{\sqrt{\frac{17}{2}} \cdot 3} = \frac{8}{3}\sqrt{34} = \frac{8}{3}\sqrt{2 \cdot 17}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

• $EA = ED + AD = 3\sqrt{\frac{17}{2}} + \frac{8}{3}\sqrt{2\cdot 17} =$

$= \sqrt{\frac{17}{2}}\left(3 + \frac{8}{3}\cdot 2\right) = \sqrt{\frac{17}{2}}\left(\frac{9+16}{3}\right) = \frac{25}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}$

, тогда, по Th. Пифагора

$AB^2 = AE^2 + EB^2 = \frac{17}{2}\cdot\frac{625}{9} + 25\cdot\frac{17}{2} =$

$= \frac{17}{2}\left(\frac{625+225}{9}\right) = \frac{17}{18}\cdot 850 = \frac{17}{9}\cdot 425$

, но $AB^2 = 4R^2 \Rightarrow \cancel{R = \sqrt{\frac{17\cdot 425}{18}}}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17\cdot 425}{9}}$ ← радиус Ω

r – радиус ω; O – центр ω

$\Rightarrow OB = 2R - r$; и $\angle ODB = 90^\circ$ (касат)
$OD = r$;

Th Пифагора:

$(2R-r)^2 = r^2 + 17^2$; $4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 17^2$

$r = \frac{-17^2 + 4R^2}{4R} = \frac{-17^2 + \frac{17\cdot 425}{9}}{4R} =$

$= \frac{17}{4R}\left(\frac{425 - 17\cdot 9}{9}\right) = \frac{17\cdot 272}{4\cdot R\cdot 9} = \frac{68\cdot 17}{R\cdot 9}$

$\Rightarrow r = \frac{68\cdot 17}{9}\cdot 2\sqrt{\frac{9}{17\cdot 425}} = 136\sqrt{\frac{17}{9\cdot 425}}$

III, заметим, что при симметрии относ.

AB; $E \to F$ ~~$\Rightarrow \triangle AEF \to \triangle AFE$~~

и из-за вписан $\Rightarrow \triangle AFB \to \triangle AEB$ (равные)

$\angle AFE = \angle ABE = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{EB} = \frac{25}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

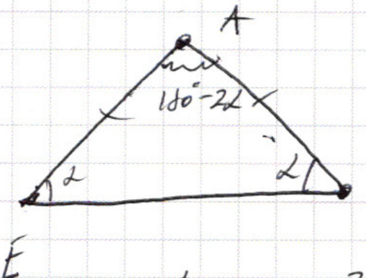
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)

и из-за $\Delta AFB = \Delta AEB$

$\Rightarrow AF = AE$ — известно $= \frac{25}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}$



т.к $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{25}{9} + 1 = \frac{25+9}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{34}$

но $\cos 2\alpha = -\cos(180° - 2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{9}{17} - 1 =$

$= \frac{9-17}{17} = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos(180° - 2\alpha) = \frac{8}{17}$

$\Rightarrow \angle EAF$ — острый $\Rightarrow \sin(180° - 2\alpha) = \sqrt{1 - \frac{64}{17^2}} =$

$= \sqrt{\frac{289-64}{17^2}} = \sqrt{\frac{225}{17^2}} = \frac{15}{17}$

$\Rightarrow S_{EAF} = AE^2 \cdot \frac{1}{2}\sin(180° - 2\alpha) =$

$= \frac{625}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{17}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{17}} = \frac{625 \cdot 5}{12} = \frac{3125}{12}$

ОТВЕТ: $R = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{17 \cdot 425}{1}}$; $r = \frac{136}{3}\sqrt{\frac{17}{425}}$

$\alpha = arctg\,\frac{5}{3}$; $S_{AEF} = \frac{3125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ

$\underline{x^2+18x>0}$ => модуль можно опустить

• замена $x^2+18X=y$, причём $\underline{y>0}$.

=> используя ~~опр~~. логар. тождество

$$5^{\log_{12}y} = y^{\log_{12}5}$$

$$\Rightarrow y^{\log_{12}5} + \underbrace{x^2+18x}_{=y} \geq y^{\log_{12}13} \quad | : y$$

=> т.к $y \neq 0$ =>

$$y^{(\log_{12}5-1)} + 1 \geq y^{\log_{12}13-1}$$

$$\underline{y^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq y^{\log_{12}\frac{13}{12}}}$$; Проведём некоторый анализ левой и правой частей ~~не~~равенства

т.к $\frac{5}{12} < 1$ => $\log_{12}\frac{5}{12} < 0$

(по опр. логарифма и т.к $12 > 1$)

~~т.к~~ и т.к $\frac{13}{12} > 1$, $12 > 1$ => $\log_{12}\frac{13}{12} > 0$

=> Преобразуем неравенство:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{1}{y^{\log_{12}\frac{12}{5}}} + 1 \geq y^{\log_{12}\frac{13}{12}}$$

тепер $\frac{12}{5} > 1 \Rightarrow \log_{12}\frac{12}{5} > 0$

$\Rightarrow$ левая часть убывает, а правая возрастает.

$\Rightarrow$ нас интересуют $y \leq y_0$

где y_0 — решение ур-н вида

$$\frac{1}{y^{\log_{12}\frac{12}{5}}} + 1 = y^{\log_{12}\frac{13}{12}}$$ (такое ур-н. имеет ~~[illegible]~~ ед. решени по Th. о корне при $y > 0$)

y_0 — угадаем подбором

Подставим $y_0 = 144$

тогд

$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{12}{5}\right)^2} + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^2$; $\frac{5^2}{12^2} + 1 = \frac{13^2}{12^2}$

$\Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$; $25 + 144 = 169$ — верно

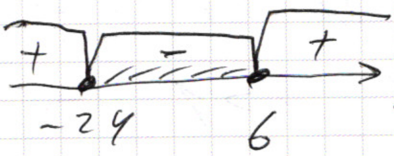
$\Rightarrow y_0 = 144$ — решени

$\Rightarrow$ из рассуждения выше $y \leq 144$

$\Rightarrow x^2 + 18x \leq 144 \Rightarrow x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$\Rightarrow D/4 = 81 + 144 = 225 = 15^2$; $\left[\begin{array}{l} x = -9+15 \\ x = -9-15 \end{array}\right.$ — корни

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -24 \end{array}\right.$



$\Rightarrow x \in [-24; 6]$

Ответ: $x \in [-24; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Замена $\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases}$;

ОДЗ;

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(y-1)(x-2)\geq 0$

$ab\geq 0$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+4+(3y)^2-2\cdot(3y)\cdot 3+9-13=12$

$\Rightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$[a^2+9b^2=25]$

$\cancel{x^2+9}$

, но $a-2b=x-2-2(y-1)=x-2y=\sqrt{ab}$

$\Rightarrow a^2+4b^2-4ab=ab$

(т.к. $x-2y\geq 0$ иначе решений нет $\Rightarrow a-2b\geq 0$)

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Big| \Rightarrow 5b^2=25-5ab$

$b^2=5-ab$

• ~~Положим~~ • легко понять, что $b\neq 0$, иначе $\begin{cases} a^2=25 \\ a=0 \end{cases}$ – противореч

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+4=5\frac{a}{b}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

По Th. Виетта

$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right.$, ~~тогда ли $a=b$~~, то $10a^2=25$

$a^2=\frac{25}{10}=b^2$

$\Rightarrow$ ~~учитывая $ab\geq 0$~~ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2+\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y=1+\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y=1-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Если $a = b$, то $a - 2b < 0$ — противоречие~~

$\Rightarrow$ $a = 4b$; ~~$\Rightarrow 16b^2 + 9b^2 = 25$~~

$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

~~$\Rightarrow a = \pm 4$~~

, ~~т.к. $a = 4b$~~

• Если $a = b$ $\Rightarrow$ $10a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = b^2 = \frac{25}{10}$

$\Rightarrow$ учитывая $ab \geq 0$ $\Rightarrow$ a, b — имеют один знак

$a \geq 2b$

и $b \geq 2b$

$-b \geq 0$

$b \leq 0$

$\Rightarrow$ $b \leq 0$

$a \leq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b = -\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

• Если $a = 4b$, то $a - 2b = 2b \geq 0 \Rightarrow b \geq 0$

$\Rightarrow a \geq 0$

, но $16b^2 + 9b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow$

учитывая всё выше $b = 1 \rightarrow a = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(6; 2)$, $\left(2 - \frac{5}{\sqrt{10}}; 1 - \frac{5}{\sqrt{10}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}=2\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\Rightarrow$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$; $\Rightarrow$ $\left[\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\right]$

$\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

• Рассмотрим случае $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

тогда:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$; $\cos 2\alpha=0$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=1$

$\Rightarrow 2=-1$ – прот

$\Rightarrow \cos 2\alpha\neq 0$

$\Rightarrow 2\operatorname{tg} 2\alpha+1=-\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha=x$; $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}$;

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}-1=\frac{2}{x^2+1}-1=\frac{2-x^2-1}{x^2+1}=$

$=\frac{1-x^2}{x^2+1}$

$\Rightarrow \frac{4x}{1-x^2}+1=-\frac{x^2+1}{1-x^2}$; ~~$1-x^2$~~ $\Rightarrow x^2-1\neq 0$

$\to x\neq\pm1$

проверим $x=\pm1$

$\operatorname{tg}2\alpha$ – нет $\Leftarrow$ $\operatorname{tg}\alpha=\pm1$

$\Rightarrow \cos 2\alpha=0$

– проверено.

$\Rightarrow 1-x^2\neq 0$ (умножим на него)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$4x + 1 - x^2 = -x^2 - 1$; $4x = -2$

$x = -\frac{1}{2} = tg\,\alpha$

• Рассмотрим случай $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$ используем те же рассуждения

$4x - (1 - x^2) = -x^2 - 1$

$4x - 1 + x^2 = -x^2 - 1$; $2x^2 + 4x = 0$

$x(x+2) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -2 \end{array}\right.$ (больше возм. знач. нет.)

$\Rightarrow$ <u>ОТВЕТ</u>: $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -2 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-2)^2+9(y-1)^2=25\\ x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}\end{cases}$$

$\cancel{x+2+}$

$$(x-2-2(y-1))^2=x-2y \qquad a-2b=\sqrt{5-b^2}$$

$$=(x-2)^2+4(y-2)^2-4\cdot(x-2)(y-1)=$$

$$=(x-2)(y-1)$$

$\cancel{(x-2)^2}$

$x-2=a$

$y-1=b$

$$a^2+4b^2=5(5-b^2)$$

$$=25-5b^2$$

$\cancel{a^2+9b}$

$$\begin{cases}a^2+9b^2=25\\ a-2b=\sqrt{ab}\end{cases}$$

$$(a-2b)^2=a^2+4b^2-4ab=ab$$

$$\begin{cases}a^2+4b^2=5ab\\ a^2+9b^2=25\end{cases}$$

$$\boxed{b^2=5-ab}$$

$$b^2+ab-5=0$$

$\cancel{D=a^2+20}$ $\qquad b=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+20}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$25+144=13^2$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ

$x^2+18x\geq 0$ $\quad 12^2$

$x(x+18)>0$

$+\ -18\ -\ 0\ +\ x$

$\left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right.$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\log_b c \log_x a = \log_x c \log_b a$

$y^\alpha+y\geq y^\beta$ $\quad x=b$

$\alpha y^{\alpha-1}+1 \quad \beta y^{\beta-1}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$(x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}5-1}-(x^2+18x)^{\log_{12}13-1}+1\right)\geq 0$

$(x^2+18x)>0$ $\quad \geq 0$

$y^{\log_{12}\frac{5}{12}}-y^{\log_{12}\frac{13}{12}}+1$ $\quad \log_{12}5\cdot y^{\log}$

$\frac{5}{12}+1 \quad \frac{13}{12} \quad y^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left(1-y^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right)+1$

$5^{\log_{12}y}+y \geq y^{\log_{12}13}=13^{\log_{12}y}$

$y^{\log_{12}5}+y\geq y^{\log_{12}13}$

$y>0$

$5+12 \quad y^{(\log_{12}5-1)}+1\geq y^{(\log_{12}13-1)}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cos\alpha \neq 0$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\boxed{tg\alpha = 3}$ $2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\cos^2\alpha$ $\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin x + \sin y = \frac{1}{2}\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

~~$\sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$~~ $\sin^2 2\beta = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$

$\sin\frac{x+y}{2} + \sin y\frac{x-y}{2}$ $\sin$ $2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\right) = \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$= \sin\frac{x+y}{2}$

$\frac{x+y}{2} = a$ 4

$\frac{x-y}{2} = b$ $\sqrt5$ $\frac{2}{\sqrt5}$ $\frac{1}{\sqrt5}$

$x+y = 2a$

$x-y = 2b$ $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases}$ $\sqrt5\sin(2\alpha+\theta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin a + \sin b = 2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $2tg$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\,tg 2\alpha + 1 = -\frac{1}{2\cos^2\alpha - 1}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1}$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ $\frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{4\,tg\alpha}{-1+tg^2\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{tg^2\alpha+1} - 1}$

$\frac{2}{tg^2\alpha+1} - 1$

$\frac{8\,tg\alpha}{tg^2\alpha+1} - 4\,tg\alpha = tg^2\alpha - 1$

$8\,tg\alpha - 4\,tg^3\alpha - 4\,tg\alpha = tg^4\alpha - 1$

$tg^4\alpha + 4\,tg^3\alpha - 4\,tg\alpha - 1 = 0$

$tg^4\alpha - 1 + 4\,tg\alpha(tg^2\alpha - 1)$

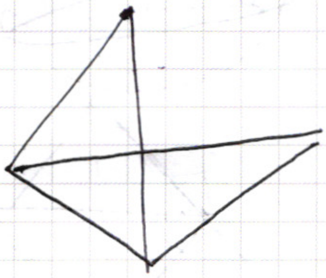
$(tg^2\alpha - 1)(tg^2\alpha + 1 + 4\,tg\alpha) = 0$

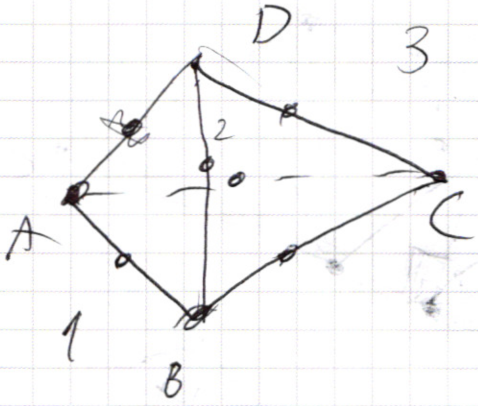
$x^2 + 4x + 1 = 0$

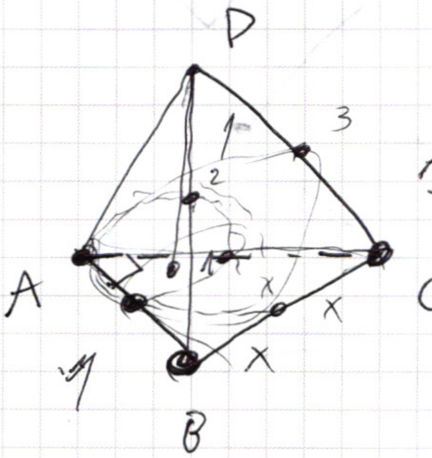
$D/4 = 4 - 1 = 3$

$x = -2 \pm \sqrt{3}$

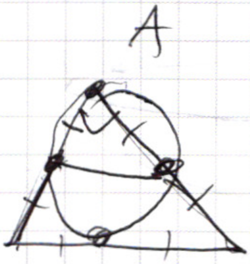
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

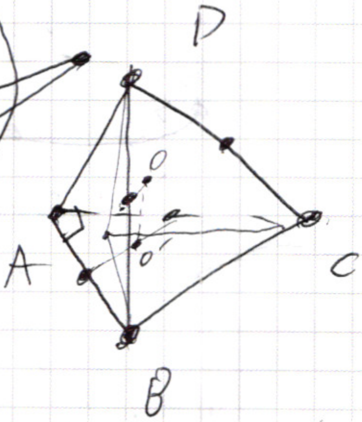


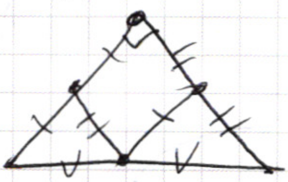


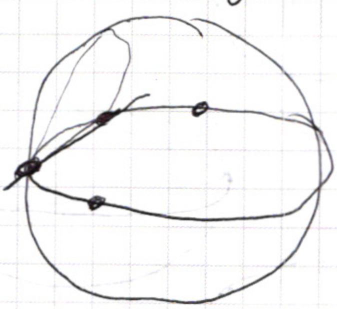


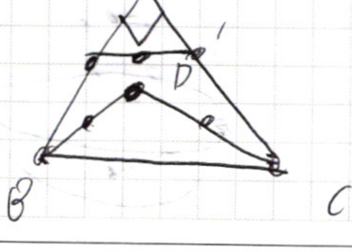
$\underline{AC = 1}$

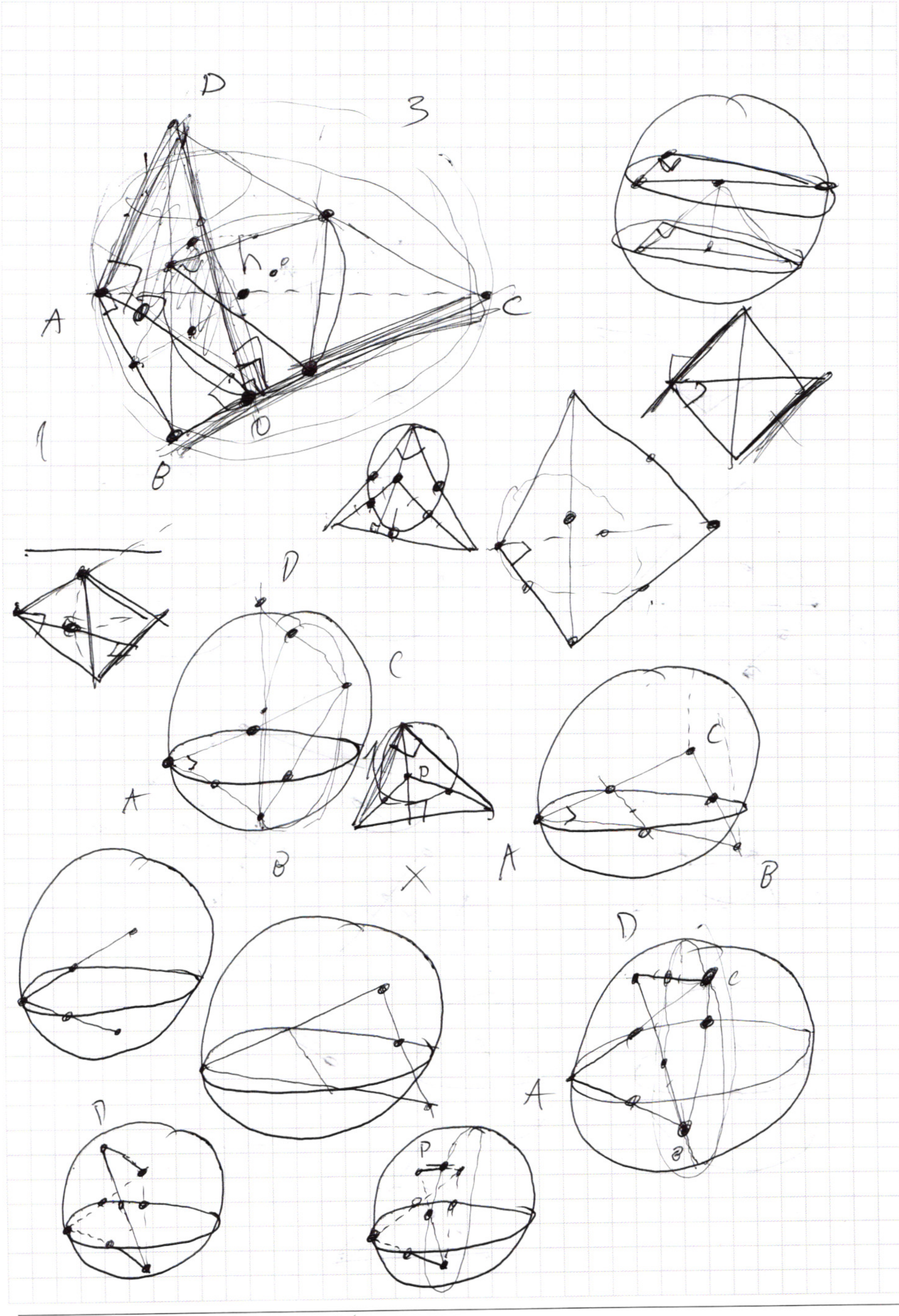








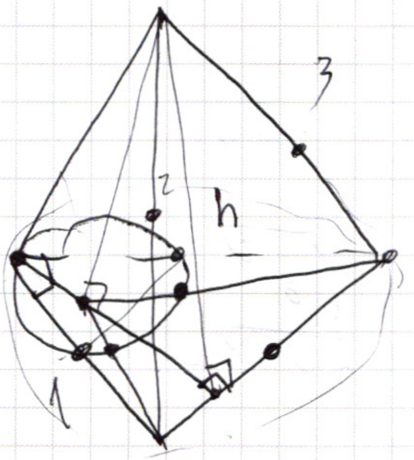


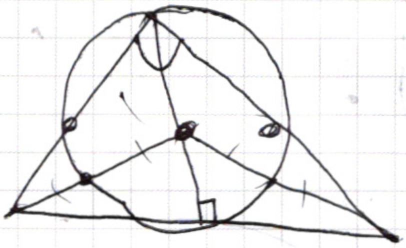

D
3
A
C
1
B
D
C
A
A
B
D
C
A

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x^3+144x^2+146x+40\le 0$

$2(4x^3+73)$





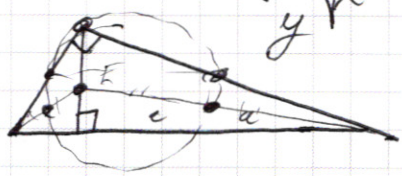
73

$-8+144$

$-146+40$

$\sqrt{y}\sqrt{x^2-1}$

1



11
136
89
225

$a\cdot 2a=$

x

$8x^3+144x^2+158x+51 \le 12x+11$

$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17$

225
-136
89

17
4
68

$80+56$
136

$\frac{12x+11}{4x+3}\ \cancel{7}\ +8x^2+30x+17$

$\cancel{x}\quad x\ne -\frac{3}{4}$

$D_{/4}=225-8\cdot 17=89$

$8x^3+120x^2+68x$

$+24x^2+90x+51$

$\cancel{32x^3+120x}$

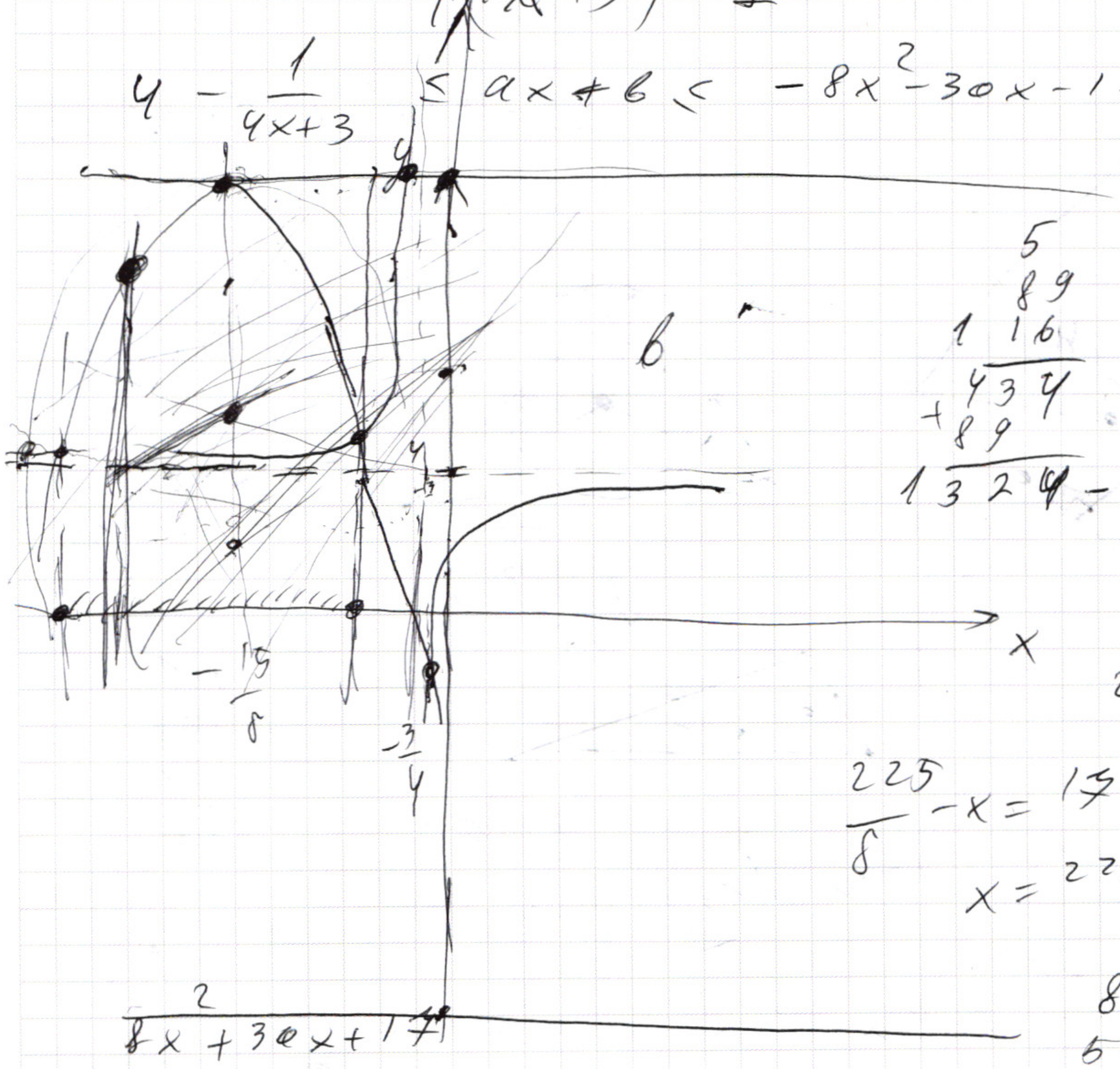
$\cancel{x=\frac{-15\pm 3\sqrt{11}}{8}}$

$x=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$

$12x+11$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{\cancel{12x+}}{4(4x+3)-1}$$

$$4 - \frac{1}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$



5
89
116
434
$+89$
1324

$(50-1)^2$
$2500+1$
-100
2401

$$\frac{225}{8} - x = 17$$

$$x = 225 - 17 \cdot 8$$

80
$56 \quad 136$

$8x^2+30x+17$

$$(\sqrt{8}x)^2 + 2(\sqrt{8}x)\cdot\frac{15}{\sqrt{8}} + \frac{225}{8} - \frac{89}{8}$$

89
2401
-1324
1077

$$\left(\sqrt{8}x + \frac{15}{\sqrt{8}}\right)^2 - \frac{89}{8}$$

$$-\frac{1}{8}(x+15)^2 + \frac{89}{8} = 4 - \frac{1}{4x+3}$$

$$a\cancel{\left(x_0+\frac{15}{8}\right)}+b \quad \frac{15\cdot 4-11}{4} \quad \frac{49}{4} \quad -\frac{1}{8}\frac{49^2}{16} + \frac{16\cdot 89}{8\cdot 16}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin a + \sin b = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$

$a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$

$2x + 4x = 0$

$2x + 4 = 0$

$2a = x+y$

$2b = x-y$

$-9+15$

$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$-4x+1-x^2 = -x^2+1$

$x = a+b$

$y = a-b$

-24

$\alpha < 1$

$b > 1$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$81+144$ 15^2

$\alpha < 1$

$-4x-1+x^2 = x^2+1$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot + \quad = -\frac{1}{\sqrt{5}\cos 2\alpha}$

$4x = -2$

$x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} - 1 = \frac{2}{x^2+1} - 1$

$\operatorname{tg}\alpha = x$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-x^2}$

$-\frac{4x+1+x^2}{-1+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{2}{x^2+1} - 1\right)}$

$\frac{4x}{1-x^2} + 1 = -\frac{1}{\frac{2}{x^2+1}-1} = +\frac{x^2+1}{-2+x^2+1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{5}\ \sin(2\alpha+\theta)=-1$ $\qquad \alpha=\theta-\frac{\pi}{2}$

$\sin(2\alpha+\theta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\sin\theta$

$x^2+4xy+4y^2=(\ldots)$

$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\alpha-\theta=-\theta$

$2\alpha-\theta+\pi=\theta$

$2\alpha=2\theta-\pi$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq$

$\theta=-2\alpha-\theta$

$2\alpha=-2\theta$

$\alpha=-\theta$

$2\alpha+\theta+\pi=\theta$

$(y-1)(x-2)\geq 0$ $\quad \alpha=-\frac{\pi}{2}$ $\quad 2\alpha=-\pi$

$\tan 2\alpha$

$2\alpha=-2\theta$

$\tan 2\alpha=\tan(-2\theta)=-\tan(2\theta)=$

$-\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 2\end{cases}$ $\quad \sin\theta=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} y\leq 1 \\ y\leq 2\end{cases}$ $\quad \tan 2$

$-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{4}{3}$

$\tan\alpha=-\tan\theta$

$\tan\alpha=\cot\theta=2$ $\qquad -\frac{1}{2}$

$(x-2y)^2\leq\frac{25}{6}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\qquad x-2y\leq\frac{5}{\sqrt{6}}$

$x^2-4x+4+9y^2-2\cdot 3y\cdot 3+9$

$-13=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$25\geq 2(x-2)3(y-1)$ $\qquad (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

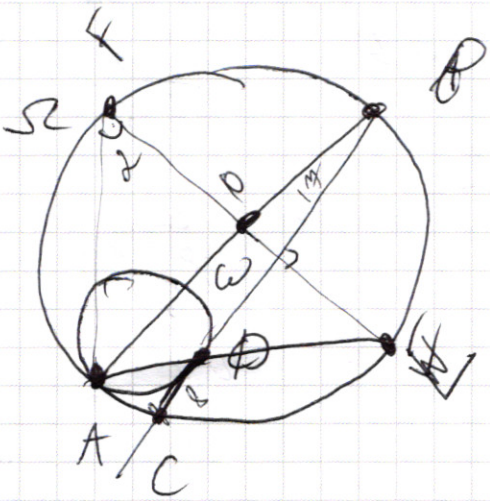
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

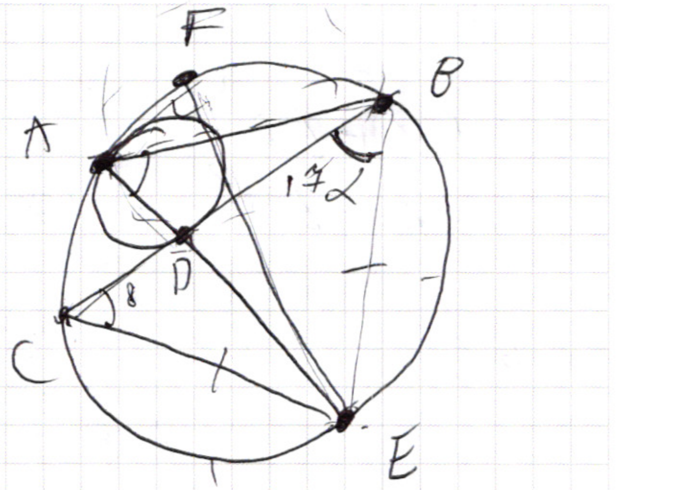
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$BE^2 = ED^2 + 8\cdot 17$

$BE^2 + ED^2 = 17^2$

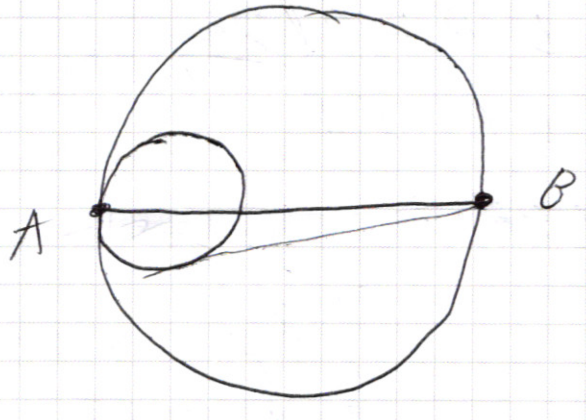
$BE^2 = \cancel{ED \cdot DA}$

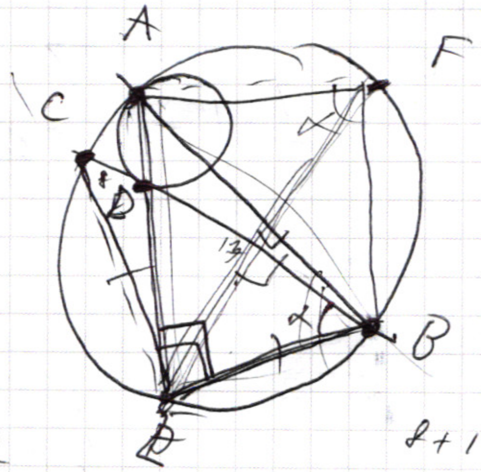
$ED \cdot EA =$

$= ED^2 + ED \cdot AD$

$\parallel$

$8\cdot 17$





80
+56
136

$8+17=$
25

$\cancel{2\cdot BE^2 = 25^2}$

$\cancel{BE = \frac{25}{\sqrt{2}}}$

$2BE^2 = 17(25)$

$BE = \sqrt{\frac{17}{2}}\cdot 5$

$ED \Rightarrow AD = AE$

$\cancel{\frac{25^2}{2} = ED^2 + 136}$

$\cancel{ED^2 = \frac{25^2 - 272}{2}}$

$\frac{17}{10}$

$80 + 1$
136
89
225

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$S = \frac{z}{01} = \frac{8}{307}$ $\frac{8}{68} + \frac{8}{67} - \frac{8}{6}$

$\frac{8}{22} - \frac{8}{51}$

425 − 153 = 272

17 · 15 = 255

$\frac{8}{22} - \frac{68}{120}$

170

+ 50 + 35

9 · 17 = 153

205

$EB^2 + ED^2 = 17^2$

$EB^2 - ED^2 = 8 \cdot 17$

$\frac{8}{51} > \frac{4}{11}$

17 · 2

68 · 4 = 272

250

$2EB^2 = 17 \cdot 25$

$EB^2 = \frac{17 \cdot 25}{2}$

25 · 8

$ED^2 = \frac{17 \cdot 25}{2} - \frac{16 \cdot 17}{2} = \frac{9 \cdot 17}{2}$

3000

+ 125

$ED = 3\sqrt{\frac{17}{2}}$

$3\sqrt{\frac{17}{2}}$

$EB = 5\sqrt{\frac{17}{2}}$

$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{17}} \cdot 8 \cdot 17$

17 · 17 = 289

170 − 17 = 153

$\frac{8}{3}$

625 · 5 = 3125

$\frac{272}{3}$

425 − 153 = 272

90 + 63

153

270

425 − 153 = 272

136

50 + 18

$\frac{425 \cdot 12}{9} - \frac{17 \cdot 9}{9}$ | 12

68

$\frac{272}{3} \cdot \sqrt{17}$

$\sqrt{425 \cdot 17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)