МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}. \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

I сл. $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -1/\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -1/\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

Пусть $\cos 2\alpha = t$,

Если $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$, то

$\sin 2\alpha\cdot(\cos 4\beta) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2/5$

$\sin 2\alpha\left(\frac{2}{5}-1\right) + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\cdot 2}{5} + \sin 2\alpha = -2/5$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{5} = -2$

$\sqrt{1-t^2} + 2t = -1$, $\begin{cases} 1-t^2 = (1+2t)^2 \\ 2t+1 \le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 5t^2+4t=0 \\ 2t+1\le 0 \end{cases}$, $t = -\frac{4}{5}$

Если $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$, то

$\begin{cases} 1-t^2 = (1+2t)^2 \\ 2t+1 \ge 0 \end{cases}$, $t=0$.

II сл. $\sin 2\beta = -2/\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$, $t = \cos 2\alpha$

Если $\sin 2\alpha = \sqrt{1-t^2}$, то

$\sqrt{1-t^2} = 2t-1$, $\begin{cases} 1-t^2 = (2t-1)^2 \\ t \ge 1/2 \end{cases}$, $\begin{cases} 5t^2-4t=0 \\ t\ge 1/2 \end{cases}$, $t = 4/5.$

Если $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-t^2}$, то $t=0$. $\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{t+1}{2} = \frac{1}{2}; \frac{9}{10}; \frac{1}{10}$

В итоге получим 3 знач t: $0; \pm\frac{4}{5}$.

$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1\cdot 2}{t+1} = 2; \frac{10}{9}; 10$

$tg^2\alpha = 1; \frac{1}{9}; 9.$

$tg\alpha = \pm 1; \pm\frac{1}{3}; \pm 3$

$t=4/5$ $\quad t=-4/5$

Но: при $t=4/5$ $\sin 2\alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} > 0$ - верно при $tg\alpha = 1/3$

Аналогично при $t=-4/5$ подходит только $tg\alpha = 3$

Ответ: $\pm 1; \pm\frac{1}{3}; 3$

№2 $\begin{cases} x-12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$

Пусть $(x-6)=a$, $(2y-1)=b$.

$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$, $\begin{cases} a^2-12ab+36b^2 = ab \;|:b^2 \;(b=0 \text{ не явл. реш.}) \\ a^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0 \\ a^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 25b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ b^2\cdot 90=90 \\ a\geq 6b \end{cases} \end{array}\right.$ $\left(b=-3\sqrt{\frac{2}{5}}, a=-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $(b=1, a=9)$.

$x = 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y = \frac{1-3\sqrt{2/5}}{2}$

или

$x=15$, $y=1$.

Ответ: $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{2/5}}{2}\right)$, $(15;1)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x-x^2)}$$

Пусть $-x^2+10x = t$

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$\begin{cases} t + (t^2)^{\log_3 2} \geq t^{\log_3 5} \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(1 + t^{2\log_3 2-1} - t^{\log_3 5-1}) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

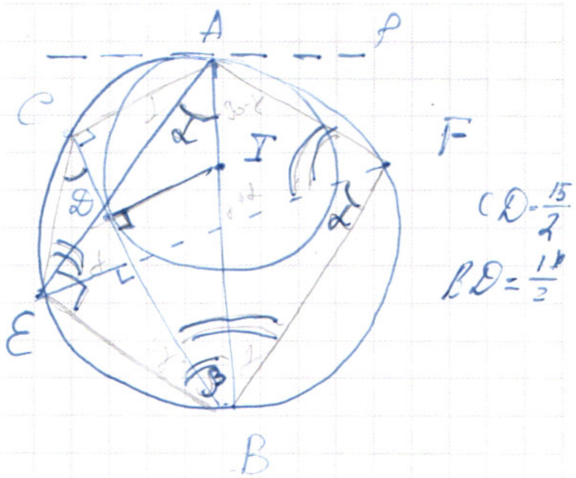
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№4

Пусть радиус Ω равен R,

радиус ω равен r.



1) Пусть l — общая касательная Ω и ω в точке A, I — центр ω

$\left.\begin{matrix} AI \perp l \\ AB \perp l \end{matrix}\right\} \Rightarrow I \in AB$.

2) $deg_{\omega} B = DB^2 = (2R-r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr = 4R(R-r)$ (1)

3) Пусть $\angle EAB = \alpha$, $\angle EBH = \beta$.

$\left.\begin{matrix} \angle CEA = \angle CBA \text{ — как впис., опир-ся на } CA. \\ \angle DEF = \angle DBE \text{ (из } \triangle DEB). \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle CEF = \beta$.

$\angle AFE = \angle EBA = \beta$ — как впис., опир-ся на AE

$\left.\begin{matrix} CAB = 90^\circ \text{ (опир-ся на диаметр } AB) \\ EF \perp CB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CA \parallel EF$

Так как $\angle CEF = \angle AFE = \beta$, то $ECAF$ — р/б трапеция

4) По св-ву пересек. хорд

$ED \cdot DA = CD \cdot DB = \frac{15 \cdot 17}{4}$.

5) $ID \perp CB$. По теор. Фалеса $\frac{DB}{DC} = \frac{IB}{AI}$

$\frac{17}{15} = \frac{2R-r}{r}$, $17r = 30R - 15r$, $r = \frac{30}{32}R = \frac{15}{16}R$

из (1): $\frac{289}{4} = \frac{R^2}{4}$, $R = 17$, $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

$\cos\alpha = \frac{AE}{AB}$, $\alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow \cos\alpha = \sin\beta = \frac{AE}{AB}$

$\frac{AE}{\sin\beta} = AB$, $\sin\beta = \frac{AE}{AB}$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [p/4]$

$x \in [2;25]$, $y \in [2;25]$: $f(x/y) < 0$

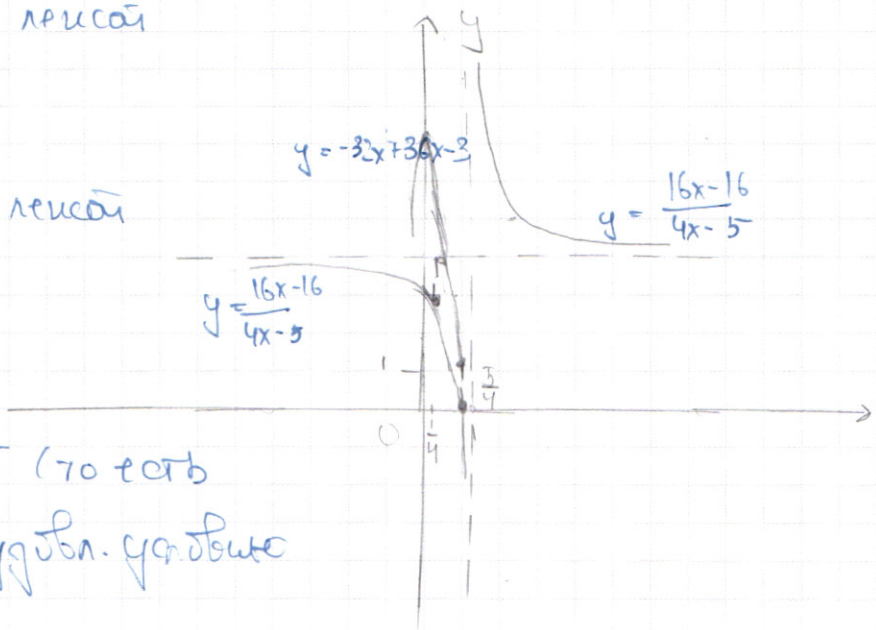
$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{b} \in \mathbb{R}$

$f(x/y) = f(x) + f(1/y) < 0$

№ 6 $\quad \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3, \quad x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

Точки $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$ лежат на параболе

Точки $\left(\frac{1}{4};3\right)$ и $(1;0)$ лежат на гиперболе



Прямая ℓ: $y=-4x+5$ (то есть $a=-4$, $b=5$) удовл. условию

Найдем точку пересечения ℓ с гиперболой: $-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$, $16x-16=-(4x-5)^2$, $x=\frac{3}{4}$

Она единственна => ℓ касается гиперболы в точке с абсциссой $\frac{3}{4}\in\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Это значит, что при движении концов отрезка прямой ℓ с абсциссам $\frac{1}{4}$ и 1 соответственно „вниз" часть этого отрезка окажется под гиперболой, что противоречит условию

Ответ: $a=-4$, $b=5$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$x-12y = \sqrt{x(2y-1) - 6(2y-1)}$

$x-12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(x-6-3(2y-1))^2 = 90 - 6(x-12y)^2 = \cancel{6(3^2-(x-12y)^2)} =$

$\cancel{=6(3-x+12y)(3+x-12y)}$

$(x-6y-3)^2 =$

$(x+6y)^2 - 12xy$

$(x-6 \mp 3(2y-1))^2 + 6(x-12y)^2 = 90$

$(6y+x-3)^2 = 6(15-(x-12y)^2)$

$\frac{a}{b} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} =$

$= \frac{13 \pm 5}{2} = 9; 4.$

$4 + \frac{4}{4x-5}$

№4

$\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

$\frac{32}{2} = 16$

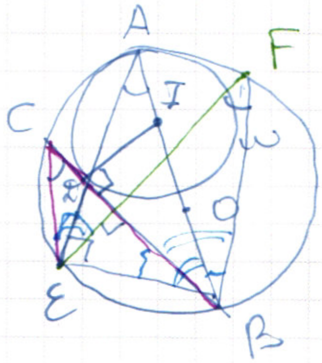
$2R - r$

$BD^2 = d^2 - r^2$

R

$r^2 + DB^2 =$

$BD^2 = (2R-r)^2 - r^2$



$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = \pm 12\sqrt{\frac{5}{5}}$

№1.

$tg\,\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\| \; 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$

$= 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

I сл. $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$.

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \left(2\cdot\frac{1}{5} - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -2/5$

$\sin 2\alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\cos 2\alpha = -2/5$.

$-3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2$; $10\cos 2\alpha = -5$, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$7^{\log_3 5-1} - 7^{2\log_{\sqrt{3}} 2-1} =$

$= 7^{\log_3 4-1}(7^{\log_{\sqrt{3}} 5/4}-1)$

$\cancel{1+}x^2 \geq x$

$x^2-x+\cancel{1} \geq 0$

$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1-4\cancel{1}}}{2}$

$7 \cdot 6 \cdot 10$

$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 \cancel{+} 96}}{-32} = \cancel{\frac{-18 \pm \sqrt{420}}{-32}} =$

$= \frac{-18 \pm \sqrt{228}}{-32}.$

$114 \cdot 2 = 4 \cdot 57$

$18 \cdot 18 = 144 + 18 \cdot 10$... 324

162

$x_{max} = \frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}.$

$y_{max} = \frac{-81 \cdot 32}{16 \cdot 16} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3 = \frac{-81}{8} + \frac{18 \cdot 9}{8} - 3 =$

$= \frac{81}{8} - 3 = \frac{57}{8}$

$= 7{,}125$

$-2+9-3 = \cancel{4}\ 4$

$\frac{-12}{-4} = 3$

$1 : 1$

$(\frac{1}{4};\ 4) \cup (1;1)$

$\frac{x-\frac{1}{4}}{\cancel{1-\frac{1}{4}}} = \frac{y-4}{\cancel{1-4}};\quad \frac{x-\frac{1}{4}}{3/4} = \frac{y-4}{-3}$

$4x-1 = 4-y,\ y = -4x+5$

$16x-16 = -(4x-5)^2$

$16x-16 = -16x^2+40x-25$

$16x^2-24x+9=0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{16} = \frac{12}{16} = 3/4.$

$AC^2 + 16^2 = 4R^2$

$AC^2 = (2R-4)(2R+4)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)