МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad tg\alpha - ?$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

(2) $2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

подставим (1)

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

(*) $\cos2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$ $\qquad \sin2\beta=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\sqrt{\frac{25-20}{25}}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin2\beta=\frac{\sqrt5}{5}$ (**)

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad$ (***) $\sin2\beta=-\frac{\sqrt5}{5}$

подставим (*) и (**)

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\ \Big|\cdot\frac{5}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

универсальная подстановка

$\cos2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\qquad \sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\frac{4tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1$

$tg\alpha=t$

$\frac{4t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2}=0$

$4t=-2$

$t=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $tg\alpha=-\frac{1}{2}$

из (1): $2\alpha+2\beta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

из (**) $\quad 2\beta=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\alpha=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$; $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$tg\alpha=-tg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$tg\alpha=\frac{-1\cdot\sqrt5}{\sqrt5\cdot2}=-\frac{1}{2}$

$\cancel{tg\alpha=\frac{1}{2}}$ з~~[illegible]~~

Если (***): $2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$

универсальная подстановка

$t=tg\alpha$

$\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1$

$\frac{4t-1+t^2+1+t^2}{1+t^2}=0$

$2t^2+4t=0 \quad 2t(t+2)=0$

$tg\alpha=0$ $\quad$ $tg\alpha=-2$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

$(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=12+4+9$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

(**) $(3y-3)^2=25-(x-2)^2$

(1) $xy-x-2y+2\geq 0$ $\quad$ $x-2y\geq 0$

$(y-1)(x-2)\geq 0$ $\quad$ $x\geq 2y$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y\geq 2 \\ x\geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$

возведем (1) в квадрат

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$

$=(3y-3)^2=25-(x-2)^2$

$x_{12}=\dfrac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$

$x_1=4y-2$ $\quad$ $x=\cancel{2}y+1$

подставим в (**)

$x=4y-2$

$(3y-3)^2=25\cancel{+}(4y-2-2)^2$

$(3y-3)^2=25\cancel{+}16(y-1)^2$

$9(y-1)^2+16(y-1)^2-25=0$

$25(y-1)^2-25=0$

$25((y-1)^2-1)=0$

$(y-1-1)(y-1+1)=0$

$y=2 \qquad y=0$

$x=6 \qquad x=-2$

не удовлетворяет условию $x \geq 2y$

$x=y+1$

$9(y-1)^2+(y+1-2)^2=25$

$9(y-1)^2+(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2-25=0$

~~$2(y-1)^2-5=0$~~

$(\sqrt{10}(y-1)-5)(\sqrt{10}(y+1)+5)=0$

$y-1=\frac{5}{\sqrt{10}} \qquad y-1=\frac{-5}{\sqrt{10}}$

$y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \qquad y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$x=y+1$

$x=\frac{4+\sqrt{10}}{2} \qquad x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$

не удовлетворяет условию $x \geq 2y$

Ответ: $(\overset{x}{6};\overset{y}{2})$ $\left(\overset{x}{\frac{4-\sqrt{10}}{2}};\ \overset{y}{\frac{2-\sqrt{10}}{2}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$A \le B \le C$

C – парабола, ветви вниз

B – линейная

$A = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ $x \in [-\frac{22}{8}; -\frac{6}{8})$

$C \ge B$ – вся парабола лежит выше прямой $ax+b$

$A \le B$ – весь график A лежит ниже прямой $ax+b$

$C = -8x^2 - 30x - 17$

$x_0 = \frac{30}{2\cdot(-8)} = -\frac{15}{8}$

$y_0 = -8\cdot\frac{15^2}{64_8} + 30\cdot\frac{15}{8_4} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{225}{4} - 17$

$y_0 = \frac{89}{8}$

$x = 0$ $y = -17$

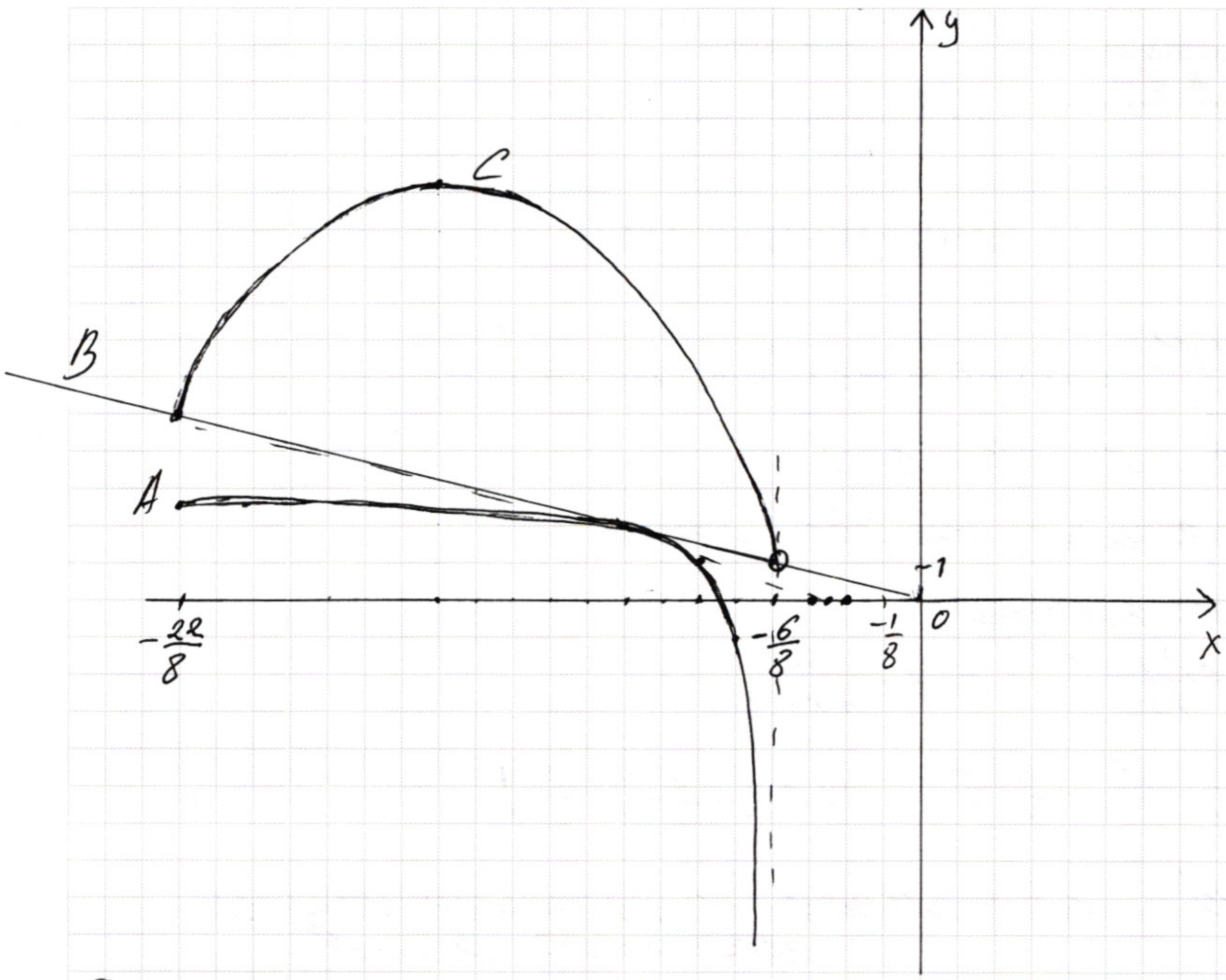
$x = -\frac{22}{8}$ $y = 7\frac{1}{2}$ $y = 5$

$x = -\frac{6}{8}$ $y = 1$

$A = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$x \ne -\frac{3}{4}$ $x = -1$ $y = 1$, $x = -\frac{11}{4}$ $y = \frac{11}{4}$; $x = -\frac{5}{4}$ $y = 2$

$x = -\frac{7}{8}$ $y = -1$



① $y = ax + b$

$\left(-\frac{6}{8}; 1\right)$ $\left(-\frac{22}{8}; 5\right)$

$1 = -\frac{6}{8}a + b$

$5 = -\frac{22}{8}a + b$

$4 = -\frac{22}{8}a + \frac{6}{8}a = \left(-\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\right)a$

$16 = -8a$ $a = -2$

$1 = \frac{3}{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{2} + b$

$2 = 3 + 2b$

$2b = -1$

$b = -\frac{1}{2}$

$\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

прямая $y=-2x-\frac{1}{2}$ является касательной к графику A, т.к:

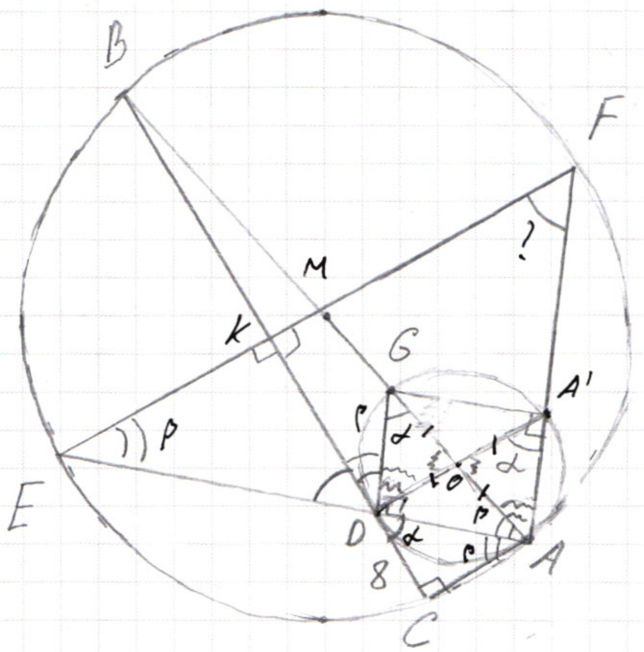
$-2x-\frac{1}{2}=3+\frac{2}{4x+3}$

$-8x^2-20x-12{,}5=0$

$D=400-400=0$

Ответ: $(-2;-\frac{1}{2})$

4)



обозначу угол $\angle ADC=\alpha$

$\angle BCA$ - прямой, т.к. опирается на диаметр

$\angle GDA$ - прямой, т.к. опирается на диаметр

$\angle DGA=\angle ADC=\alpha$ (как угол между касател. и угол вписанный)

$\left.\begin{array}{l}\angle DAG=90^\circ-\alpha\\ \angle DAC=90^\circ-\alpha\end{array}\right| \Rightarrow \angle DAG=\angle DAC \Rightarrow AD$ - биссектриса по свойству биссектрисы

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

по т. Пифагора $AC^2 = AB^2 - BC^2$

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CD^2}{BD^2}$$

$$\frac{AB^2 - 625}{AB^2} = \frac{64}{289}$$

$$64AB^2 = 289AB^2 - 625 \cdot 289$$

$$625 \cdot 289 = 225AB^2$$

$$25 \cdot 17 = 15AB$$

$$AB = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot 17}{\cancel{15}_{3}} = \frac{85}{3}$$

$R = \frac{85}{6}$ - радиус большей окружности

$$AC = \sqrt{\left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{3} - 25\right)\left(\frac{85}{3} + 25\right)} = \frac{10 \cdot 4}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\triangle ADC \; AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \frac{\sqrt{2176}}{3}$$

$$\sin \angle DAG = \frac{8 \cdot 3}{\sqrt{2176}} = \frac{CD}{AD}$$

$$\cos \angle DAG = \frac{AD}{AG} = \frac{\sqrt{2176}}{3 \cdot AG}$$

$$\sin^2 \angle DAG + \cos^2 \angle DAG = 1$$

$$\cancel{\frac{24^2}{2176} + \frac{9AD^2}{2176} = 1}$$

$$\cancel{9AD^2 = 2176 - 24^2}$$

$$\cancel{9AD^2 = 1600}$$

$$\cancel{3AD = 40}$$

$$\cancel{AD = AC = \frac{40}{3}}$$

$$\frac{24^2}{2176} + \frac{2176}{9AG^2} = 1$$

$$24^2 \cdot 9AG^2 + 2176^2 = 9 \cdot 2176 AG^2$$

$$2176^2 = 9AG^2(2176 - 24^2)$$

$$2176^2 = 9AG^2 \cdot 1600$$

$$2176 = 3 \cdot 40 AG$$

$$AG = \frac{2176}{3 \cdot 40} = \frac{544}{3 \cdot 10} = \frac{272}{15}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$r = \frac{136}{15}$ - радиус меньшей окружности

$\angle BDG = \angle DAG$ (вписанный угол и угол между стягиваемой дугой и касательной)

$\angle BDE = 90° - \angle BDG$

$\triangle AKD$ - прямоугольный (по условию)

$\angle KED = \angle DAG$

~~AD = AB, т.к. ADBA' - прямоугольник,~~

~~AD = A'~~ ~~$\angle$ ...~~

~~$\angle ADA'$~~

$\triangle EMA$ - равнобедренный т.к. $\angle MEA = \angle EAM = \beta$

$\cos\beta = \frac{\cancel{15}^{5}\sqrt{2176}}{2\cdot\cancel{3}\cdot 136} = \frac{5\sqrt{2176}}{272}$

$\sin 2\beta = 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = \cancel{2}\cdot\frac{8\cdot 3}{\sqrt{2176}}\cdot\frac{5\cdot\cancel{\sqrt{2176}}}{\cancel{272}_{136}} = \frac{15}{17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2176 | 4

544 | 2

272

20

17

16

16

4

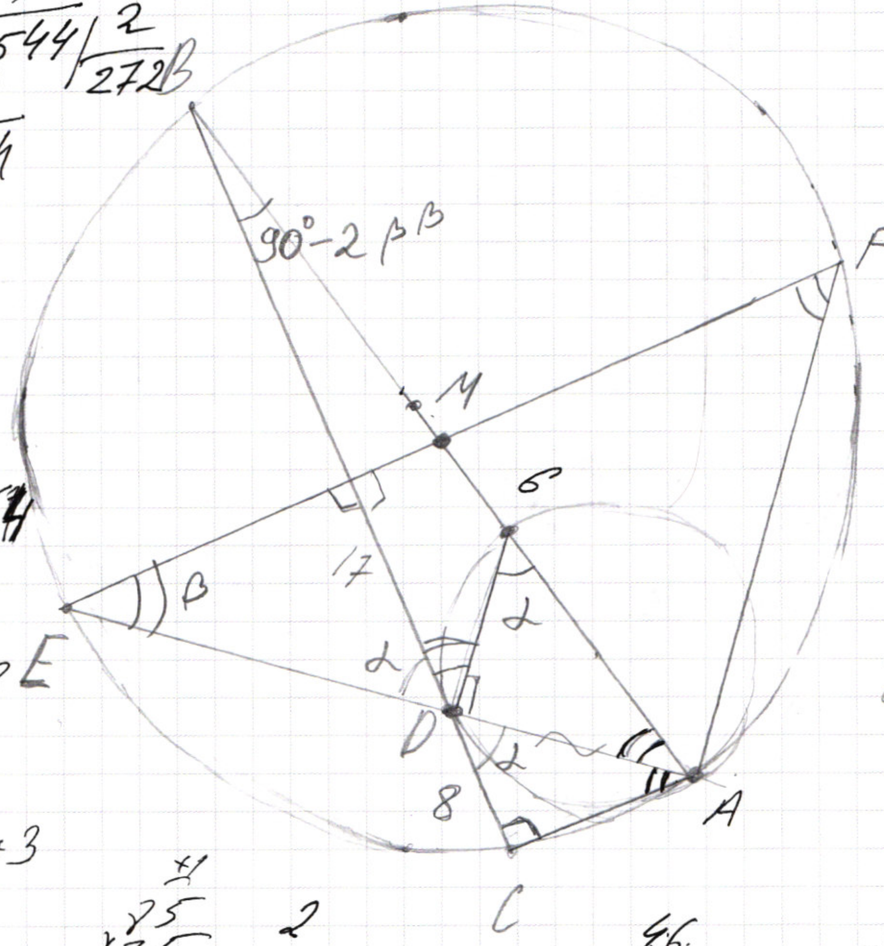
14

3·5

15

9·6=54

9·2=18



AB-диаметр

Найти радиусы окружностей

∠AFE

$S_{\Delta AEF}$

AP-биссектриса

$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BD}$

64 × 9 +3

576

75 × 75

160

2

3

1600 + 576

2176

$\left(\frac{85-75}{3}\right)\cdot\left(\frac{85+75}{3}\right)$

17 + 8

25

25 × 25

125 + 50

625

272 | 2

136

2

7

6

12

46 × 46 +3 +2

276

184

2116

17 × 5

85

24 × 24 +1

96

48

576

$\frac{10}{3}$ ·160

44 × 44 +1

176

176

1936

54 × 54 +1 +2

216

270

2916

17 × 17 +4

119

17

289

− 64

225

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad (tg\alpha)-?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\quad \cancel{\sin\alpha=0}$ $\quad \alpha=0$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\quad \sin 2\beta =$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sin 2\beta = \sqrt{\frac{25-20}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot\frac{5}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{\pi}{2}$

$2\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -\frac{5}{5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad \cancel{\sin 2\alpha =} \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$

$\cancel{tg\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$-2\le 2\cdot\sin 2\alpha \le 2$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{2\cdot\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}$

$+\quad -1\le\cos 2\alpha\le 1$

$-3\le 2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\le 3$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1+tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{\ } \quad = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\cos 2\alpha)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$+\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$3+\dfrac{2}{-\cancel{4}\frac{3}{\cancel{4}}+3}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\alpha+\beta = x \qquad x+y = 2\alpha$

$\alpha-\beta = y \qquad x-y = \alpha+\beta-\alpha+\beta$

$-\dfrac{8}{8} \qquad \dfrac{12-1}{4} = \dfrac{11}{4}$

$3+\dfrac{2}{\underline{-4+3}}$

$-1 \qquad \dfrac{10}{2}$

$\sin x + \sin\alpha = 2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$

$3 + 2$

$-\dfrac{10}{2}$

$-\dfrac{11}{1} \quad \cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{1}$

$-\dfrac{11}{3} \quad \cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$3+\dfrac{2}{3-11} = 3-\dfrac{2}{8}$

$= 3-\dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{10}{8}$

$-\dfrac{5}{4} \quad \sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}$

$3+\dfrac{2}{\underline{3-5}}\ \dfrac{8}{1} \qquad 3+\dfrac{2}{3-8} \qquad \dfrac{7}{8} \quad -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{8} \quad \dfrac{2}{4} \qquad \dfrac{2\cdot\cancel{\sqrt5}\ \cancel{\sqrt5}}{5\cdot\cancel{5}} = \dfrac{2}{5}$

-2

$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{\pi}{}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \cancel{\sin 2\beta\cos}$

$3-1$

$= \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$

$-\dfrac{7}{8}$

$= \sin 2\alpha\ (\cos 4\beta + 1) + 2\sin 2\cancel{\beta}\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$

$3+\dfrac{2}{3-\frac{7}{8}} = \sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta) + \dfrac{4}{5}\cos 2\alpha = -\dfrac{4}{5} \qquad \dfrac{11}{4} \quad -\dfrac{11}{8}\ \dfrac{4}{2,7}$

$= 2\cdot\sin 2\alpha\ \dfrac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{25}\,5} \qquad \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt5} \qquad tg\,0 = \dfrac{\frac{30}{28}\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$3+\dfrac{2}{\underline{3-3,5}}\quad 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right) \qquad \alpha =$

$-0,5 \quad 2\alpha + \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt5}\right) = \arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$

$3-4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 = {}^{\log_{12}(x^2+18x}$

$\dfrac{t^{\log_{12} 5}}{+t^{\log_{12} 12}}$

$t^{\log_t 5 \cdot \log_{12} t} = t^{\frac{\log_{12} 5}{\log_{12} t} \cdot \log_{12} t}$

$\dfrac{\log_5 5}{\log_5 12}$

$\log_2 8 = x$

$6^{\log_6 2}$

$\log_a b = c$

$b = a^c$

$\log_{2} 36 = x$

$36 = x^6$

x

$x = 2$

$38 = 2^x$

$x = 3$

$\cancel{x^{\log_{12} 5} - x^{\log_{12} 13}}$

$6^{\log_6 2} = x$

$\log_6 2 \log_6 6 = x \log_6 x$

$x = 2$

$\cancel{6^2 - 6^7 - 6^3}$

$6-1$ $\quad \underbrace{8+2}_{10} - 16 = -6$

$\log_{12} 5 = x$

$5 = 12^x$ $\quad 13 = 12^x$

$2^3 + 2 - 2^4 =$

$= (2-1)(3-1)(3-4)(1-4)$

$= 1 \cdot 2 \cdot -1 \cdot -3 = 6$

$10 - 32$

$2^3 + 2 - 2^5 = -22$

$(2-1)(3-1)(1-5) - (3-5)(3+1+5) =$

18

$1 \cdot \underbrace{2 \cdot -4}_{-8} \cdot -2$ $\quad 16$

$(2-1)(\cancel{2-3})(\cancel{2-1})(2-5)$

$\cancel{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -3}$

$t^{\log_{12} 12}$

$\cancel{24}$

$\dfrac{\log_t 5 - 1}{\log_t 12}$

$t^{\log_t 5}$

$\cancel{t^{\log_{12}5-\log_{12}12}+1 \geq t^{\log_{12}13-1}} \geq 0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq -1$

$\overset{8}{\underset{8}{2\cdot2\cdot2}\cdot2\cdot2\cdot2} = 64-8$

$2^6 - 2^3$

$(2-1)(6-3) = 3$

$18-5=13$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} \geq 2(2+\sqrt{10})$

$4+\sqrt{10} \geq 2(2+\sqrt{10})$

$5 \cdot 5\ (x^2+18x)^{\log_{(x^2+18x)}5\cdot\log_{12}}$

25

$4+\sqrt{10}$

$\log_{12}5 = x$

$5=12^x \quad x<1$

$4-\sqrt{10} > 4-2\sqrt{10}$

$\sqrt{10} < 2\sqrt{10}$

$12^{\frac{3}{2}} = \sqrt{12^3}$

$12\sqrt{12}$

$13 = 12^y \quad y>1$

$144 = 12^y$

$\log_{12}5 < 1 \qquad \log_{12}13 > 1 \qquad 1 < \log_{12}13 < 1{,}5$

$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad t^{\log_{12}5} < t^1 \qquad t^{\log_{12}13} > t \qquad t < t^{\log_{12}13} < t^{1{,}5}$

$\log_{25}5$

$x=\frac{1}{2}$

$5=25^x$

$\frac{5\sqrt{10}}{2}$

$\frac{2}{3}$

$y \leq 1 \quad y \geq 1$

$x \leq 2 \quad x \geq 2$

$\frac{5}{\sqrt{10}}+1$

$\sqrt[3]{125}$

$2y$

$\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

$\sqrt{10}$

$-2 \geq 0$

не верно

$x \geq 2y$

$4y-2$

$6 \geq 4$

верно

$8-2$

$9(y-1)^2 + (y+1-2)^2 = 25$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab)=f(a)+f(b) \quad a,b\in(0;+\infty)$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$ p-простое число

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f(\frac{x}{y})<0$

$\frac{-225}{8}+\frac{2\cdot 225}{8}-17 = \frac{225-17\cdot 8}{8} = \frac{89}{9}$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$7\cdot 7=49$

$17\cdot 8 = 136$

$(x^2+18x)^{\log_{12}(x^2+}$

$225-136=89$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+5^{\log_5}$

$|x^2+18x| = 5^{\log_5(x^2+18x)\cdot\log_{12}13}$

$\frac{\log_{12}(x^2+18x)}{\log_{12}5}\cdot\log_{12}13 =$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 5^{\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}\cdot\log_{12}(x^2+18x)} + 5^{\frac{\log_{12}(x^2+18x)}{\log_{12}5}}$

$5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13} \ge 0$

$5^{\log_5 t}$

$5^{\log_{12}t}+5^{\log_5 t}-5^{\log_5 t\cdot\log_{12}13} \ge 0$

$-8x^2-20x-12=0$

$-8x^2-6x-14x-12=0$

$-2x=3{,}5x-\frac{2}{4x+3}$

$-2x-\frac{1}{2}=\frac{3x-2}{4x+3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$x^2+18x=t$

$5^{\log_5 t}=t$ $\quad 5^{\log_5 t \cdot \log_{12} 13} = \frac{\log_{12} t}{\log_{12} 5} \cdot \log_{12} 13$

$= \log_{12} t \cdot \log_5 13$

$5^{\log_{12} t} + 5^{\log_5 t} - 5^{\log_{12} t \cdot \log_5 13} \geq 0 \quad | : 5^{\log_{12} t}$

$\cancel{1 + 5^{\log_5 t - \log_{12} t} - 5^{\log_{12} t (\log_5 \frac{13}{5})} \geq 0}$

$1+25^{\log}$

$\cancel{\frac{1}{\log_t 5} - \frac{1}{\log_t 12} = \frac{\log_t 12 - \log_t 5}{\log_t 5 \cdot \log_t 12}} = \frac{\log_t \frac{12}{5}}{\log_t 5 \cdot \log_t 12}$

$\cancel{5^{\log_{12} t} (1-5}$ $\quad \cdot 15$ $\quad 12x+11$

$\frac{12x+9+2}{4x+3}$

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$

$-8x^2-30x-17=0$

$D = 900 - 8 \cdot 17 \cdot 4$ $\quad \frac{3(4x+3)+2}{4x+3}$

$\begin{array}{r} \times 136 \\ 4 \\ \hline 544 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} +2 \\ +1 \end{array}$ $\quad \cancel{\log}$

$t^{\log_{12} 5} < t \quad 1 < t^{\log_{12} 13} < 1,5$

$\begin{array}{r} -900 \\ 544 \\ \hline 356 \end{array}$

$t \cdot t^{\log_{12} 13} < t\sqrt{t}$ $\quad y = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$t \geq t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5}$

$\frac{12}{12}$

$t=12$ верно $\quad 8 \geq 13-5$

$\cancel{12x+11x}$ $\quad \frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$\times 15$, $15+2$, 15, $15/225$

$\in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

22−6

$-8x^2-30x-17$ – парабола ветви вниз

14+2

16 $\quad ax+b$ – линейная функция.

$ax+b \leq -8x^2-30x-17$ вся парабола лежит выше прямой

1) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$
2)

$$-8\cdot\frac{9}{\cancel{18}_{2}}+\frac{30\cdot 3}{4}-17$$

$$\frac{-9+45-34}{2}$$

$xy-x-2y+12\geq 0$

$(x^2-4x+4)+(9y^2-2\cdot 3\cdot 3y+9)=12+\underbrace{4+9}_{13}$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$$\begin{array}{r} 45 \\ -\ 9 \\ \hline 36 \end{array}\ -34$$

$(y-1)(x-2)\geq 0$

$x-2y\geq 0$

$\begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases}$

$x\geq 2y$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$3y=z$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

~~x^2+1-5y~~

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_{12}=\frac{1-5}{}$

$5y-1+3y-3=8y-4$

$5y-1-3y+3=2y+2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$165 - 121 = 44$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$\frac{-121+165-34}{2}$

$x=0 \quad x=-18$

$+ \quad - \quad +$

$-18 \quad 0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

т.к $x^2+18x>0$ – ОДЗ

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$5^{\log_{12}t}=t^{\log_t 5\cdot\log_{12}t}=t^{\frac{\log_{12}5}{\log_{12}t}\cdot\log_{12}t}=t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$132-121=11$

$11+34=45$

$0,5<\log_{12}5<1 \qquad 1<\log_{12}13<1,5$

$12\cdot 11 = 132$

$\sqrt{t}<t^{\log_{12}5}<t \;|+t \qquad t<t^{\log_{12}13}<t\sqrt{t}$

$\sqrt{t}+t<t^{\log_{12}5}+t<2t$

$L=-8\cdot\frac{22^2}{8^2}+30\frac{22}{8}-17=-\frac{4\cdot 11^2}{4\cdot 2}+\frac{12\cdot 11}{2}-17$

$44-34=$

$-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2}=-\frac{45}{2}$

$15\cdot 11=165$

$\frac{10}{2}=5$

$-\frac{8\cdot 11^2}{4\cdot 4}+30\frac{11}{4}$

$165-121=44$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3 (Нумеровать только чистовики)