# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина $N$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $KN$. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра $LM$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$a+(a-b)^{\log_3 4} \geq b+5^{\log_3(a-b)}$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}=(10x-x^2)^{\log_3 4+1} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\overset{\shortparallel}{a}$

$64(x_0-1)^2=(4x_0-5)^2$

$64x_0^2-128x_0+64=16x_0^2-40x_0+25$

$48x_0^2-88x_0+39=0$

$a^{\log_3 12} \geq 5^{\log_3 a} \quad |\log_3$

$\log_3 a^{\log_3 12} \geq \log_3 5^{\log_3 a}$

$\log_3 12 \cdot \log_3 a \geq \log_3 a \cdot \log_3 5$

$\log_3 a(\underset{\vee 2}{\log_3 12}-\underset{\wedge 2}{\log_3 5}) \geq 0$

$\log_3 a \geq 0$

$a \geq 1$

$10x-x^2 \geq 1$

$\begin{cases} x^2-10x+1 \leq 0 \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$

$6 \cdot 16=60+36$

№6

$$-\frac{216}{\frac{64}{152}}$$

$$16\frac{x-1}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$D = 36\cdot36 - 12\cdot32 = 6\cdot216 - 6\cdot64 = 6(152)$$

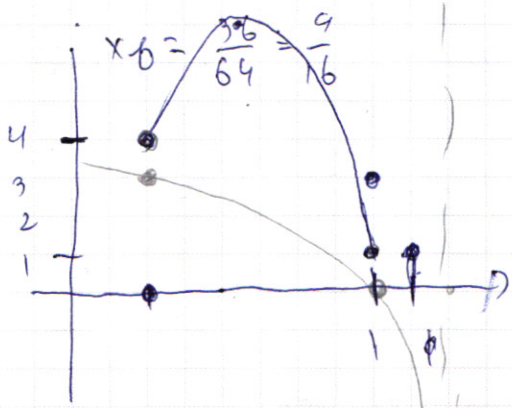
$$f(1) = -32+36-3 = 1$$

$$f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{-32}{16} + 9 - 3 = 4$$

$x=1: \quad 0 \le a+b \le 1$

$x=\frac{1}{4}: \quad \frac{-12}{-4} \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

$$3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$$




$$2x^2+2$$

$$2(x^2+1) = 2(2x) = 4x$$

$x = \frac{5}{4}$

$$-\frac{32\cdot81}{16\cdot16} + \frac{36\cdot9}{16} - 3$$

$$\frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$$

$$f(x) = 16\frac{x-1}{4x-5}$$

$$f'(x) = 16\frac{\cancel{4x-5-(x-1)4}}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2}$$

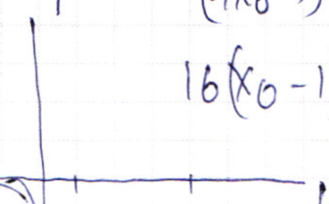
$$y_{кас} = f_1(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$$y = -1\left(x-\tfrac{1}{4}\right) + 3$$

$$y = -x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$f(1) = 2\tfrac{1}{4} > 1 \Rightarrow a < -1$$



$$\frac{-16(1-x_0)}{(4x_0-5)^2} + 16\frac{(x_0-1)}{4x_0-5} = 1$$

$$16(x_0-1)\left(\frac{4x_0-5+1}{(4x_0-5)^2}\right) = 1$$

$$16(x_0-1)(4x_0-4) = (4x_0-5)^2$$

$$16\cdot4(x_0-1)^2 =$$

$+ax+b$

$(a+b)=1$

$$y_{кас} = x\cdot \underbrace{f_1(x_0)}_{a} + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0}_{b}$$

$$f_1'(x_0) - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 1$$

$$f'(x_0)(1-x_0) + f(x_0) = 1$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{2}{5}$

№2

$2xy-12y-x+6=0$ $\quad 2xy-x-12y+6$

$2xy-12y$

$(x\quad)(-2y)$

$(x-6)(2y-1)$

$(x-6)(2y-1)$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y=45+36+9 \end{cases}$$

$(x-6)^2+(6y-3)^2$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$3+4+5+5+5+5+6$

33

$$\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$(-x+12y-2)(-x+12y+3)$

$$\begin{cases} (x-12y)^2=(x-6)(2y-1) \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a$

$2y-1=b$

$a-6b=x-6-12y+6$

$$\begin{cases} ab=(a-6b)^2 \\ a^2+9b^2=90 \\ (a-6b)\geq 0 \end{cases}$$

$a-6b \geq 0$

$$\begin{cases} 9b=(a-6b)^2=a^2-12ba+36b^2 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-139b+36b^2=0$

$a^2=90-9b^2$

$27b^2-13ab+90=0$

$9b=a^2-12ab+36b^2$

$a^2-139b+36b^2=0$

$-139b+27b^2+90=0$

$27b^2-139b+90=0$

$D=13a^2$

$27b^2=13ab-90$

$9b^2=\frac{13}{3}ab-30$

$27b^2+90=13ab \quad |:13b$

$\cancel{\frac{27}{13}b+\frac{90}{13b}=a}$

$\frac{27b^2+90}{13b}=a$

$9b^2+\left(\frac{27b^2+90}{13b}\right)^2=90 \qquad 13^2=169$

$+\begin{array}{r}169\\81\\\hline 250\end{array} \quad -\begin{array}{r}540\\169\\\hline 371\end{array}$

$9b^2+9^2\frac{(3b^2+10)^2}{13^2b^2}=\cancel{90}\ 10 \quad |\cdot 169b^2$

$169b^4+9(9b^4+60b^2+100)=169b^2 \qquad 300\cdot300=90000$

$250b^4+540b^2-169b^2+900=0$

$250b^4+371b^2+900=0$

$b^2=\frac{-371\pm\sqrt{371^2-900000}}{500}$

$\times\begin{array}{r}371\\371\\\hline 371\\2597\\1113\\\hline 137641\end{array}$

$(300+71)^2-900000$

$\frac{16x-16}{4x-5}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$

$x_b=\frac{36}{32\cdot 2}=\frac{9}{16}$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$81-$

$9\cdot 9-$

$81;9$

$9\cdot9-13\cdot9+4\cdot9=0$

$9-13\cdot9+36\cdot9$

$b=1$
$a=9$

$a=3$
$b=3$

$a^2+\frac{13}{3}ab-30-90=0$

$a^2+\frac{13}{3}ab-120=0 \quad |\cdot 3$

$3a^2+13ab-360=0$

$(3a \qquad )(a \qquad )$

$D=169b^2+12\cdot360$

$a=\frac{-13b\pm\sqrt{169b^2+12\cdot360}}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha(1+\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \\ \end{cases}$$

$\cos 2\alpha = t$

$\sin 2\alpha = x$

$\sin 2\beta = y$

$\frac{\cancel{\sin 2}}{\cos 2\beta} = z$

$$\begin{cases} 2xz^2 + 2yzt = -\frac{2}{5} \\ xz + ty = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$2z(xz+yt) = -\frac{2}{5}$

$2z \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$

$z = \cos 2\beta = z = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$y = \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} \cancel{2}x \cdot \frac{1}{5} + \cancel{2}t \cdot \frac{2}{5} = -\frac{\cancel{2}}{5} \\ x\frac{\sqrt{5}}{5} + t \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{2t}{5} = -\frac{1}{5} \\ x + \frac{2t}{\cancel{0}} = -1 \end{cases}$$

$x + 2t = -1$

$\cos 2\alpha =$

$\cos^2\alpha - \left(\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2}\right)$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

~~$\sin 2\alpha + 2$~~

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1 - 2\cos 2\alpha$

$\cancel{1} - \cos^2 2\alpha = \cancel{1} + 4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha$

$5\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 0$

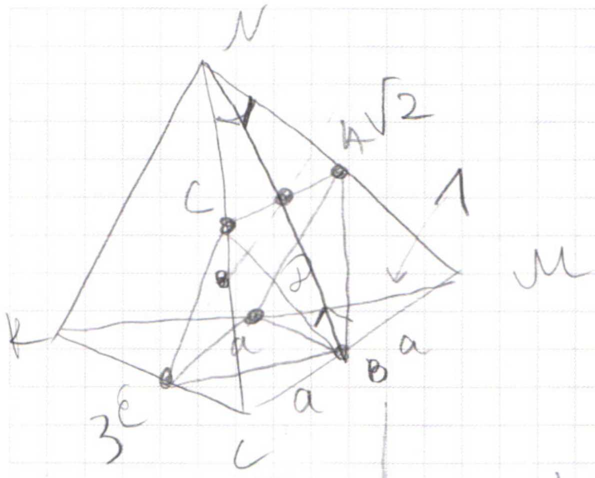
$\cos 2\alpha(5\cos 2\alpha + 4) = 0$

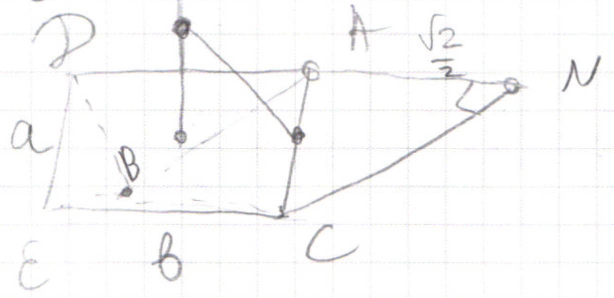
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


N
A√2
1
C
D
M
K
a
B
a
3E
a
C



D
A
√2/2
N
a
B
E
B
C

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

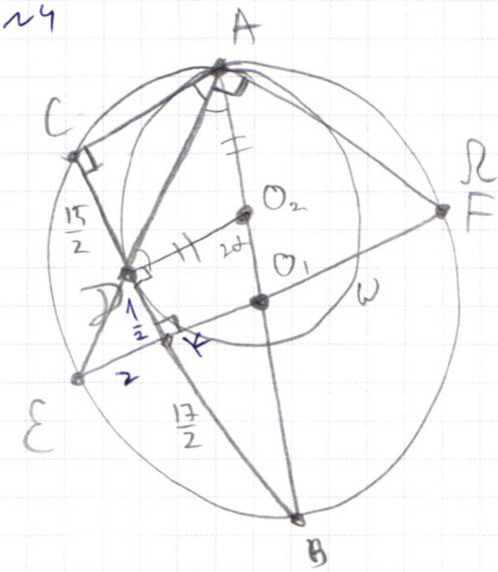
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4




$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$BC = 16$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 1{,}5 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\frac{O_2D}{AC} = \frac{\frac{17}{2}}{16} = \frac{17}{32}$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$$

$$\begin{array}{r} \times 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$AC = 30x$

$AB = 34x$

$R = 17x$

$256 + 900x^2 = 1156x^2$

$256 = 256x^2$

$\boxed{x=1}$

$R = 17$

$$\frac{r}{AC} = \frac{17}{32}$$

$$r = \frac{AC \cdot 17}{32} = \frac{30 \cdot 17}{32} = \frac{15 \cdot 17}{16}$$

$r = \frac{15 \cdot 17}{16}$

$9;1$

$x - 6 = 9$

$8y - 1 = 1$

$x = 15$

$y = 1$

$$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ 4a^2 + \end{cases}$$

$$\frac{13ab - a^2}{36} = \frac{90 - a^2}{9}$$

$$13 \cdot \cancel{9}ab - \cancel{9}a^2 = 36 \cdot \cancel{90} - \cancel{36}a^2$$

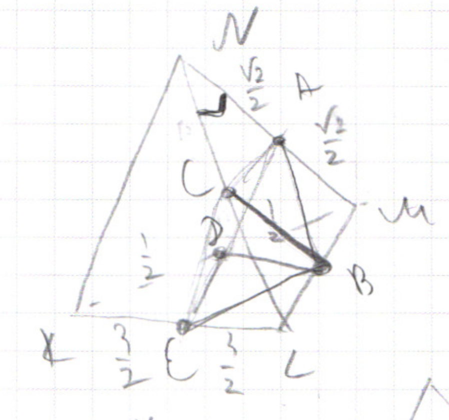
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

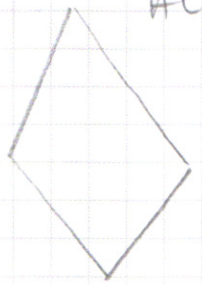
(Нумеровать только чистовики)

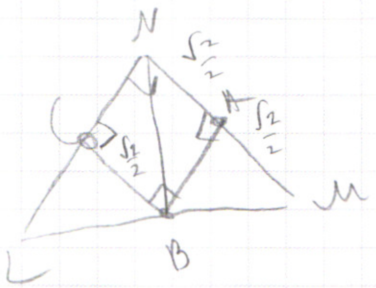
$\angle M - ?$

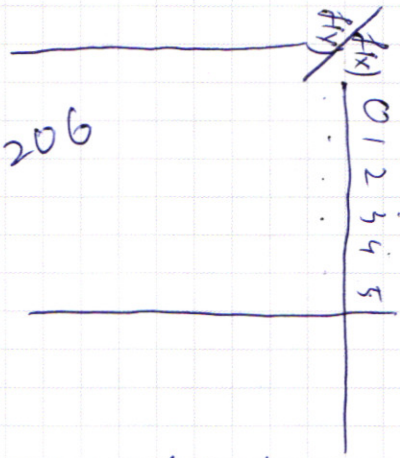



$NABC$ - пр/уг
$ACED$ - пр/уг.

$CE \perp DE \Rightarrow KN \perp \angle M$






$NB = BM = ED$

$189 + 17 = 209 - 3 = 206$

n5

$D(f): (0; +\infty)$ Q.

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$2 \le x, y \le 25$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(b) = f(1) + f(b)$ $\quad f(1) = 0$ $\quad f(1) = f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$+$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f[5] = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

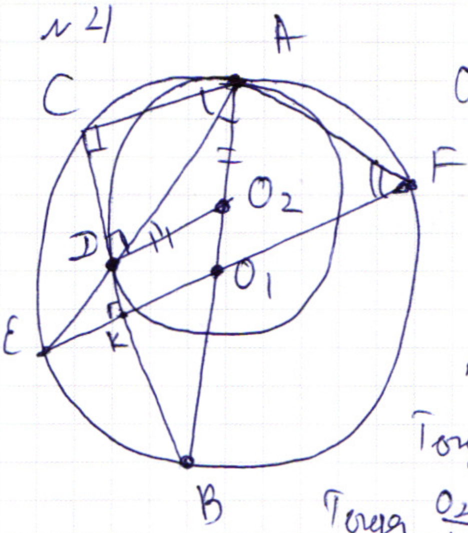
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2




$O_2, O_1$ - центры $\omega$ и $\Omega$ Дано: $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$

Решение.

$BC$ - касательная к $\omega \Rightarrow O_2D \perp BC$, где $O_2$ - центр $\omega$

$AB$ - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^0$ как вписанный, опир. на диам.

Тогда $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$ имеют общий угол $\Rightarrow$ они подобны.

Тогда $\frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{15}{2}+\frac{17}{2}} = \frac{17}{32}$

Тогда $O_2D = r = \frac{17}{32}AC$.

Т.к. $O_2D \perp BC$ и $AC \perp BC$, то $AC \parallel O_2D \Rightarrow \angle CAO_2 = \angle ADO_2$ как накр. леж.

$\triangle DO_2A$ - р/б $\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle DAO_2 \Rightarrow \angle CAD = \angle DAO_2 \Rightarrow AD$ - бисс. $\triangle CAB$.

Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{15}{17}$ по св. бисс.

Пусть $AB = 34x$, $AC = 30x$

Тогда в прям. $\triangle ABC$ по Т. Пифагора: $256 + 900x^2 = 1156x^2 \Rightarrow 256 = 256x^2$

$x = 1$

Тогда $AB = 34 \Rightarrow R_\Omega = 17$, $AC = 30$

$r = \frac{17}{32}\cdot 30 = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

~~EK~~ Т.к. $AE$ - бис. $\angle CAB$, то $E$ - сер. дуги $BC$, значит $EF \perp BC$ - это диаметр.

$\angle EAF = 90^0$ по св. впи. углов.

$BC \cap EF = K$, т.к. $EF$ - диам, то $K$ - ср $BC$

Тогда $CK = BK = 8 \Rightarrow KD = \frac{1}{2}$

~~Х~~ $\triangle EKD$ и $\triangle ACD$: $\angle EKD = \angle ACD = 90^0$, $\angle EDK = \angle ADC$ как верт.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда $\triangle EKD \sim \triangle ACD$, причём $\frac{KD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{15}$ как соотв.

Тогда $\frac{EK}{AC} = \frac{1}{15} \Rightarrow EK = \frac{AC}{15} = \frac{30}{15} = 2$

Заметим, что $\triangle EDK$ и $\triangle EFA$ подобны как прям по острому углу.

$\frac{ED}{EF} = \frac{\sqrt{4+\frac{1}{4}}}{34} = \frac{\sqrt{17}}{68}$

Значит, если $S_{EDK} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$, то $\frac{S_{EDK}}{S_{AEF}} = \frac{17}{68^2} = \frac{1}{2S_{AEF}}$

$S_{AEF} = \frac{68^2}{17\cdot 2} = \frac{34\cdot 34\cdot 2\cdot 2}{17\cdot 2} = 34\cdot 4 = 136$

$\angle AFE = \angle EDK$ из подобия

$\angle AFE = \angle EDK = \operatorname{arctg} 4$

Ответ: $R_\Omega = 17$, $R_\omega = \frac{255}{16}$, $S_{\triangle AEF} = 136$, $\angle AFE = \operatorname{arctg} 4$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1\cdot b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Найдём значение функции для всех чисел от 2 до 25:

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$ $\quad f(24) = f(2)+f(12) = 0$ $\quad f(25) = f(5)+f(5) = 2$

Т.е. значения $f(x)$, где $x \in [2;25]$, $x \in N$ — $0,1,2,3,4,5$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Т.е. нужно посчитать кол-во пар $(x;y)$, где $f(x) < f(y)$.

Значение 0 $f$ принимает в 10 точках

1 $f$ принимает в 7 точках

2 $f$ принимает в 3 точках

3 $f$ принимает в 1 точке

4 $f$ принимает в 2 точках

5 $f$ принимает в 1 точке

Заполним табличку:

| $f(y)$ \ $f(x)$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 7 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 10 | X | X | X | X | X | X |
| 1 | 7 | 70 | X | X | X | X | X |
| 2 | 3 | 30 | 21 | X | X | X | X |
| 3 | 1 | 10 | 7 | 3 | X | X | X |
| 4 | 2 | 20 | 14 | 6 | 2 | X | X |
| 5 | 1 | 10 | 7 | 3 | 1 | 2 | X |
| | | 140 | 49 | 12 | 3 | 2 | |

← значение $f(x)$

← кол-во точек с таким значением.

Нам нужны только клетки, где $f(x) < f(y)$

Суммы чисел во всех таких клетках, это и есть кол-во пар чисел $(x;y)$

$70+30+10+20+10+21+7+7+14+$

$+3+3+6+2+2+1 = 140+49+12+3+2 =$

$= 140+49+17 = 206$

Ответ: 206

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-12y)^2=(x-6)(2y-1) \\ x-12y\geqslant 0 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a = x-6$, $b = 2y-1$

Тогда $x-12y = a-6b$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \\ (a-6b)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=13ab-36b^2 \\ a^2=90-9b^2 \end{cases} \Rightarrow 90-9b^2-13ab+36b^2=0$$

$$27b^2-13ab+90=0$$

$$\begin{cases} 27b^2-13ab+90=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ a\geqslant 6b \end{cases} \quad \Bigg| \Rightarrow a=9,\ b=1$$

$$x=15 \quad y=1$$

$$90=a^2+9b^2\geqslant 9b^2+36b^2=45b^2$$

$$b^2\leqslant 2$$

$$90=a^2+9b^2\leqslant a^2+\cancel{9\cdot 2}18$$

$$a^2\geqslant 72$$

Ответ: $(15;1)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\log_3(10x-x^2) \Rightarrow 10x-x^2>0$ (~~ОДЗ~~ область определения выражения)

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}-x^2\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4+1}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $a=10x-x^2$, $a>0$

$a^{\log_3 12}\geq 5^{\log_3 a}$ | $\log_3$ обе части, т.к. $\log_3 x$ – возрастающ. ф-я.

$\log_3 a^{\log_3 12}\geq \log_3 5^{\log_3 a}$

$\log_3 12\cdot\log_3 a\geq\log_3 a\cdot\log_3 5$

$\log_3 a(\log_3 12-\log_3 5)\geq 0$

$\log_3 12>\log_3 5$ т.к. $12>5$, а $\log_3$ – ↑

⇓

$\log_3 a\geq 0 \Rightarrow a\geq 1$

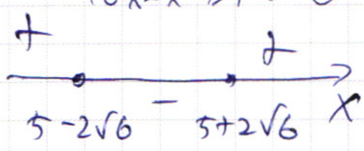
$10x-x^2\geq 1$

$x^2-10x+1\leq 0$

$D=100-4=96$

$x=\dfrac{10\pm 4\sqrt6}{2}=5\pm2\sqrt6$

все полученные $x$ принадлежат ~~ОДЗ~~ области опред., т.к. $10x-x^2\geq1>0$




Ответ: $x\in[5-2\sqrt6;\,5+2\sqrt6]$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin2\alpha = x \quad \cos2\alpha = t \quad \sin2\beta = y \quad \cos2\beta = z$

$$\begin{cases} xz+yt = -\frac{\sqrt5}{5} \\ 2xz^2+2yzt = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow z(xz+yt) = -\frac{1}{5}$$

$$z\cdot -\frac{\sqrt5}{5} = -\frac{1}{5} \Rightarrow z = \frac{\sqrt5}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt5}$$

$x+2t = -1$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha = -1$

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-2\cos2\alpha$

$$\begin{cases} \cancel{1}-\cos^2 2\alpha = \cancel{1}+4\cos^2 2\alpha+4\cos2\alpha \\ 1+2\cos2\alpha \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos2\alpha = 0 \\ \cos2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \\ 1+2\cos2\alpha \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos2\alpha = 0 \\ \cos2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \\ \cos2\alpha \le -\frac{1}{2} \end{cases}$$


$$\boxed{\cos2\alpha = -\frac{4}{5}}$$

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = -\frac{4}{5}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

Мы знаем, что $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

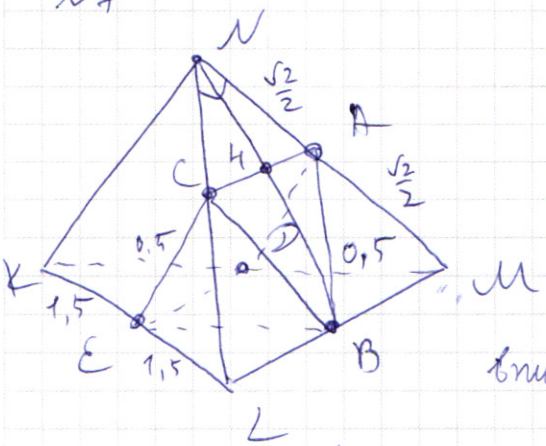
Тогда $1+tg^2\alpha = 10$

$tg^2\alpha = 9$

$tg\alpha = \pm3$

Ответ: $\pm 3$

№7




Пусть $A, B, C, D, E$ - серед. ребер.

Тогда $CB = NA = \frac{NM}{2}$, $CB \parallel NA \Rightarrow$
$\Rightarrow NABC$ - параллелограмм.

Т.к. $NABC$ вписан в сферу, то $NABC$ - впис. четырёхугольник $\Rightarrow NABC$ - прям-к. $\Rightarrow \angle LNM = 90°$

$CA \parallel ED$, $CA = \frac{ML}{2} = ED \Rightarrow ACED$ - паралл. $\Rightarrow$ прямоуг. (аналогично)

$AC \perp CE \Rightarrow KN \perp LM$.

Пусть $NB \cap AC = H$.

$LB = BM = NB$ по св. прям-х $\Delta$.

Пусть $LB = a$, Тогда $ED = LB = BM = AC = NB = a$