МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

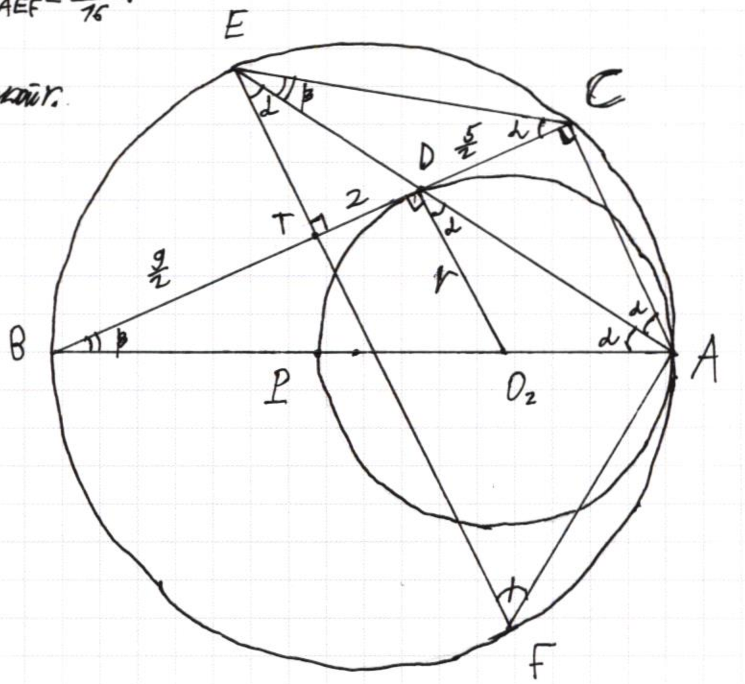
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.

Ответ: $r=\frac{65}{24}$, $R=\frac{39}{8}$, $\angle AFE=\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $S_{AEF}=\frac{351}{16}$.



Решение: Обозначим радиус большой R, а маленькой r.

AB-диаметр, поэтому $\angle BCA=90^\circ=\angle ADP=\angle BTF$.

тогда $AC \parallel DO_2 \parallel EF$.

Обозначим $\angle BAE=\angle ADO_2=\angle AEF=\angle BCE=\alpha$.

обозначим $\angle CBA=\angle CEA=\beta$.

т.к. $\angle CDA=\alpha+\beta$ (внешний), то

$\Delta ETC\sim\Delta DCA$ по 3 углам, тогда

$\angle ECT=\angle DAC=\angle BAE=\alpha$.

Значит AD - бис-са $\angle BAC$ и E - середина $\breve{BC}$.

Тогда $BE=EC$ и $BT=TC=\frac{\frac{5+13}{2}}{2}=\frac{9}{2}$.

Тогда $BT=\frac{9}{2}$, $TD=2$, $DC=\frac{5}{2}$.

По св-ву бис-сы: $\frac{AB}{AC}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{13}{5}$; $\frac{2R}{AC}=\frac{13}{5}$, $2R=\frac{13AC}{5}$.

$\frac{r}{CA}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}}=\frac{13}{18}$, $AC=\frac{18}{13}r$. Тогда $2R=\frac{13AC}{5}=\frac{13\cdot18r}{13\cdot5}=\frac{18r}{5}\Rightarrow R=\frac{9r}{5}$.

$BP=2R-2r=\frac{18r}{5}-2r=\frac{8r}{5}$. Степень точки B отн. ω: $\frac{8r}{5}\cdot2R=\frac{8r}{5}\cdot\frac{18r}{5}=\frac{13^2}{4}$, $r^2=\frac{13^2\cdot5^2}{24^2}$.

$r=\frac{65}{24}\Rightarrow R=\frac{9\cdot65}{5\cdot24}=\frac{39}{8}$.

$AC=\frac{18r}{13}=\frac{15}{4}$; $AD^2=\frac{25}{4}+\frac{225}{16}=\frac{25\cdot13}{16}$, $AD=\frac{5\sqrt{13}}{4}$; $\cancel{\sin\beta=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{15}{4}}{13}\ \frac{\frac{15}{4}}{2R}=\frac{\frac{15}{4}}{13A}}$

По т. синусов в ΔABD: $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{BD}{\sin\alpha}$; $\sin\alpha=\frac{BD\cdot\sin\beta}{AD}$; $\sin\beta=\frac{AC}{2R}=\frac{5}{13}$.

$\sin\alpha=\frac{\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{13}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos^2\alpha=1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}$; $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\cos\alpha=\frac{CT}{EC}$, $EC=\frac{CT}{\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{13}}{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$; $ET^2=\frac{9\cdot13}{4}-\frac{81}{4}=\frac{36}{4}=9$; $ET=3$. $\cos\angle TEC=\frac{ET}{EC}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{13}}{2}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

т.к. $AC\parallel EF$, то ECAF - равнобокая трап. и $\angle EFA=\angle FEC=\angle TEC=\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

$\sin\angle AEF=\sin\angle TEC=\frac{CT}{EC}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$. $ET\cdot TF=3\cdot TF=\frac{BT}{TC}=\frac{81}{4}$, $TF=\frac{27}{4}$, $EF=3+\frac{27}{4}=\frac{39}{4}$.

$\frac{AF}{\sin\alpha}=2R$, $AF=2R\cdot\sin\alpha=\frac{39}{4}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$

$S_{AEF}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot EF\cdot\sin\angle AEF=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{39}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13}=\frac{27\cdot13}{16}=\frac{351}{16}$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

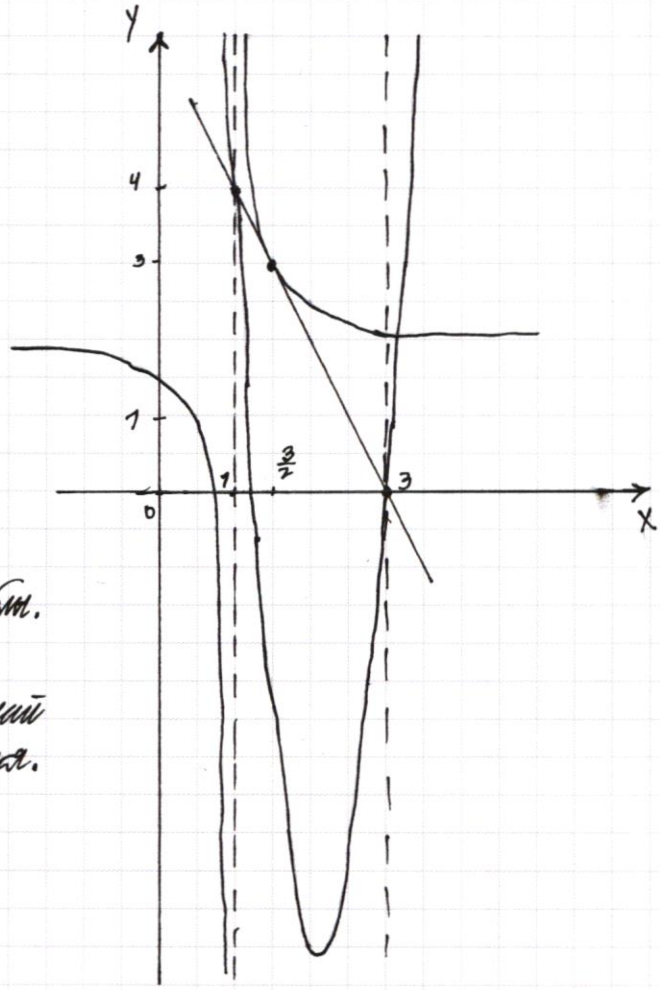
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.

Ответ: $(-2, 6)$.

Решение:



$\frac{4x-3}{2x-2} = 2+\frac{1}{2(x-1)}$

Построим графики функций

$2+\frac{1}{2(x+1)}$ и $8x^2-34x+30$.

График прямой $ax+b$ должен на промежутке $(1;3]$ идти ~~выше~~ не ниже параболы, но ~~ниже~~ не выше гиперболы, при этом на этом промежутке график гиперболы выше графика параболы.

Из этого следует, что на промежутке $(1;3)$ у этих двух графиков не должно быть пересечений с прямой $ax+b$, иначе одно из неравенств нарушится. А вот касания могут быть.

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1,4)$ и $(3,0)$, они принадлежат параболе.

Это прямая $y=-2x+6$. Посмотрим, пересекается ли она с гиперболой.

$-2x+6 = 2+\frac{1}{2(x-1)}$, $-2x+4 = \frac{1}{2x-2}$, $(2x-2)(-2x+4)=1$, $-4x^2+4x+8x-8=1$,

$4x^2-12x+9=(2x-3)^2=0$. Значит, эта прямая касается гиперболы в точке $(\frac{3}{2}, 3)$.

Эта прямая нам подходит.

Исходя из рисунка мы понимаем, что если прямая $ax+b$ не проходит одновременно через точки $(1,4)$ и $(3,0)$, то эта прямая на промежутке $(1;3)$ либо пересечет первый график, либо второй, чего быть не должно.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

Ответ:

Решение:

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$. ОДЗ: $x^2+6x=x(x+6)>0$,

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$.

Далее решаем на ОДЗ, то есть $x^2+6x>0$.

$x^2+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}=(x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

Заменим $x^2+6x=t$:

$t \geqslant t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$ ~~$=t^{\log_4 5}-3$~~

$\log_4 t=\frac{\log_3 t}{\log_3 4}$; $t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}=t^{\log_4 5}-3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}}=t^{\log_4 5}-t^{\frac{1}{\log_3 4}}=t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$

$t \geqslant t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$

~~пусть $t\neq 1$. Прологарифмируем по основанию t:~~

~~$1 \geqslant \log_t(t^{\log_4 5}-t^{\log}$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. $\boxed{\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$tg\,\alpha - ?$

$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$, $\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}}=\frac{4}{17}$,

$\boxed{\cos 2\beta=\frac{4\sqrt{17}}{17}}$

$\cancel{\sin^2 2\beta=1-\frac{4\cdot 17}{17^2}=\frac{289-68}{289}=\frac{221}{289}}$

$\sin^2 2\beta=\frac{289-16\cdot 17}{289}=\frac{\cancel{289}\ 17}{\cancel{289}}=\frac{1}{17}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=$

$=\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\sin 2\alpha+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

1) $\sin 2\beta=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\sin 2\alpha=t$

1. $4t+\sqrt{1-t^2}=-1$,

$\sqrt{1-t^2}=+4t-1$

$\cancel{221}\ |\ 7$, 3

$\cancel{221}\ |\ 11$, 2

$221\ |$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(2x-3)^2(y-1)$

№2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4, \end{cases}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2,$

$\begin{cases} 4x^2+9y^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

$x^2+6x=t>0$

$t \geq |t|^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$t \geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$2^{2\cdot 3}=(4)^3=64$

$\shortparallel$

64

$\cancel{43}$

$\log_t t \geq \log_t(t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t})=1$

$\log_4 t=\dfrac{\log_3 t}{\log_3 4}$

$3^{\log_4 t}=t^{\frac{1}{\log_3 4}}=t^{\log_3 4}$

$t \geq t^{\log_4 5}-t^{\log_3 4}$

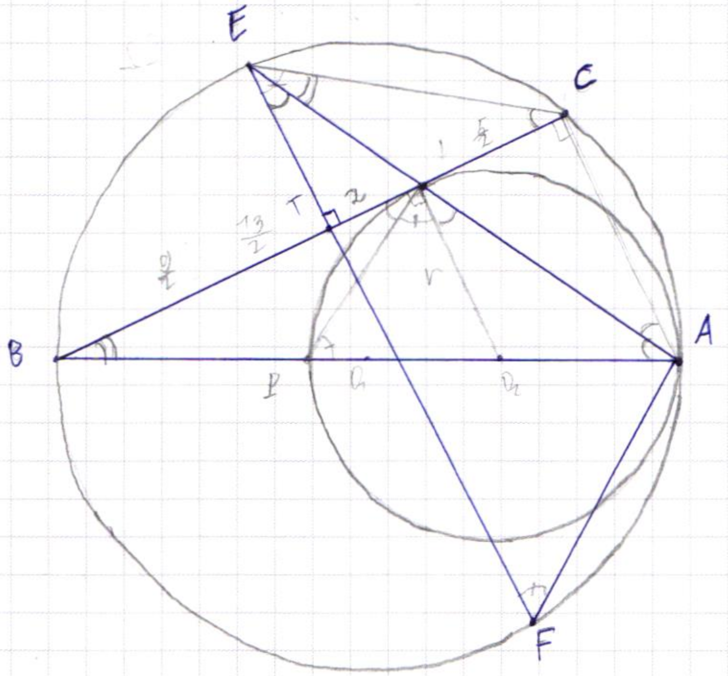
$\log_3 4=\dfrac{\log_4 4}{\log_4 3}=\dfrac{1}{\log 4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$BP = 2R - 2r = \cancel{2R}$

$= \frac{18r}{5} - 2r = \frac{8r}{5}$

$\frac{8r}{5} \cdot 2R = \frac{8r}{5} \cdot \frac{18r}{5} = \frac{13^2}{4},$

$\cancel{36r^2}$

$\frac{16r \cdot 36r}{25} = 13^2,$

$\frac{576r^2}{25} = 13^2,$

$r^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{24^2}$

$\boxed{r = \frac{65}{24}}$ $\boxed{R = \frac{9 \cdot 65}{5 \cdot 24} = \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{39}{8}}$

$AC = \frac{18}{13} r = \frac{18 \cdot 13 \cdot 5}{13 \cdot 24} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

$\cancel{\sin\alpha =}$ $AD^2 = \frac{25}{4} + \frac{225}{16} = \frac{325}{16} = \frac{25 \cdot 13}{16}$

$AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$\frac{AD}{\sin\angle B} = \frac{BD}{\sin\alpha}; \frac{5\sqrt{13}}{4 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{4} = \frac{13}{2\sin\alpha},$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$CD = \frac{5}{2}; BD = \frac{13}{2}$

Найти: $\boxed{r, R, \angle AFE, S_{AEF}}$

$\frac{r}{CA} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18} = \frac{BO_2}{BA}$ $AC = \frac{18}{13} r$

$ED \cdot DA = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{4}$

$\triangle ETC \sim \triangle DCA$

Тогда $\angle ECT = \angle DAC$

$\angle ECB = \angle EAC$

Тогда $BE = EC$ и $BT = TC = \frac{9}{2}$

AD – бис-са:

$\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{13}{5}$; $2R = \frac{13}{5} AC =$

$= \frac{18r}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{18r}{5}$

$\sin\angle B = \frac{5}{13}$

$\cancel{R = \frac{9r}{13}, R}$

$R = \frac{9r}{5}$, $\boxed{\frac{R}{r} = \frac{9}{5}}$

$r = \frac{5R}{9}$

$\cancel{EC = CT \cdot \cos}$

$\cos\alpha = \frac{CT}{EC}$, $EC = \frac{CT}{\cos\alpha} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} =$

$= \frac{9\sqrt{13}}{6} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$ET^2 = \frac{9 \cdot 13}{4} - \frac{81}{4} = \frac{117 - 81}{4} = \frac{36}{4} = 9$

$\boxed{ET = 3}$

$\cos\angle E = \frac{ET}{EC} = \frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} =$

$\sin\angle E = \frac{CT}{EC} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\boxed{\angle F = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}}$

$27 \times 13 = 351$

$ET \cdot TF = 3 \cdot TF = \frac{81}{4}$, $TF = \frac{27}{4}$

$EF = 3 + \frac{27}{4} = \frac{39}{4}$

$\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R$, $AF = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{39}{4} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot EF \cdot \sin F = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

№ 5. $a, b > 0;\ a, b \in Q$

$f(ab) = f(a) + f(b)\ ;\ f(p) = [\frac{p}{4}]$

$x, y \in N$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$

$f(x) = 8x^2 - 34x + 30 =$ $\quad f(\frac{1}{2}) = 2 - 17 + 30 = 15$

$f(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$f(2) = 32 - 68 + 30 = -6$

$f(3) = 72 - 102 + 30 = 0$

$4x^2 - 17x + 15 = 0 \qquad x_1 = \frac{5}{4};\ x_2 = 3$

$D =$

$-\frac{b}{2a} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$g(x) = \frac{1}{2(x-1)} + 2$

$g(\frac{1}{2}) = -1 + 2 = 1$

$g(1) = 0$

$g(2) = 2\frac{1}{2}$

$g(0) = \frac{3}{2}$

$g(\frac{3}{2}) = 3$

$g(\frac{5}{4}) =$

$g(3) = 2\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha =$

$= -\frac{4}{17} + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17},$

$\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{17}$

1) $\boxed{\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}}$ $\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos^2(2\alpha+2\beta) = 1-\frac{1}{17}=\frac{16}{17}$

1) + +

$\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}+\sin 2\alpha = -\frac{4}{17},$

$\frac{4}{17}+\sin 2\alpha = -\frac{4}{17},$

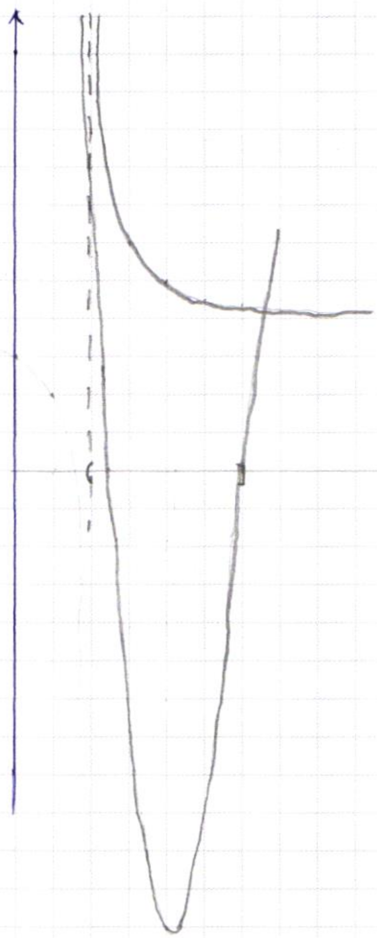
$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

проверка:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}},$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}+\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha = -1$

№6. $2+\frac{1}{2(x-1)} \geqslant ax+b \geqslant$



прямая $f(x)=ax+b$

$f(1)=\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ $f(3)=$

$2a=-4,$

$a=-2$

$b=6.$

$f(x)=-2x+6$

$-2x+6=2+\frac{1}{2(x-1)},$

$-2x+4=\frac{1}{2(x-1)};$

$(2x-2)(-2x+4)=1,$

$-4x^2+4x+8x-8=1,$

$4x^2-12x+9=0,$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

$-2\cdot\frac{3}{2}+6=3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)