

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = \frac{5}{2}$ ,  $BD = \frac{13}{2}$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 27$ ,  $3 \leq y \leq 27$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(1; 3]$ .

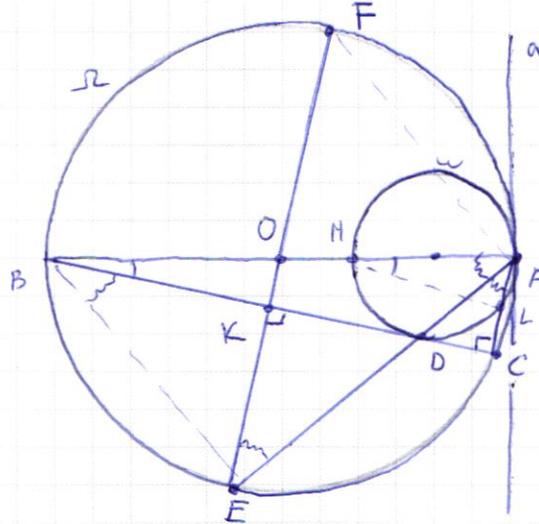
7. [6 баллов] Дана пирамида  $PQRS$ , вершина  $P$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $PQ$ . Известно, что  $QR = 2$ ,  $QS = 1$ ,  $PS = \sqrt{2}$ . Найдите длину ребра  $RS$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

### Задача 4

Найти:  
 $R, r, \angle AFE, S_{AFE}$

Решение



1) Покажем, что  
AD - биссектриса  
Пусть  $AB \cap \omega = M$   
 $AC \cap \omega = L$

Тогда  $\triangle AML \sim \triangle ABC$  (по углам:  $\angle AML = 90^\circ$ , другие равны т.к.  $\angle$  между хордой и касательной дуги и тот же)  
 $\frac{AM}{AB} = \frac{ML}{BC} = \frac{AL}{AC} = k$

по свойству кас. и сек.:  $BD^2 = BM \cdot AB$   $CD^2 = CL \cdot AC$

$$\text{тогда } \left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{BM \cdot AB}{CL \cdot AC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad \text{т.к. } \frac{BM}{CL} = \frac{AB - k \cdot AB}{AC - k \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$

↑  
опред бис-си

2) т.к. AD - бис  $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{13}{5} \Rightarrow AB = \frac{13}{5} AC$

$\triangle ACB$  - прямоугольный, т.к.  $\angle ACB$  опирается на диаметр,  
по т. Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = \frac{169}{25} AC^2 \Rightarrow AC = \frac{5}{12} BC = \frac{5}{12} \cdot \frac{18}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{39}{4} \Rightarrow R = \frac{39}{8}$$

~~из пункта (1) при подобии  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{AM}{AL} = \frac{BM}{CL} = \frac{13}{5}$~~

~~$\triangle CAD$  - прямоугольный  $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{ML}{BC} = \frac{AL}{AC} = k$~~

из подобия в пункте (1)  $\frac{AM}{AB} = \frac{ML}{BC} = \frac{AL}{AC} = k$

из св-ва кас. и секущ.:  
 $BM = \frac{BD^2}{AB} = \frac{13^2 \cdot 4}{39} = \frac{169}{39} = \frac{13}{3} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{39}{4} - \frac{13}{3} = \frac{6^2}{12}$

$$\Rightarrow r = \frac{65 \cdot 1}{12 \cdot 2} = \frac{65}{24}$$

3)  $\angle EFA = \angle EBA$  т.к. опираются на ту же дугу  
 $\angle EBA = \angle ABC + \angle EAC = 90 - \angle DAC = \angle ADC$   
т.к. тоже опираются на ту же дугу

$$\operatorname{tg} \angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{15 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$$

4)  $S_{\Delta EFA}$  -?

Заметим, что EF проходит через центр  $O$   $\Omega$  окр.  
 т.к.  $\angle FEA = \angle DAC = \angle DAB$  (т.к. AD-сис)  $\Rightarrow$  ~~EF~~  $\Delta EOA$  р/б  
 т.к.  $EF, AC \perp BC$   
 а гр. углы вертикальные  
 где  $EF \cap AB = O$

Аналогично получаем, что  $\Delta BOE$  тоже р/б  $\Rightarrow$   
 $O$  - середина  $AB$

$$\text{Тогда } S_{\Delta EFA} = \frac{1}{2} EF \cdot KC = \frac{1}{2} AB \cdot KC \quad (BC \cap EF = K)$$

т.к.  $\Delta BOK \sim \Delta BCA$  (по 2 углам) и  $OK \parallel AC$  и  $O$  - середина  
 $\Rightarrow$  ~~OK = 1/2 AC~~  $KC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow KC = \frac{18 \cdot 1}{2 \cdot 2}$

$$\text{Тогда } S_{\Delta EFA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{18}{4} = \frac{9 \cdot 39}{16}$$

Ответ  $R = \frac{39}{8}$   
 $r = \frac{65}{24}$   
 $\angle EFA = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$   
 $S = \frac{9 \cdot 39}{16}$

Задача 3

$$3^{\log_4(x^2 + 6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Пусть  $t = x^2 + 6x$ ,  $t \geq 0$  по опр. логарифма

$$\text{Тогда } 3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq (4^{\log_4 t})^{\log_4 5} \Rightarrow 3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} \geq 1 \Rightarrow \text{Пусть } \log_4 t = k$$

Верно для всех  $k < 0$  т.к. слева будут две дроби

где  $k=0$  т.к.  $2 \geq 2$

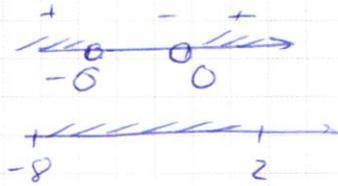
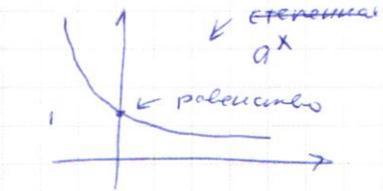
где  $k \in [0; 2]$ ,  $k=2$  последнее возможное значение т.к. выполняется равенство.

$$\Rightarrow \log_4 t \in (-\infty; 2]$$

$$\Rightarrow t \in (0; 16]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x \leq 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+6) > 0 \\ (x+8)(x-2) \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in [-\infty; -8; -6) \cup (0; 2]$$

Ответ:  $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Задача 5

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(p_{m1}) + f(p_{m2}) \dots f(p_{mk}) +$$

$$+ f\left(\frac{1}{p_{n1}}\right) + f\left(\frac{1}{p_{n2}}\right) \dots + f\left(\frac{1}{p_{nk}}\right)$$

где  $a$   $p_{mi}$  - простые делители числа  $x$   
 $p_{ni}$  - простые делители числа  $y$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) - f(p) = -f(p)$$

$\Rightarrow$  Подходят пары  $b$  в которых

$$\left\lfloor \frac{p_{m1}}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p_{m2}}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{p_{mk}}{4} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{p_{n1}}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{p_{nk}}{4} \right\rfloor$$

~~число~~  
Знаки числа не могут быть равными,

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② 
$$\begin{cases} (3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 12yx + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

~~$$(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)^2 - 6yx - 6x - 4y - 4 = 0$$~~

$$12y^2 + 7x^2 - 15yx - 4x - 4y = 6$$

~~$$(9y^2 + 4x^2 -$$~~

$$y^2 - y + \frac{1}{4} + 2x^2 - 4x + 2 + 11y^2 + 5x^2 = 6 + 2 + \frac{1}{4}$$

$$(y - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 + 11y^2 + 5x^2 = 64$$

③ 
$$3 \log_4(x^2 + 6x) + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2$$

пусть  $t = x^2 + 6x, t > 0$

$$3 \log_4 t + t \geq t^{\log_4 5} - x^2$$

$$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5} - x^2$$

$$t^{(\log_4 \frac{3}{4})} + 1 \geq t^{(\log_4 \frac{5}{4})}$$

$$3^k + 4^k \geq 5^k$$

если  $k \leq 0$

$$\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} \geq \frac{4^k + 3^k}{12^k} \geq \frac{1}{5^k}$$

$$k \in (-2; 2)$$

где  $k = \log_4 t$

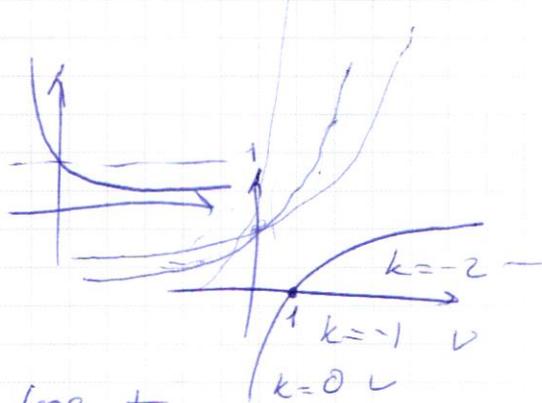
$k = 1 \checkmark$

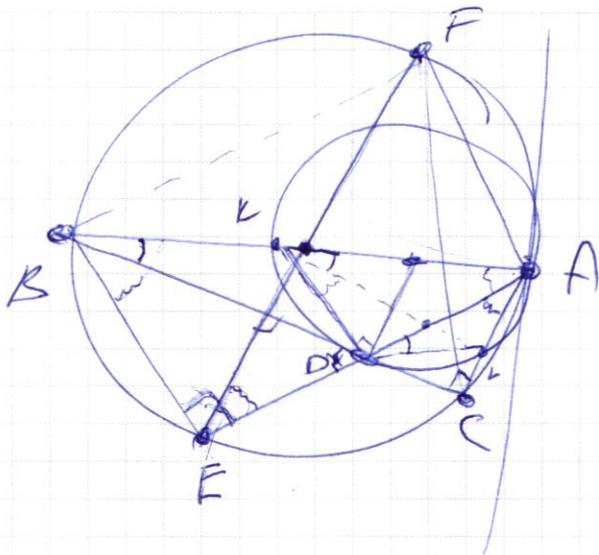
$k = 2 \checkmark$

$k = 3 -$

$k = 4 -$

$$\frac{3^k + 4^k}{5^k} \geq 1$$





$$BD^2 = KB \cdot AB$$

$$CD^2 = CL \cdot AC$$

$$\left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{KB \cdot AB}{CL \cdot AC} = \frac{KB \cdot AK \cdot AC}{AL \cdot CL \cdot AC} =$$

$$k = \frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC} \quad \frac{KB}{LC} \cdot \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD\text{-евс.}$$

$$\frac{KB}{CL} = \frac{AB - AK}{AC - CL} = \frac{AB - \frac{AL}{AC} \cdot AB}{AC - CL} =$$

$$= \frac{AB - \frac{AB \cdot k}{k}}{AC - \frac{AL \cdot k}{k}} = \frac{AB}{AC} \left( \frac{1 - k}{1 - k} \right) \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{KB}{LC}$$

$$1) \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{5}{13}$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 = \left(\frac{13AC}{5}\right)^2$$

$$BC^2 = \frac{144}{25} AC^2$$

$$AC = \frac{5}{12} BC = \frac{18 \cdot 5}{2 \cdot 12} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{15}{4} \Rightarrow AB = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{3\sqrt{47}}{\frac{2}{2}}$$

6  
18  
18  
144  
18  
324

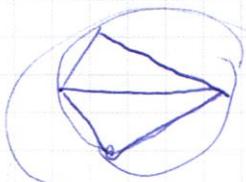
$$648 - 225 = 423 = 3 \cdot 141 = 9 \cdot 47$$

$$2) \frac{R}{r} = \frac{BD}{CD} =$$

$$3) S_{\triangle AEF} = \frac{AC}{4} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2}$$

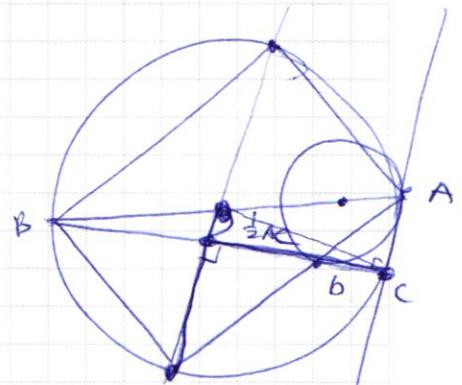
17x2 + 2 = 30  
x + 2 = 30 - 2

$$4) S = \frac{AB \cdot KE}{2} = \frac{EF \cdot AB}{2}$$



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM \cdot CD}{AC \cdot BD} =$$

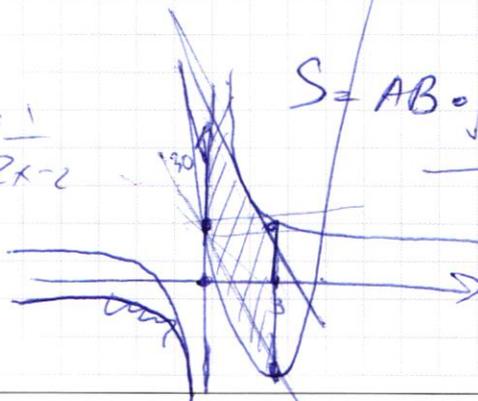
$$AM = \frac{13}{5} AL \quad CL = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{5}{3}$$



$$S = \frac{AB \cdot \sqrt{\left(R^2 - \frac{AC^2}{4}\right)}}{2}$$

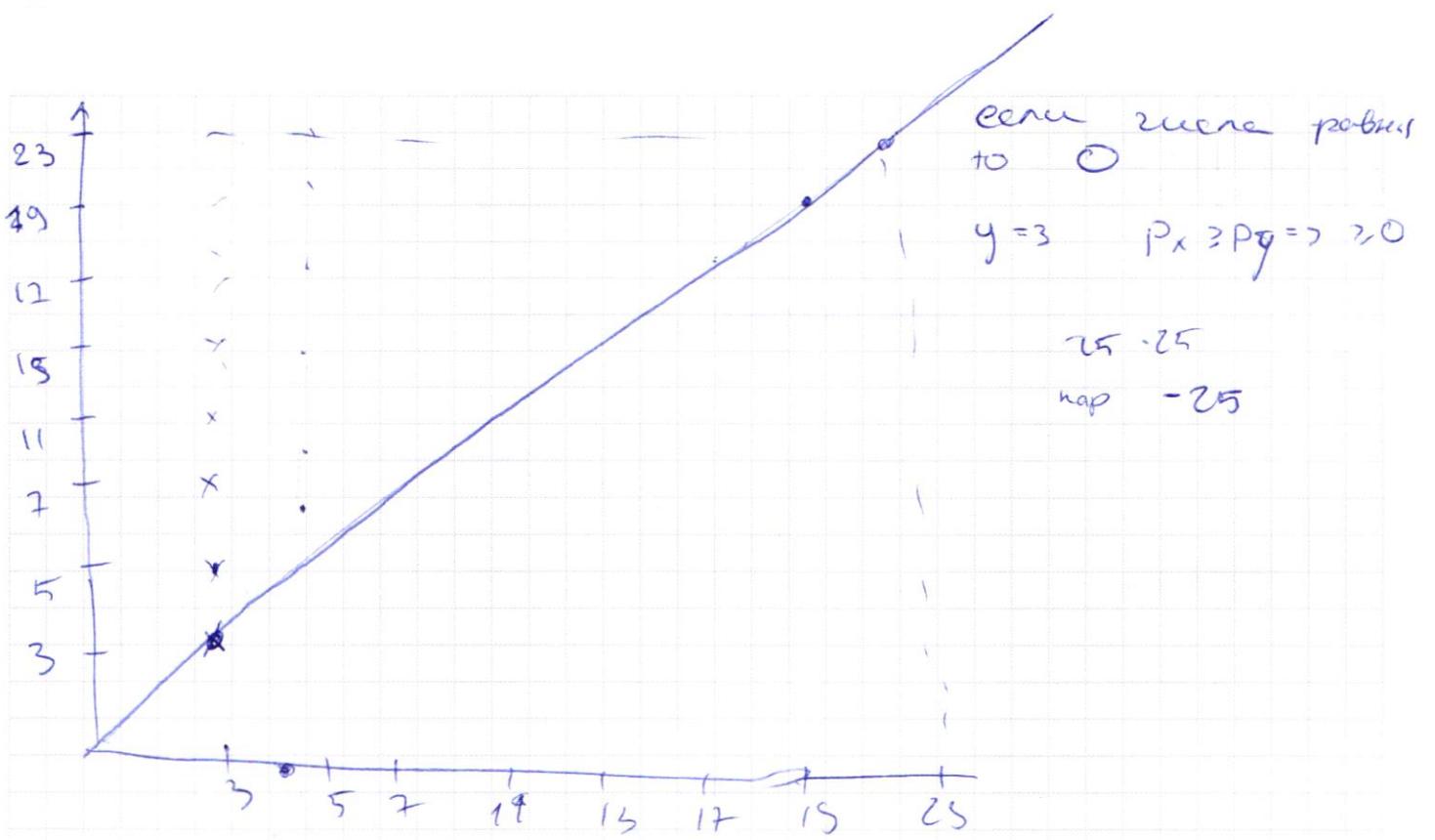
$$4x - 5 = \frac{2(2x - 2) + 1}{2x - 2} = 2 + \frac{1}{2x - 2}$$

$$8x^2 - 34x + 30$$



$$\frac{BM}{CL} =$$

15  
13  
39  
13



$$\left\lfloor \frac{P_1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{P_2}{4} \right\rfloor \dots \left\lfloor \frac{P_n}{4} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{P_{m_1}}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{P_{m_2}}{4} \right\rfloor \dots \left\lfloor \frac{P_m}{4} \right\rfloor$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{-1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \pm \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$$

$$-\cos 2\beta \pm 4 \sin 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$-1 + 2\sin^2 \beta \pm 8 \sin \beta \cdot \cos \beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(4\alpha + 4\beta) = \sin 2(2\alpha + 2\beta) = 2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma = \pm \frac{4}{17}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \cos \gamma + \cos 2\alpha \cdot \sin \gamma = \pm \frac{4}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos \gamma = \pm \frac{4}{17} - \cos 2\alpha \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \pm \frac{4}{\sqrt{17}} (\sin \gamma \cdot \cos 2\beta + \cos \gamma \cdot \sin 2\beta) \pm \frac{4}{17} \cdot \pm \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$$

$$\pm 17 \cdot 4 (\sin \gamma \cdot \cos 2\beta + \cos \gamma \cdot \sin 2\beta) \pm 16 \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin \gamma = \pm 32$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \left\{ \frac{p}{q} \right\} \quad 3 \leq x \leq 27$$

$$3 \leq y \leq 27$$

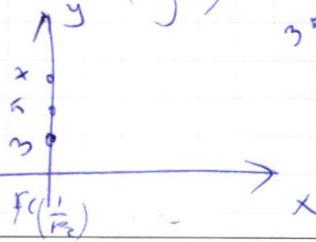
$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y)$$

где  $x$  и  $y$  — натуральные числа  $x$   $f(x) = f(a) + f(b)$

$$f(p_1) + f(p_2) + f(p_3 \dots) + f\left(\frac{1}{p_1}\right) + f\left(\frac{1}{p_2}\right) \dots$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

3 5 7 11 13 17 19  
23



$$f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p) = f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$$

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

$$\textcircled{2} \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$3y - 2x \geq 0$$

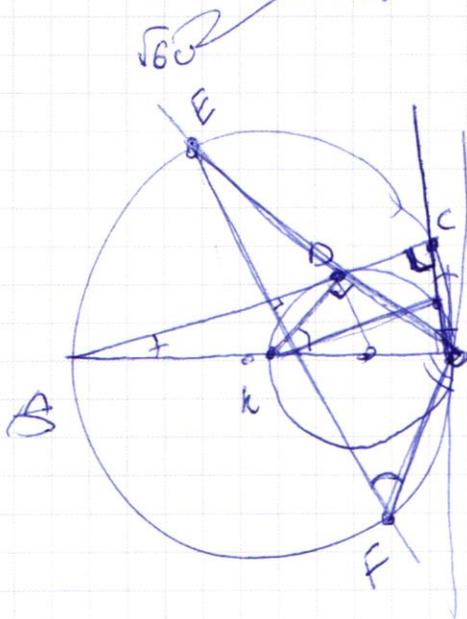
$$9y^2 - 12yx + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 - 15yx + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$$

$$3y^2 + 3x^2 = 3 - 15xy - 2x - 3y + 2 - 6y^2 - x^2 = 6x + 4y + 4$$

$$6y^2 + x^2 + 7y + 8x + 15xy - 2 = 0$$

$$6y^2 + 7y + \frac{7^2}{12} + x^2 + 8x + \frac{64}{3} = \frac{169}{3}$$



$\textcircled{2}$

$$BD^2 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$$

$$r = \frac{-BD^2 + 4R^2}{4R} = \frac{169 - 349}{4R}$$

$$\frac{AC - AM}{BC}$$

$$BD^2 = BK \cdot AB = 2R \cdot BK$$

$$BD^2 = 4R^2 - 2r \cdot R$$

$$\frac{AP}{PK} = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 2}{18} = \frac{5}{18}$$

$$PK = BK$$

$$AC = AK^2 / AM$$

$$CB = BK^2 / BL$$

$$\frac{AC}{CB} = \left( \frac{AK}{BK} \right)^2 \cdot \frac{BL}{AM}$$

$$\frac{18}{18} = \left( \frac{144}{8} \right)^2 \cdot \frac{324}{119}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AKB$$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{AC}{BK} = \frac{R}{r}$$

$$AD^2 + \frac{25}{18} AD^2 = 4R^2$$

$\textcircled{1}$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18^2 + 25}{4}} = \frac{\sqrt{349}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{349}}{4}$$

$$\frac{R}{r} =$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha$$

$$\sin 4\beta \cdot \cos 4\beta + \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha$$

$$= 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta + 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos \alpha + \sin 2\alpha}{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{8}{17}$$

$$1 - \frac{1}{17}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{8}{17}$$

③

$$3 \log_4(x^2 + 6x) + 6x \geq |x^2 + 6x| \log_4 5 - x^2$$

Пусть  $t = x^2 + 6x \quad t \geq 0$

$$3 \log_4 t + 6x \geq t \log_4 5$$

$$\frac{3}{4} \log_4 t \geq t \log_4 5$$

$$3 \log_4 t + 4 \log_4 t \geq (4 \log_4 t) \log_4 5$$

$$4 \log_4 t \cdot 3 \log_4 t = t \log_4 5 = t \log_4 5$$

$$3 \log_4 t + 4 \log_4 t \geq 5 \log_4 t \quad \left(\frac{3}{5}\right) \log_4 t + \left(\frac{4}{5}\right) \log_4 t \geq 1$$

$$\frac{3}{4} \log_4 3 \log_4 t \geq \left(\frac{4}{5} \log_4 5\right) \log_4 t \Rightarrow t \log_4 3 + t \geq t \log_4 5$$