МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2). $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \ (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \ (2). \end{cases}$

Рассмотрим „1-ое" ур-ие системы:

(1): $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$\begin{cases} 3y-2x\geq 0. \\ (3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 \ (3) \end{cases}$

(3): $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-3xy-3y-12xy+4x^2+4x+6y-2x-2=0$

$3y(3y-x-1)-4x(3y-x-1)+2(3y-x-1)=0$

$(3y-4x+2)(3y-x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} 3y-4x+2=0 \\ 3y-x-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3}. \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\geq\frac{2x}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$

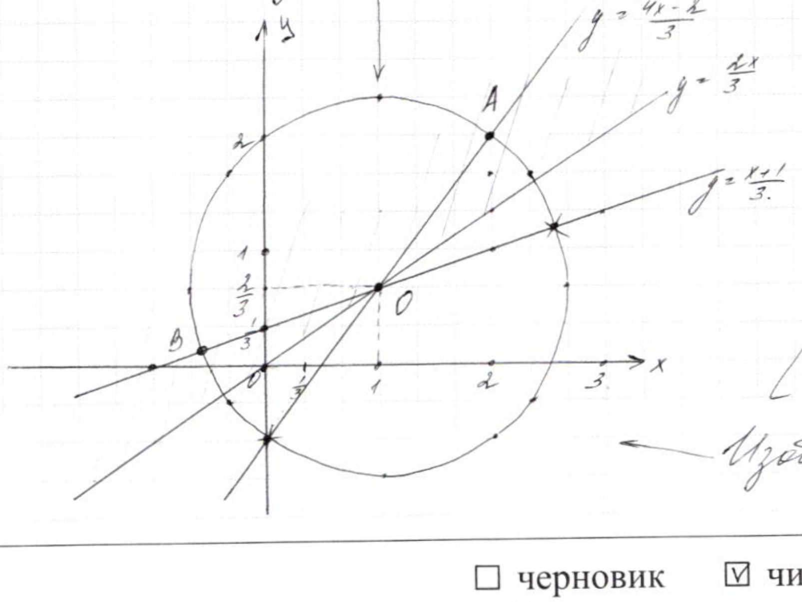
Рассмотрим „2-ое" ур-ие системы:

(2): $3x^2+3y^2-6x-4y-4=0.$

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}=0.$

$(x^2-2\cdot x+1)+(y^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot y+\frac{4}{9})-\frac{25}{9}=0.$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$ – окружность с центром в т. $(1;\frac{2}{3})$, радиусом $\frac{5}{3}$.



(1) и (2) → (перепишем систему).

$\begin{cases} y\geq\frac{2x}{3}. \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$

← Изобразим данную систему. (в осях x, y.)

Заметим, что точка $O(1; \frac{2}{3})$ – центр окр-ти и принадлежит прямым $y = \frac{2x}{3}$; $y = \frac{4x-2}{3}$; $y = \frac{x+1}{3}$ (см. рис.)

Решениями системы будут точки пересечения окружн-ти с прямыми $y = \frac{4x-2}{3}$ и $\frac{x+1}{3}$, лежащие „выше" прямой $y = \frac{2x}{3}$ (в заштрих. области) (см. рис).

Найдем эти точки:

1) т. А $\begin{cases} (x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (\frac{4x-2-2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2$

$(x-1)^2 + (\frac{4}{3}(x-1))^2 = (\frac{5}{3})^2$

$(x-1)^2 \cdot \frac{25}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$ Из рис-ка понимаем, что подходит т. А, ~~конц~~ лежащая в I-ой четверти $\Rightarrow$

$\Rightarrow x > 0. \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{4 \cdot 2 - 2}{3} = 2. \Rightarrow (x; y) = (2; 2).$ – т. А.

2) т. В $\begin{cases} (x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (\frac{x-1}{3})^2 = \frac{25}{9}.$

$(x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10(x-1)^2 = 25 \Rightarrow \cancel{(x-1)^2 = \frac{25}{10}} \Rightarrow \cancel{x-1 = \frac{5}{\sqrt{10}}}$ $(x-1)^2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1) = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, аналогично из графика у т. В $x < 0 \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1) = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ (x-1) = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} > 0 \text{ – не подходит.} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} < 0 \Rightarrow \end{array}\right.$

$\Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \Rightarrow (x; y) = \left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right).$

Ответ: $(2; 2)$, $\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} =$
$= \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$

2) $\sin(4\alpha+\cancel{4\beta}4\beta) = \sin(2(2\alpha+2\beta)) \Rightarrow$ из $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(4\alpha+4\beta) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(4\alpha+4\beta) = \mp\frac{8}{17}$

3) $\cos(4\alpha+4\beta) = \cos(2(2\alpha+2\beta)) \Rightarrow$ из $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(4\alpha+4\beta) = 1-2\cdot\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1-2\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1-2\cdot\frac{1}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(4\alpha+4\beta) = \frac{15}{17}.$

4) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0.$

$\sin((4\alpha+4\beta)-2\alpha) + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0$ ← $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0.$
$\mp\frac{8}{17}\cdot\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0.$
$\mp\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0 \,\Big|\cdot\frac{17}{2} \Rightarrow \mp 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 5) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \ (1) \\ -4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0 \ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \ (3) \\ +4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0 \ (4) \end{cases} \end{array}\right.$

(2): $-4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0 \Rightarrow -4(1-2\sin^2\alpha) + \sin 2\alpha + 4 = 0$

$-4 + 8\sin^2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0 \Rightarrow 8\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \,|:2$

$\sin\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0. \end{array}\right.$

$tg\,\alpha$ опред $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0. \\ \sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{4}. \end{array}\right. \Rightarrow$
$\left(= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0\right)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

(4): $4\cos 2\alpha + \sin \cancel{\alpha} 2\alpha + 4 = 0$.

$4(2\cos^2 \cancel{2}\alpha - 1) + 4 + \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 8\cos^2\alpha - 4 + 4 + \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\cdot\cos^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \,|\, :2 \Rightarrow 4\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{}{\overset{\neq 0}{\cos\alpha}}(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \Rightarrow 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -4\cos\alpha \Rightarrow$

$(\cos\alpha \neq 0) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -4$

б) Из (2) и (2) $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ -4 \end{array}\right.$ т.е. не более трех значений,

а по условию ~~в~~ значений не меньше трех $\Rightarrow$ они все подходят.

Ответ: $0; -\frac{1}{4}; -4$.

3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Из $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow (x^2+6x)^{\log_4 3} - |x^2+6x|^{\log_4 5} + (x^2+6x) \geq 0$

пусть $x^2+6x = a$. $\Rightarrow a^{\log_4 3} - |a|^{\log_4 5} + a \geq 0$.

$a \geq 0 \Rightarrow x^2+6x \geq 0 \Rightarrow x(x+6) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

$a \leq 0 \Rightarrow x^2+6x \leq 0 \Rightarrow x(x+6) \leq 0 \Rightarrow x \in [-6; 0]$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty),\ a > 0 \\ a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a \geq 0 \Rightarrow a^{\log_4 4} + a^{\log_4 3} \geq a^{\log_4 5} \Rightarrow \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in [-6; 0],\ a \leq 0 \quad \varnothing \quad = 4^{\log_4 a} + 3^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a} \\ a^{\log_4 3} - (\cancel{-}a)^{\log_4 5} + a \geq 0 \cancel{(*)}\ \cancel{a \leq 0}\ \cancel{-a \geq 0} \Rightarrow (a)^{\cancel{\log_4 5}} \cancel{\geq 0} \cancel{- (-a)^{\log_4 5} \leq 0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

3 (аналогично)

$\cancel{a \leq 0 \Rightarrow a^{\log_4}} \cancel{\leq 0 \Rightarrow a^{\log_4 3}} \cancel{(-a)^{\log_4 5}}$ $\Rightarrow \boxed{x^2+6x > 0} \Rightarrow a > 0$

$\cancel{a^{\log_4}\left(a^{\log_4 4} + a^{\log_4 3}\right) \geq a^{\log_4 5}}$

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$ заметим: $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow \log_4 a \geq 2 \Rightarrow a \geq \cancel{\log_4} 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq 16 \cancel{\Rightarrow a \in [\tfrac{8}{2}; +\infty)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a > 0 \\ a \geq 16 \end{array}\right. \Rightarrow \cancel{a \in [\tfrac{8}{2}; +\infty)}\ a \in [16; +\infty)$.

$\cancel{(2): 3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}}$ $a \in [16; +\infty) \Rightarrow x^2 + 6x \cancel{-16 \leq 0} \geq 16 \Rightarrow$

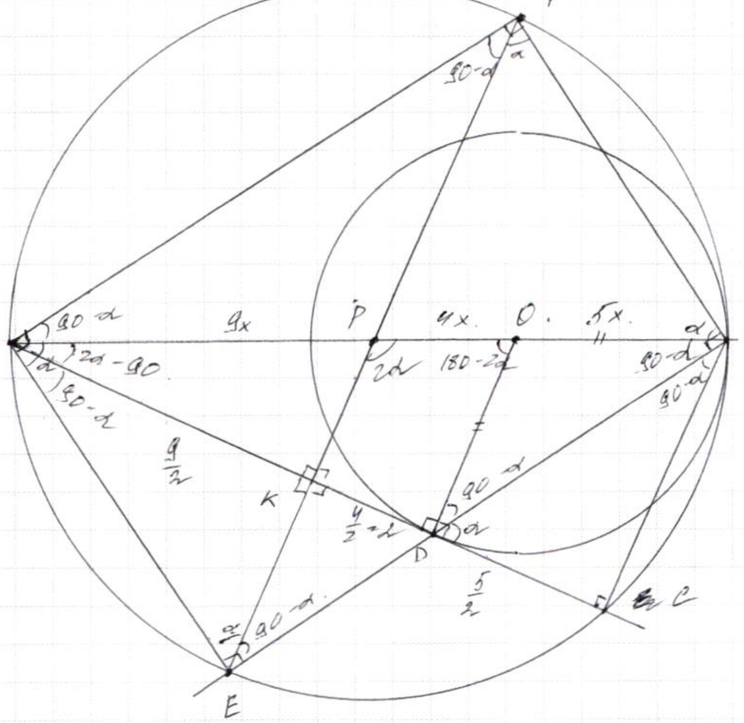
$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 \geq 0 \Rightarrow (x+8)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$.

~~Подпись~~ ☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④.



пусть $\angle EFA = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBA = \alpha$ (опир на EA)

$\angle BFA = \angle ACB = \angle BEA = 90^\circ$ (опир. на диам. AB) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BFE = 90 - \alpha \Rightarrow$ (опир на BE)

$\Rightarrow \angle OAD = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODA = \angle OAD = 90 - \alpha$

(O - центр $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = OD$ - радиусы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OAD$ - р/б) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOD = 90 - \alpha + 90 - \alpha = 180 - 2\alpha$ -

- внешний для $\triangle DOA \Rightarrow \angle OBD = 90 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha - 90$

(BD касат $\Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow \angle ODB = 90$) $\Rightarrow \angle KBE = \alpha - (2\alpha - 90) = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KEB = 90 - (90 - \alpha) = \alpha \Rightarrow BF = AE$ (на них опир. α),

аналогично $BE = FA$ и т.к. $\angle BFA = \angle BEA = 90 \Rightarrow$

$BFAE$ - прям-ник. $\Rightarrow \angle FBE = \angle FAE = 90^\circ \Rightarrow FE$ - диам Ω

$\begin{cases} BA \text{ - диам - по усл.} \\ FE \text{ - диам.} \end{cases} \Rightarrow BA \cap FE = P$ - центр Ω. $\Rightarrow$

$\Rightarrow BP = PA$; $FP = PE$

$\angle BKF = \angle BDO = \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow PK \parallel OD \parallel AC \Rightarrow \triangle BPK \sim \triangle BOD \sim \triangle BAC$

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{5}{13}$; $\triangle BOD \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{CD}{DB} = \frac{AO}{OB} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ пусть $AO = 5x \Rightarrow OB = 13x \Rightarrow AB = 18x \Rightarrow BP = PA = \frac{AB}{2} = \frac{18x}{2} = 9x \Rightarrow$

$\Rightarrow PO = 13x - 9x = 4x \Rightarrow BP : PO : OA = BK : KD : DC = 9 : 4 : 5$

$BC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \Rightarrow BK = \frac{9}{2}, \ K\cancel{D} = \frac{4}{2} = 2, \ DC = \frac{5}{2}$.

$\angle ODA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ADC = \alpha \Rightarrow \angle DAC = 90 - \alpha$

$\angle BAD = 90 - \alpha \Rightarrow AD$ - бис-са $\triangle BAC \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{13}{5}$

$AB = 18x \Rightarrow AC = \frac{5}{13} \cdot AB = \frac{5 \cdot 18}{13} x$.

~~$\triangle ABC: 9^2 = (18x)^2 + \left(\frac{5 \cdot 18}{13} x\right)^2$~~

~~$9^2 \cdot 13^2 = 18^2 \cdot 13^2 x^2 + 5^2 \cdot 18^2 x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9^2 \cdot 13^2}{18^2(13^2+5^2)}$~~

$\triangle ABC: 9^2 + \left(\frac{5 \cdot 18 \cdot x}{13}\right)^2 = (18x)^2$

$9^2 \cdot 13^2 + 5^2 \cdot 18^2 \cdot x^2 = 13^2 18^2 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9^2 \cdot 13^2}{18^2(13^2 - 5^2)} = \frac{9^2 \cdot 13^2}{18^2 \cdot 12^2} =$

$= \left(\frac{9 \cdot 13}{18 \cdot 12}\right)^2 = \left(\frac{39}{72}\right)^2 = \left(\frac{13}{24}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{13}{24} \Rightarrow$

OA - радиус ω; $OA = 5x = \frac{5 \cdot 13}{24} = \frac{65}{24}$

PA - радиус Ω; $PA = 9x = \frac{9 \cdot 13}{24} = \frac{39}{8}$

$\cos\angle ABC = \cos(2\alpha - 90) = -\sin 2\alpha$

$\cos\angle ABC = \frac{9}{18x} = \frac{9 \cdot 24}{18 \cdot 13} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin\angle ABC = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$. $(\angle ABC < 90) \Rightarrow \sin > 0$

~~$\sin 2\alpha = -\frac{12}{13} \Rightarrow 2\sin\alpha \cdot 2\alpha$~~

$\sin\angle ABC = \sin(2\alpha - 90) = -\cos 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{5}{13} \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{5}{13} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{\frac{8}{13}}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $(\alpha < 90 \Rightarrow \cos\alpha > 0)$. $\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

$\angle FPA = 180 - 2\alpha \Rightarrow \sin\angle FPA = \sin(180 - 2\alpha) = \sin 2\alpha =$

$= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$.

$FP = PA = 9x = \frac{39}{8} \Rightarrow S_{\triangle FPA} = \frac{1}{2} \sin\angle FPA \cdot PF \cdot PA = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13^2 \cdot 9}{8^2} =$

$= \frac{27 \cdot 13}{32} = \frac{351}{32}$.

аналогично $\sin\angle EPA = \sin 2\alpha = \frac{12}{13}$.

$S_{\triangle EPA} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (9x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13^2 \cdot 3^2}{8^2} = \frac{27 \cdot 13}{32} = \frac{351}{32}$

$S_{\triangle FAE} = S_{\triangle FPA} + S_{\triangle EPA} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 13}{32} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$.

$\angle AFE = \alpha = \arcsin(\sin\alpha) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ $(\alpha < 90)$

Ответ: $r_\omega = \frac{65}{24}$; $r_\Omega = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; $S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$

② $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \ (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \ (2) \end{cases}$

(1): $3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$. и $3y-2x\geq 0$.

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$. $y\geq\frac{2x}{3}$.

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$. $(3y-2x)^2=-(3y-2x)-4x+3xy+2$.

$(3y+2x)^2+(3y+2x)-27xy-2=0$.

$(3y)^2+(2x)^2+3y+2x-15xy-2=0$. $(3y-2x)(3y-2x+1)=-4x+3xy+2$

$(3y\ \ 4x\ \ )(1\cdot y\ \ 1\cdot x\ \ )$ $(y\ \ x\ \ )(y\ \ x\ \ )$

$x=1\Rightarrow 9y^2+4-15y+\cancel{2}+3y-\cancel{2}=0\Rightarrow 9y^2-12y+4=0\Rightarrow(3y)^2+2^2-2\cdot2\cdot3y=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(\cancel{\ }3y-2)^2=0.\Rightarrow y=\frac{2}{3}.\Rightarrow(x-1)(y-\frac{2}{3})=xy-\frac{2}{3}x-y+\frac{2}{3}$

$3xy-2x-3y+2$.

$x=2\Rightarrow 9y^2+16-30y+4+3y-2=0$. $(x-1)(3y-2)$.

$9y^2-27y+18=0\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow(y-1)(y-2)=0.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.$

$(x-2)(y-1)$.

$y^2+(\frac{2}{3}x)^2-\frac{5}{3}xy+\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{9}=0$.

$1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$ $\frac{12}{9}$

$\cancel{(3y)}^2+\cancel{(2x)}^2$ $(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$.

(2): $3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$. $9x^2+9y^2-18x-12y-12=0$.

$(3x)^2-2\cdot3x\cdot3+9+(3y)^2-2\cdot3y\cdot2+\cancel{4}+\cancel{16}4=25$

$x^2+y^2-2x-\frac{\cancel{2}4}{3}y-\frac{4}{3}=0$. $(3x-3)^2+(3y-2)^2=5^2$

$x^2-2x+1+y^2-2\cdot y\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{25}{9}=0$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2\Rightarrow(3x-3)^2+(3y-2)^2=5^2$.

(1): $9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2$.

$((3y)^2-2\cdot3y\cdot\frac{\cancel{2}1}{2}+\frac{1}{4})+((2x)^2-2\cdot2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4})-15xy-2-\frac{1}{2}$.

$((3y)^2+2\cdot3y\cdot1+1)+((2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1)-3y-2x-15xy-2=0$.

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$.

$9y^2+9x^2-\cancel{12x}\,18x-12y-12=0$.

$5x^2-15y-20x+15xy-10=0$.

$5x(x+3y-3)-5(3y+x-3)\cancel{-5}-25=0$.

$(x-1)(x+3y-3)=5$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos\alpha \neq 0$, $tg\alpha$ — ?

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin\alpha + \frac{8}{17} = 0$.

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0$.

$\cos((4\alpha+4\beta)-2\alpha) = \cos(4\alpha+4\beta)\cdot\cos 2\alpha - \sin(4\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

$\cos(4\alpha+4\beta) = 2\cdot\frac{16}{17} - 1 = \frac{32-17}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = \pm 2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \mp\frac{8}{17}$.

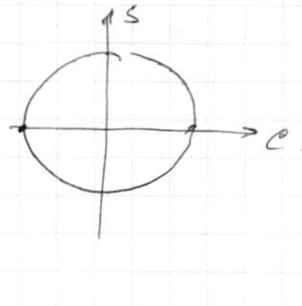
$\frac{15}{17}\cdot\cos 2\alpha \pm \frac{8}{17}\cdot\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0$.

$\frac{30}{17}\cos^2\alpha - \frac{15}{17} \pm \frac{16}{17}\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \frac{8}{17} = 0$.

$\sin((4\alpha+4\beta)-2\alpha) = \sin(4\alpha+4\beta)\cdot\cancel{\sin\alpha}\cos 2\alpha -$

$-\cos(4\alpha+4\beta)\cdot\sin 2\alpha = \mp\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\cdot\sin 2\alpha$.

$\mp\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0$.



$\mp\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{2}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17} = 0$

$\mp \cancel{8}\, 4\cos 2\alpha + 4 + \sin 2\alpha = 0$.

$\mp(2\cos^2\alpha - 1)$ $\cdot 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 4 = 0$.

$\mp 8\cos^2 2\alpha - 4 + 4 + \sin 2\alpha = 0$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$ $\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta$.

$\cos\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$

$x^2+6x^{(\log_4 3)} - |x^2+6x|^{(\log_4 5)} \geq -x^2-6x.$

$x^2+6x = a \Rightarrow a^{\log_4 3} - |a|^{\log_4 5} + 1 \geq 0.$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a^0 \geq 0. \Rightarrow a^{\log_4 5} = \cancel{+} a^{\log_4 \frac{5}{3}} = a^{\log_4 \frac{3}{\frac{3}{5}}} =$

$3^{\log_4 a} - 5^{\log_4 a} \geq -1 \Rightarrow 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a} \leq 1. \qquad = a^{\log_4 3 - \log_4 \frac{3}{5}}.$

$x^2+6x = x(x+6)$, $a \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$

$a \leq 0 \Rightarrow x \in [-6; 0].$

$a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3} \leq 1. \Rightarrow \cancel{a^{\log_4 3}} \quad a^{\log_4 5} \leq a^{\log_4 3} + 1. \quad = a^0.$

$\frac{\cancel{a^{\log_4 3}}}{\cancel{a^{\log_4 \frac{3}{5}}}} - a^{\log_4 3} \cancel{-1 \leq 0}.$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + 1 \geq 0 \Rightarrow a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3} \leq 1.$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

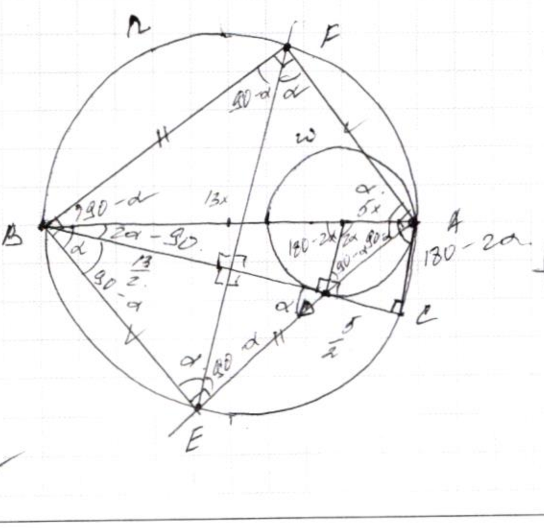
$\cancel{\log_4 5} = \cancel{\log} \quad 1 = a^0 = a^{\log_4 1}. \qquad \log_4 3.$

$a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3} - \cancel{a^{\log_4 1}}\,1 \leq 0. \qquad \log_4 5 = \log_4 1 \cdot \log_a 6$

$\log_4 5 = \log_4 1 \cdot \log_a 6. \quad \log_a 6 = \frac{\log_4 5}{\log_4 3} = \log_3 5. \quad \frac{\log_4 1}{\log_6 a}. \quad \log_a 6 = \frac{\log_4 5}{\log_4 1} = \log_1 5$

$a^{\log_4 3}\left(a^{\log_4 5 - \log_4 3} - 1\right) \leq 1.$

$a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3} - a^0 \leq 0 \Rightarrow a^{\log_4 3}\left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1 - a^{-\log_4 3}\right) \leq 0.$

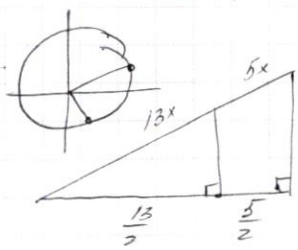


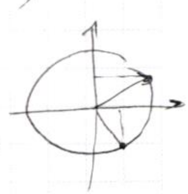
$r_1, r_2 - ?$, $\angle AFE$, $S_{\triangle AFE}$, $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{\cancel{13}}$

$13^2 = 169.$
$5^2 = 25.$

$12^2 + 5^2 = 13^2$





$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9y^2+4x^2-12xy-3xy+2x+3y-2=0$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$(\cancel{9y-2x})(\cancel{4y-2x})$ $(\cancel{3y-4x})(\cancel{3y-x})$

$\cancel{3y(3y+2x+1)+2x(2x+3y+1)}$ $(3y-4x-2)(3y-x-1)$

$9y^2-3xy-3y-12xy+4x^2+4x+6y-2x-2$

$9y^2+4x^2-15xy+3y+2x-2$

$$\left[\begin{array}{l} 3y-2x+2=0 \\ 3y-x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{2x-2}{3}=\frac{2x}{3}-\frac{2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3}=\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$27 \cdot 13 = 81 + 27 = 351$

$7x^2 - 34x + 30$

$4x^2-17x+15$

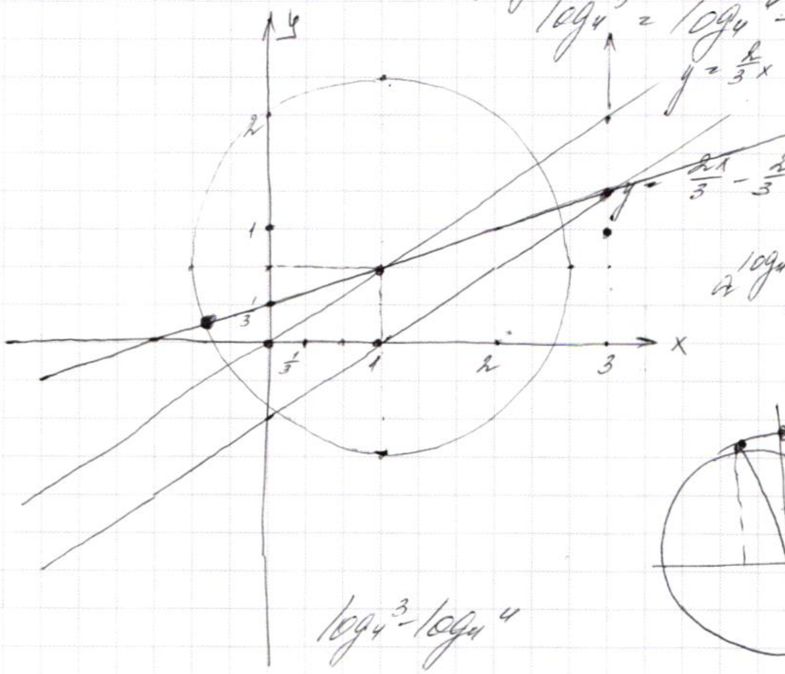
$(4x+3)(1x+5)$

$a^{\log_4 5}$

$\log_4 5 = \log_4 4 -$

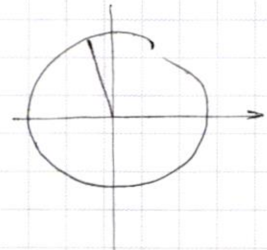
$a^{\log_4 5}$

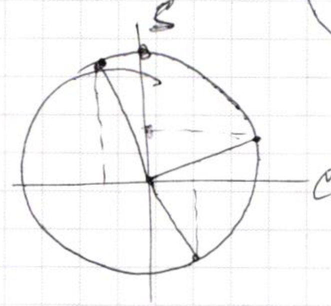
a



$a^{\log_4 3}+a^{\log_4 4}$

$a^{\log_4 3}(a^1$





$\frac{25}{81}$

$\log_4 3 - \log_4 4$

$\cos 2\alpha \cdot \cos 90 -$

$-\sin 2\alpha \cdot \sin 90 =$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a^{\log_4 4} \geq 0$

$\cancel{a\neq0}$ $a^{\log_4 3}\left(1-a^{\log_4 \frac{5}{3}}+a^{\log_4 \frac{4}{3}}\right)\geq 0$

$\sin(2\alpha-90)=-\cos 2\alpha$

$a^{\log_4 5}\left(a^{1-\log_4 5}-a^0+a^{\log_4 3-\log_4 5}\right)$

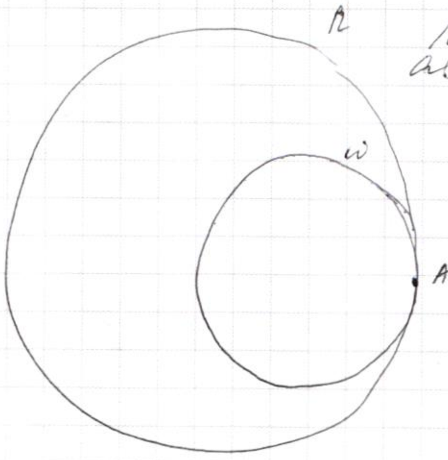
$\sin 2\alpha \cdot \cos 90 -$

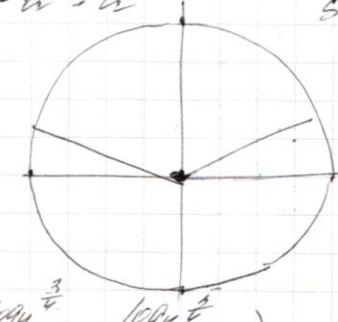
$-\cos 2\alpha \cdot \sin 90 =$

$=-\cos 2\alpha$

$\log_4 \frac{4}{5}$

$\log_4 \frac{3}{5}$





$a\left(a^{\log_4 \frac{3}{4}}-a^{\log_4 \frac{5}{4}}+1\right)$

$a^{\log_4 4}+a^{\log_4 3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)