МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)\cdot y-(x-2)} \\ (x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

замена: $u=x-2$
$v=y-1$

$\begin{cases} u-2v=\sqrt{uv} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-2v\geq 0 \\ u^2+4v^2-4uv=uv \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} u-2v\geq 0 \\ u(u-v)+4v(v-u)=0 \Leftrightarrow (u-v)(u-4v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=4v \end{array}\right. \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u\geq 2v \\ u=v \\ u^2+9u^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\geq 2v \\ u=v \\ 2u^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u\geq 2u \Leftrightarrow u\leq 0 \\ 2u^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} u\geq 2v \\ u=4v \\ 16v^2+9v^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\geq 2v \\ u=4v \\ v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1 \\ u=4 \\ 4\geq 2 \text{ верно} \end{cases} \\ \begin{cases} v=-1 \\ u=-4 \\ -4\geq -2 \text{ неверно} \end{cases} \text{ — не реш-е} \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1 \\ u=4 \end{cases} \\ \begin{cases} u=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ u\leq 0 \\ u=v \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1 \\ u=4 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ v=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

обр. замена: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-1=1 \\ x-2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: (к N2) $\left\{(6;\,2);\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right\}$

N3 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

из ОДЗ следует: $|x^2+18x| = x^2+18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

замена: $t = x^2+18x > 0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

прологарифмируем обе части нер-ва
(можно, т.к. $5^{\log_{12}t}>0$; $t>0$; $t^{\log_{12}13}>0$)

$\log_{12}5^{\log_{12}t} + \log_{12}t \geq \log_{12}t^{\log_{12}13}$

$\log_{12}5\cdot\log_{12}t + \log_{12}t \geq \log_{12}13\log_{12}t$

$\log_{12}t\,(\log_{12}5 + \underbrace{1}_{\log_{12}12} - \log_{12}13) \geq 0$

$\log_{12}t\,(\log_{12}60 - \log_{12}13) \geq 0$

$\log_{12}t\left(\log_{12}\frac{60}{13}\right) \geq 0$

т.к. $\log_{12}a$ возрастающ, то если $\frac{60}{13}>1$

то и $\log_{12}\frac{60}{13} > \log_{12}1 = 0$

$\log_{12}\frac{60}{13} > 0$

значит, можем поделить на $\log_{12}\frac{60}{13}>0$

$\log_{12}t \geq 0$

обр. замена: $\log_{12}(x^2+18x)\geq 0$ $\quad (0=\log_{12}1)$

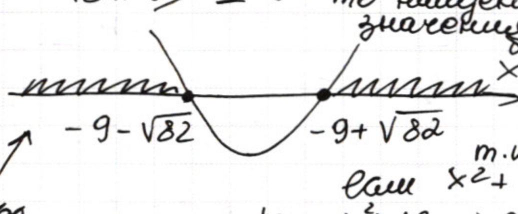
т.к. $\log_{12}a$ возрастающ. $\quad x^2+18x \geq 1$

если $(x^2+18x)\geq 1$ то найденные значения будут на ОДЗ, т.к. если $x^2+18x\geq 1$ то $x^2+18x>0$ точно

$x^2+18x-1\geq 0$

$\frac{D}{4} = 81+1 = 82$

$x_{1,2} = -9\pm\sqrt{82}$



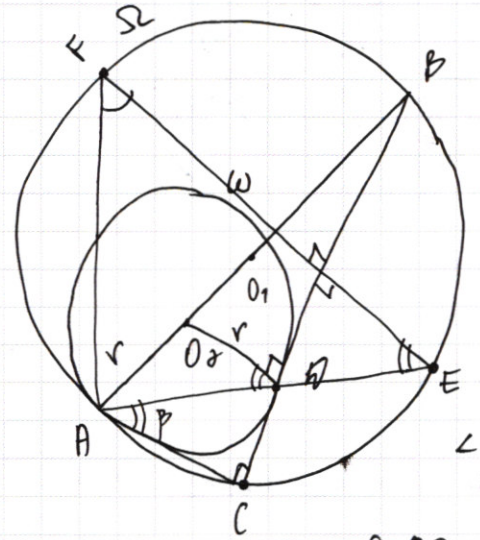
$x\in(-\infty;\,-9-\sqrt{82}]\cup[-9+\sqrt{82};\,+\infty)$

Отв: $(-\infty;\,-9-\sqrt{82}]\cup[-9+\sqrt{82};\,+\infty)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



пусть O_1 – центр Ω

O_2 – центр ω

A, O_1, O_2 лежат на одной прямой

A, O_1, B лежат на одной прямой $\Downarrow$ $O_1, O_2 \subset AB$

BD – касат. к. $\omega \Rightarrow BD \perp O_2D$ по св-ву кас.; O_2D – радиус ω

$\angle ACB$ – вписанный, опирается на $\cup AB$ (AB – диаметр)

$\angle ACB = \frac{\cup AB}{2} = 90^\circ$

$AC \perp BC$

$\triangle O_2BD \sim \triangle ABC$ по остр. углу ($\angle O_2BD$ – общий); $\triangle O_2BD$ – прямоугольное

R – радиус Ω, r – радиус ω

$(BC = BD + DC = 25)$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{DO_2}{CA} = \frac{17}{25}$

по т. Пифагора: $BD^2 + O_2D^2 = O_2B^2$ ($O_2D = r$, $O_2B = 2R-r$)

$BC^2 + AC^2 = BA^2$ ($AC = \frac{25 DO_2}{17}$)

$$\begin{cases} 17^2 + r^2 = (2R-r)^2 \quad (1) \\ 25^2 + \left(\frac{25 r}{17}\right)^2 = 4R^2 \end{cases}$$

из подобия

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25} \Leftrightarrow \frac{r}{2R} = \frac{8}{25} \Leftrightarrow r = \frac{16}{25}R$ подставим в (1)

$17^2 + \frac{16^2}{25^2}R^2 = \left(\frac{50R - 16R}{25}\right)^2$

$17^2 + \frac{16^2}{25^2}R^2 = \frac{34^2}{25^2}R^2$

$R^2\left(\frac{(34-16)(34+16)}{25^2}\right) = 17^2$

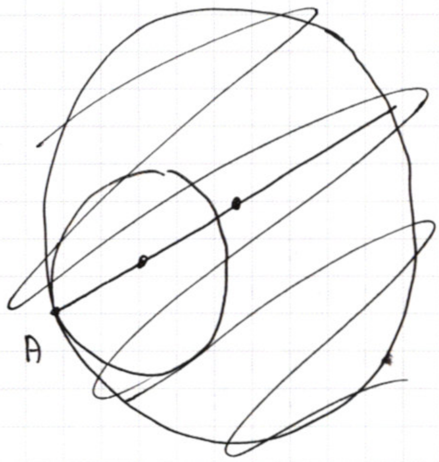
~~$\frac{R}{25} = \frac{18 \cdot 50}{25}$~~ $\frac{R^2}{25^2} \cdot 18 \cdot 50 = 17^2 \Leftrightarrow$ ~~$R^2 = \frac{17^2}{36}$~~ $(R > 0)$ ~~$R = \frac{17}{6}$~~

~~$r = \frac{16}{25}R = \frac{16}{25} \cdot \frac{17}{6} = \frac{8 \cdot 17}{25 \cdot 3} = \frac{136}{75}$~~

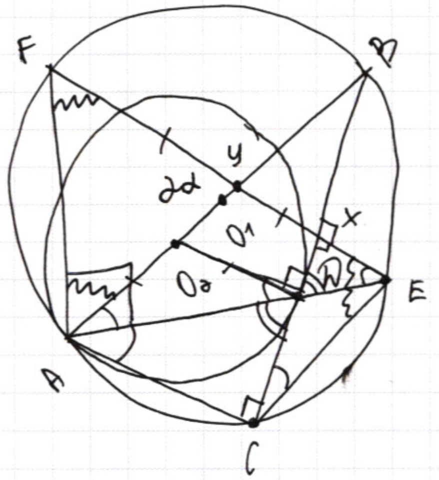
$R^2 = \frac{17^2 \cdot 25}{36}$

$R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{16}{25}R = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8}{5} \cdot \frac{17}{3} = \frac{136}{15}$



$\underset{\frac{32}{25}R}{\overset{}{2r}} > R \Rightarrow O_1$ лежит внутри ω



$\left.\begin{matrix} DO_2 \perp BC \\ AC \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_2D \parallel AC$

$AO_2 = O_2D$ как радиусы $\omega \Rightarrow \triangle AO_2D$ – равноб. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA = \alpha$

т.к. $O_2D \parallel AC$ $\angle O_2DA = \angle DAC$ как внутр. накр. леж.

$\Downarrow$

$\angle DAC = \angle O_2DA = \angle O_2AD$

$X = BC \cap EF$; $EF \perp BC \Rightarrow \triangle DXE$ – прямоуг-й

$\triangle ADC \sim \triangle EDX$ по остр. углу ($\angle ADC = \angle EDX$ как вертик.)

прямоуг-е

$\Downarrow$

$\left.\begin{matrix} \angle DAC = \angle XED \\ \angle DAC = \angle O_2AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle XED = \angle O_2AD \Rightarrow$ по признаку равноб. Δ-ка ΔAYE – равноб.

$Y = AB \cap FE$

$\angle AYE = 180° - 2\alpha = \underset{}{\overset{90°}{\angle ACB}} + \angle ABC$ – тупой

в окружности равные хорды стягивают равные углы

т.к. $\angle FEA = \angle EAC \Rightarrow AF = CE$

т.к. $\left.\begin{matrix} EF \perp BC \\ AC \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow FE \parallel AC$ $\Bigg\} \Rightarrow AFCE$ – равноб. трапеция $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AFE = \angle CEF$

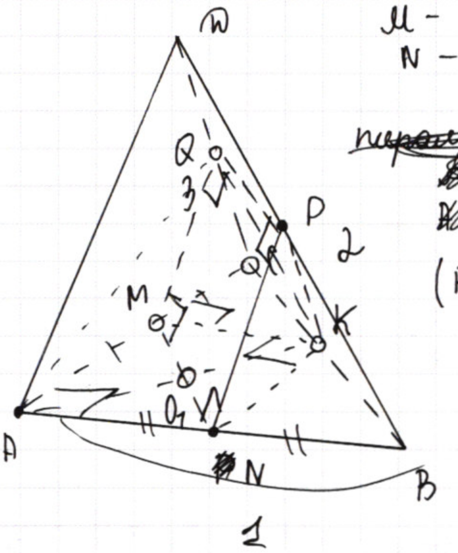
$\angle BAE$ и $\angle BCE$ вписанные и опираются на одну дугу $\smile BE \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAE = \angle BCE = \alpha$

пусть $\angle ADC = \beta$, $\alpha + \beta = 90°$

$\triangle CXE$ – прямоуг., $\angle XCE = \alpha \Rightarrow \angle XEC = 90° - \alpha = \overset{= \angle EFA}{\beta} \Rightarrow$

$\angle FAC = \underset{= 90° + \alpha}{\angle ACE} \Rightarrow \angle FAY = 90° + \alpha - 2\alpha = 90° - \alpha = \beta = \angle EFA$

№7



M – сер. AC K – сер. CB

N – сер. AB P – сер. ~~[illegible]~~ BD

Q – сер. CD из. усл.

~~пирамида~~ ~~[illegible]~~ – вписана в сферу ω

~~[illegible]~~ AMKPCQ

(ABC): точки M, K, P, A лежат на сфере ω

$\omega \cap (ABC) = $ окр. $(O_1; R_1)$

$M, K, P, A \subset$ окр. $(O_1; R_1)$

MK – ср. линия △ACB ⇒ MK ∥ AB

KP – ср. линия △ACB ⇒ PK ∥ AC

AMKP – параллелограм

т.к. AMKP вписан в окр. AMKP – прямоуг.-к. ⇒

~~аналогично~~ в ~~KP ∥ AC/2~~

⇒ ∠MAP = 90° ⇒ △CAP – прямоуг.

в прямоуг. △CAB медиана $AK = \frac{CB}{2} = CK = BK$

$PM \cap AK = O_1$ – центр. опис. около AMKP окр-ти

NP, MQ – ср. линии △DCA и △DBA соотв. ~~[illegible]~~ N, P, M, Q лежат в одной пл-ти

$NP = MQ = \frac{AD}{2}$; NP ∥ AD ; MQ ∥ AD ⇒ $\left.\begin{matrix} NP \parallel MQ \\ NP = MQ \end{matrix}\right\}$ ⇒ NPQM парал-м

$M, Q, P, N \subset \omega$

$\omega \cap (MQP) = $ окр $(O_2; R_2)$

$M, Q, P, N \subset$ окр. $(O_2; R_2)$ ⇒ MQPN вписанный ⇒ MQPN – прямоуг-к.

~~(BCD)~~ $\omega \cap BCD = $ окр. $(O_3; R_3)$

$Q, P, K \subset$ окр. $(O_3; R_3)$ ⇒ △QPK вписан в окр. $(O_3; R_3)$

KQ, PK, QP – ср. линии △BCD ⇒ PK ∥ CD ; $PK = \frac{CD}{2} = \frac{3}{2}$

QP ∥ BC ; $QP = \frac{BC}{2}$

KQ ∥ BD ; $KQ = \frac{BD}{2} = 1$

$\left.\begin{matrix} MN = CK \\ MC = NK \end{matrix}\right\}$ ⇒ MCKN – парал-м

~~CK ∥ QP ∥ MN ⇒ CK ∥~~ MN = QP = CK

~~MQCNPK – вписаная призма~~

~~Призму можно вписать в окр-ть, только если эта призма~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle EFA = \angle FAY \Rightarrow \angle YFA$ – равноб. $\Rightarrow FY = AY = YE$

$\angle FYA = 180° - 2\beta = 2\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{25}{2R} = \frac{25 \cdot 3}{85} = \frac{15}{17}$

из $\triangle BAC$

$2\alpha \in (0; 90°) \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \frac{8}{17}$

острый угол п/у $\triangle$ка

$\alpha \in (0; 45°)$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos\alpha = \frac{9}{17}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{34} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\beta = \angle AFE = \cancel{\arccos \frac{5}{\sqrt{34}}}\ \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

S_{AEF} – ?

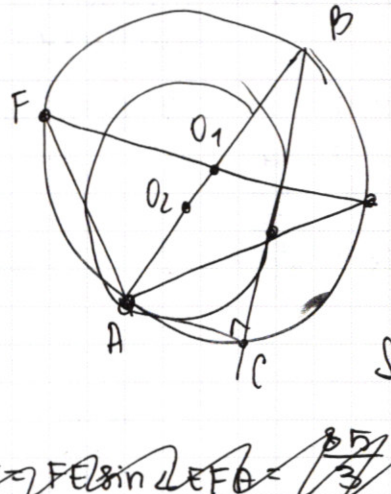
$\angle FAE = \angle FAY + \angle YAE = \alpha + \beta = 90°$

$\angle FAE = \frac{\smile FE}{2} \Rightarrow \smile FE = 180° \Rightarrow FE$ – диаметр; $FE = 2R = \frac{85}{3}$

вписанный

т.к. Y – сер. FE

$Y \equiv O_1$



$FA = FE \cos\angle EFA$

$\cos\angle EFA = \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

остр. угол прямоуг. $\triangle$ка

$FA = \frac{85}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

$S_{AEF} = \frac{FE \cdot FA \cdot \sin\angle EFA}{2} = \frac{85}{\sqrt{34}} \cdot \frac{85 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{34}} =$

$= \frac{85^2 \cdot 5}{6 \cdot 34} = \frac{36125}{204}$

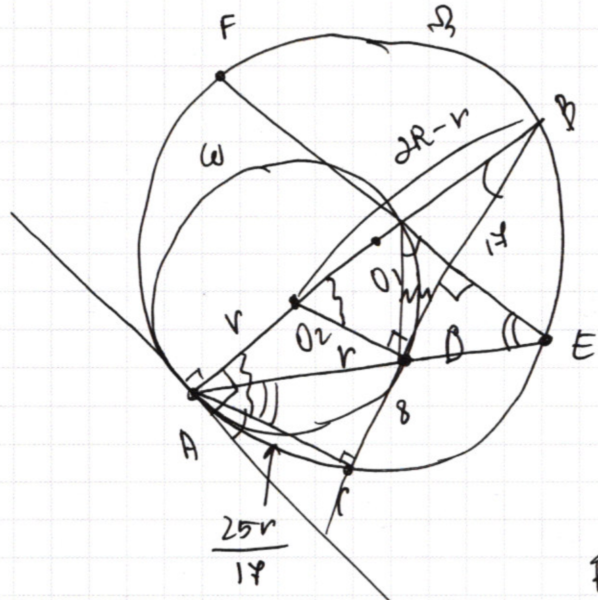
~~$AE = FE \sin\angle EFA = \frac{85}{3}$~~

$34 \times 6 = 204$

85×85: 425, 680, 7225

$7225 \times 5 = 36125$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AEF} = \frac{36125}{204}$



$\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$

$k = \frac{8}{25}$

$\frac{BO_2}{BA}$ $\frac{O_2D}{AC} = \frac{DB}{BC} = \frac{17}{25}$

$AC = \frac{25 O_2D}{17} = \frac{25r}{17}$

$4R^2 - 4rR + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 289$

$\frac{625r^2}{289} + 625 = 4R^2$

$625r^2 + 625 \cdot 289 = 4 \cdot 289 R^2$

$\begin{cases} \frac{625r^2}{289} + 625 - 4rR = 289 \\ 4R^2 - 4rR = 289 \end{cases}$

$\frac{625r^2}{289} + 625 - 4R^2 = 0$

$\sin B = \frac{r}{2R-r} = \frac{25r}{17 \cdot 2R}$

$\cos\beta = \frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R}$

$\frac{r^2 + 17^2}{(2R-r)^2} + \frac{25^2}{4R^2}$ (

$625r^2 = 4 \cdot 289 R^2 - 625 \cdot 289$

$625r^2 = 289(4R^2 - 625)$

$r = \frac{17}{25}\sqrt{4R^2 - 625}$ $\alpha + \beta = 90^\circ$

$4R^2 - 4 \cdot \frac{17}{25}\sqrt{4R^2 - 625}\, R = 289$

$4 \cdot 25 R^2 - 4 \cdot 17\sqrt{4R^2 - 625}\, R = 289 \cdot 25$

68
25
3

$R \cdot 4 \cdot 17\sqrt{4R^2 - 625} = 4 \cdot 25 R^2 - 289 \cdot 25$

$R^2 \cdot 4^2 17^2 (4R^2 - 625) = 16 \cdot 25^2 R^4 + (289 \cdot 25)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 25^2 \cdot 289 R^2$

$4^3 \cdot 17^2 R^4 - 625 \cdot 4^2 \cdot 17^2 R^2 = 16^2 \cdot 25 R^4 + (289 \cdot 25)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 25^2 \cdot 289 R^2$

$4^2(4 \cdot 17 - 25)R^4 - 289 \cdot 25^2 \cdot 4R^2(4-2) = (289 \cdot 25)^2$

$4^2 \cdot \cancel{68}\,43\, R^4 - 17^2 \cdot 25^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot R^2 = \cancel{28}\, 17^4 \cdot 25^4$

$\frac{D}{4} = 17^4 \cdot 25^4 \cdot 4^2 + 4^2 \cdot 43 \cdot 17^4 \cdot 25^4 =$

$= 17^4 \cdot 25^4 \cdot 4^2 (1 + 43)$

$25 + \frac{\cancel{25}}{\cancel{17}} \cdot \frac{8^2 \cdot 17^{\cancel{2}}}{25^{\cancel{2}} \cdot 3^2} = 4 \cdot \frac{17^2}{6^2}$

$\frac{25^2 \cdot 3^2 + 8^2 \cdot 17}{\cancel{3^2} \cdot 25} = \frac{\cancel{4} \cdot 17^2}{\cancel{6^2}}$

$\cancel{4}(225 + 1088) = 25^{\cancel{2}} \cdot 17^2 \; \cancel{6^2} \; \cancel{2^2}$

$\times \begin{array}{r}625\\9\\\hline 5625\end{array}$

$\cancel{\times \begin{array}{r}64\\17\\\hline 448\\64\\\hline 1088\end{array}}$ $\cancel{\times \begin{array}{r}289\\25\end{array}}$

$+ \begin{array}{r}1088\\225\\\hline 1313\end{array}$

$+ \begin{array}{r}5625\\1088\end{array}$

34

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$(\sin\alpha\cos2\beta+\cos\alpha\sin2\beta)(\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta)+\sin\alpha\cos\alpha$

$(\operatorname{tg}\alpha\cos2\beta+\sin2\beta)(\cos2\beta-\operatorname{tg}\alpha\sin2\beta)+\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$

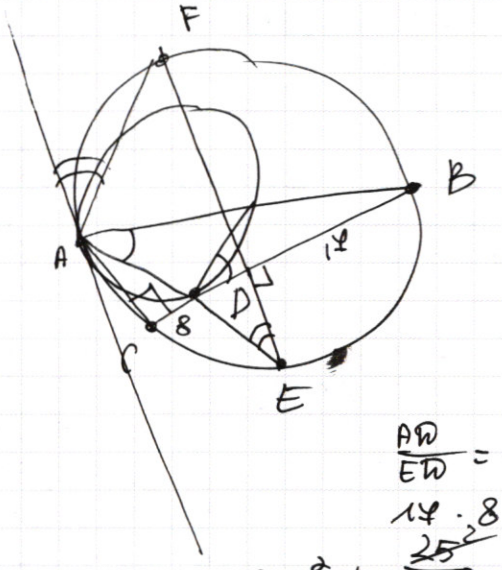
$2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

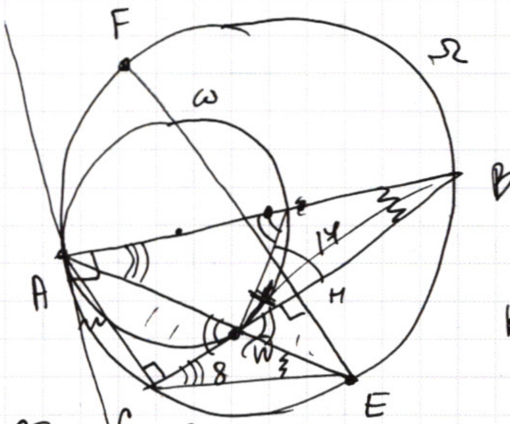
$2(\operatorname{tg}\alpha\cos\beta+\sin\beta)(\cos\beta-\operatorname{tg}\alpha\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt5\cos^2\alpha}$

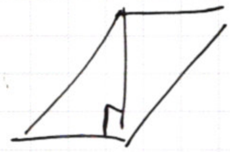
$-\frac{1}{\sqrt5}(\operatorname{tg}^2\alpha+1)$

$-2\sqrt5(\operatorname{tg}\alpha\cos^2\beta+\sin\beta\cos\beta-\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\operatorname{tg}\alpha\sin^2\beta) = 1+\operatorname{tg}^2\alpha$

$-2\sqrt5(\operatorname{tg}\alpha\cos2\beta + \sin\beta\cos\beta(1-\operatorname{tg}^2\alpha))$







$\begin{array}{r}85\\ \times\ 5\\ \hline 425\end{array}$

$k = \frac{x}{8}$

$\frac{AD}{ED} = \frac{CD}{HD} = \frac{8}{x}$

$17\cdot8 = ED\cdot ED\cdot\frac{8}{x}$

$25^2 + \frac{25^2}{17^2}\cdot\frac{16^2}{25^2}R^2 = 4R^2$

$25^2 = R^2\left(\frac{4\cdot17^2-16^2}{17^2}\right)$

$25^2 = R^2\frac{(34-16)(34+16)}{17^2} = R^2\frac{18\cdot50}{17}$

$2R = \frac{85}{3} = \frac{425}{15}$

$2r = \frac{272}{15}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

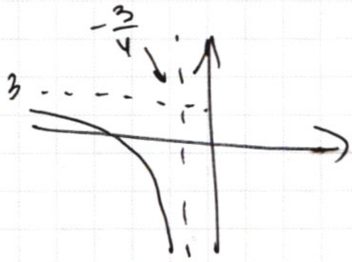
$$ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$$

$$ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad 8x^2+30x+17=0$$

225
136
89

$$\frac{D}{2} = 225-136=89$$

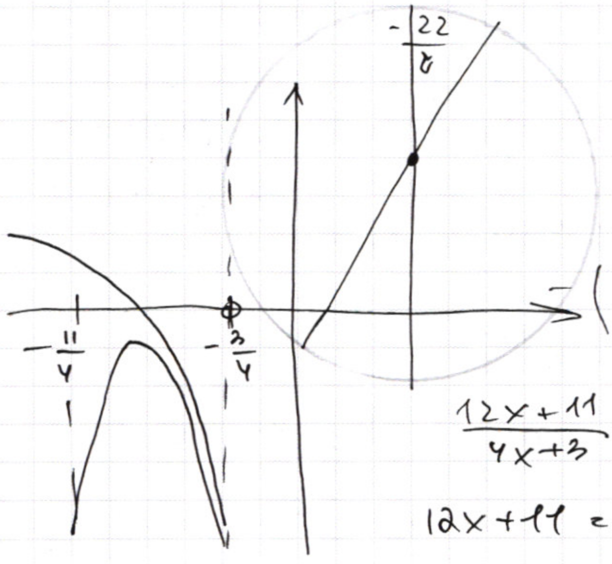
$$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4(x+\frac{3}{4})} = 3+\frac{1}{2(x+\frac{3}{4})}$$



$$\frac{-\frac{12\cdot 11}{4}+11}{-\frac{11\cdot 4}{4}+3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$$

$$-(8x^2+30x+17)$$

наиб. знач. в $x_в$. $x_в = \frac{-30}{16} = -\frac{15}{8}$



$$-\frac{15}{8} < -\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$$

~~$\frac{3}{4} < \frac{15}{8}$, $24 < 60$, $6 < 15$~~

$$-\left(\frac{225}{8} - \frac{45}{8} + 17\right) \quad -\frac{136}{8} \quad -\frac{181}{8}$$

225
181
44

$$-\frac{44}{8} = -\frac{11}{2}$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -8x^2-30x-17$$

$$12x+11 = (-8x^2-30x-17)(4x+3)$$

$90^\circ+\alpha-2\alpha = 90^\circ-\alpha$ $\quad 12x+11 = -\left(32x^3+120x^2+68x + 24x^2+90x+51\right)$

$$12x+11 = -(32x^3 + 144x^2+158x+51)$$

~~$32x^3+144x^2-146x-40=0$~~

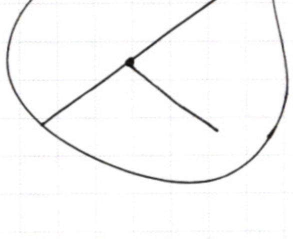
~~$16x^3-72x^2-73x-20=0$~~

$$32x^3+144x^2+170x+62=0$$

$$16x^3+72x^2+85x+31=0$$

	16	72	85	31
−31	16			

~~16×31, 16, 48~~ 694



$\varphi = 180^\circ -$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad x \geq 2y$$

$2\cdot 3y\cdot 3$

$$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$$

$$(x-2)^2 \cancel{-4} + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2 \qquad y(x-2)-(x-2)=(x-2)(y-1)$$

$$x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2 \qquad x-2 \cancel{+} 2y+1$$

$$\begin{cases} u-2v = \sqrt{uv} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \qquad uv = (u-2v)^2 \qquad u \geq 2v$$

$$uv = u^2+4v^2-4uv$$

$$u^2+4v^2-5uv$$

$$u^2-uv+4v^2-4uv=0$$

$$u(u-v)+4v(v-u)=0$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \qquad -\sqrt{\frac{5}{2}} \geq -2\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$\underbrace{x^2+18x}_{t}>0 \qquad 5^{\log_{12}t}+\cancel{x}t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$\log_{12}5\cdot\log_{12}t+\log_{12}t \geq \log_{12}t\cdot\log_{12}13$$

$\log_{12}12$

$$\log_{12}t\,(\log_{12}5+\cancel{1}-\log_{12}13) \geq 0$$

$$\log_{12}t\left(\log_{12}\frac{60}{13}\right) \geq 0$$

$(x^2+18x)^{\log_{12}}$ $\quad x(x$

$$\cancel{\ldots}\ 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos \cancel{2\beta}\,2\alpha\,\sin\cancel{2\beta}\,2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta-\sin 2\alpha\sin^2 2\beta+\cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta+\sin 2\alpha$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)