МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

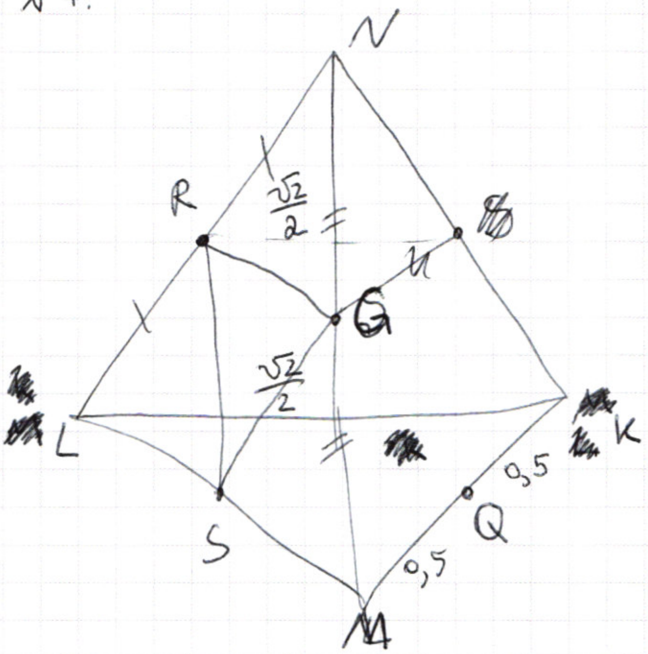
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



RS || LM (ср. л)
SG || MK (
SG -
$SR = \frac{\sqrt{2}}{2}$

GNRS - паралл. ⇒

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16(x-1)$ $BD^2 = \frac{17^2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{17^2}{16} \Rightarrow BD = \frac{17}{4}$

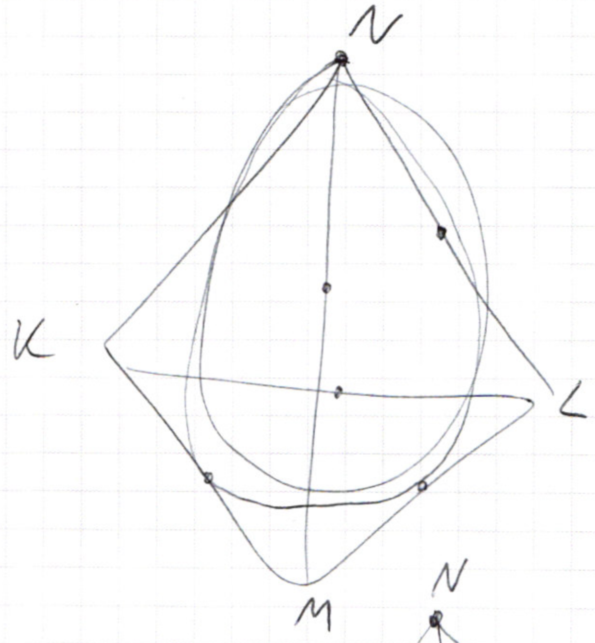
$4x-5 \neq 0$

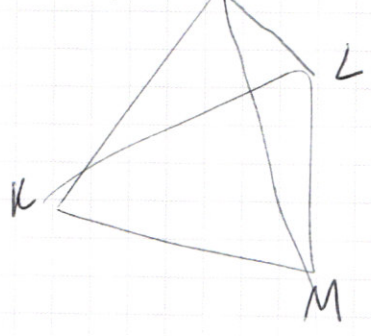
$x \neq \frac{5}{4}$

$\frac{HD}{DC} = \frac{17}{8_4} \cdot \frac{\cancel{8}}{15} = \frac{17}{60} = k$

$\triangle EHD \sim \triangle ACD$ с коэф. $\frac{17}{60}$

A





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x-12y\geqslant 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \\ x-12y\geqslant 0 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

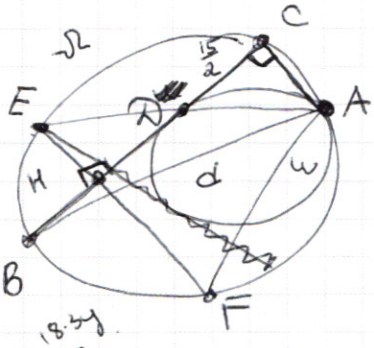
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

R_ω; R_Ω, $\angle AFE$; S_{AEF}

$BD = \frac{17}{2}$; $CD = \frac{15}{2}$

$BC = 16$



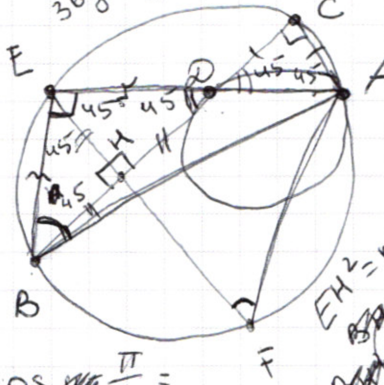
$17 \cdot 8 = 136$, $17 \cdot 7 = 119$

$CD = AC$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DH} = \frac{AC}{CH}$

$x^2 - 72x + 36 + 36y^2 - 18 \cdot 3y + 9$

$AD \cdot DE = \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2}$, $AD \cdot DH = DE \cdot CD$



$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$EH^2 = BH \cdot HD$

$\frac{BD^2}{4}$

$16 \cdot 16 = 256$

$AB^2 = 256 + AC^2$

$CD = AC \Rightarrow$

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{EB}{BD} \Rightarrow$

$AB = \sqrt{256 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{1249}{4}} = \frac{\sqrt{1249}}{2}$

$1024 + 225 = 1249$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{EB \cdot 2}{17}$

$\sin((2(\alpha+\beta)) + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) \cdot \cos 2\beta + \cos(2(\alpha+\beta)) \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$37 \cdot 37 = 1369$

16

$-\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cos 2\beta + \cos(2(\alpha+\beta)) \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha + \frac{2}{5} = 0$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ?$

$\cos\alpha \neq 0$

$EB = 17\sqrt{2} \Rightarrow$ Из $\triangle ABE$:

$\cos\angle EBA = \frac{AB}{EB} = \frac{\sqrt{1249}}{2} \cdot \frac{1}{17\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1249}}{34\sqrt{2}}$

$R_\Omega = \frac{\sqrt{1249}}{4}$

$AF, EF, AE = ?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \rightarrow x(2y-1)-6(2y-1)=$$

$$=(x-6)(2y-1)$$

$$x^2-6x-6x$$

$$x(x-6)-6x+18y(2y-1)+ \cancel{18y}\ 18y=$$

$$=x(x-6)-6(x+3)+18y(2y-1)=4$$

$$\begin{cases} x(x-12)+36y(y-1)=45 \\ x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \end{cases}$$

$$(x-12y)^2=(x-6)(2y-1)$$

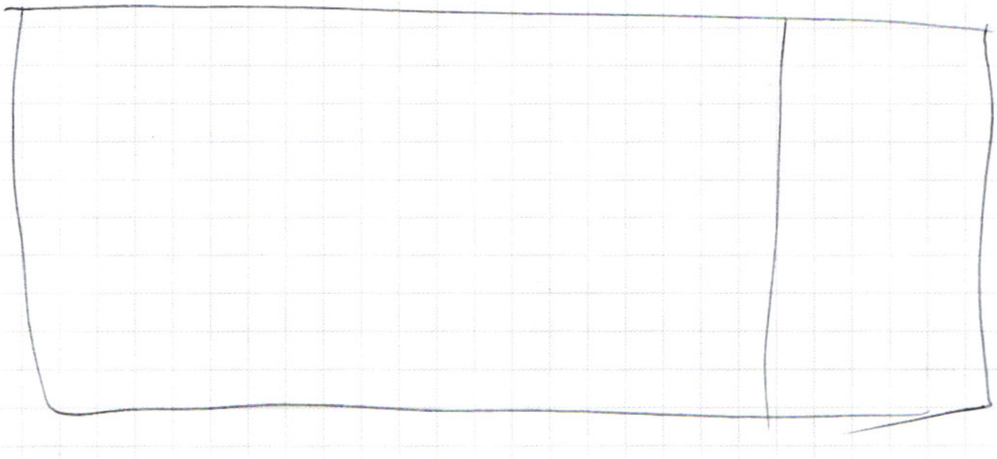
$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$f(p)=f(p)+f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)$$

0 0 0

2 2 2



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\beta - \frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$

$\frac{-2\cos 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = \frac{-1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 2(\sin^2\alpha \pm 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$

① $2\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \;|:\cos^2\alpha$ т.к. $\cos\alpha \neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha + 3\operatorname{tg}^2\alpha - 1 = 0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$(\operatorname{tg}\alpha+1)(3\operatorname{tg}\alpha-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}\end{array}\right.$

② $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 0 \;|:\cos^2\alpha$ т.к. $\cos^2 \neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 3 = 0$

$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$(\operatorname{tg}\alpha+1)(\operatorname{tg}\alpha-3) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -1\\ \operatorname{tg}\alpha = 3\end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 3$

№5.

$f(2)=0 \quad f(7)=1 \quad f(17)=4$

$f(3)=0 \quad f(11)=2 \quad f(19)=4$

$f(5)=1 \quad f(13)=3 \quad f(23)=5$

$f(p) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{7}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{11}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{13}\right)=-3$

$f\left(\frac{1}{17}\right)=-4$

$f\left(\frac{1}{19}\right)=-4$

$f\left(\frac{1}{23}\right)=-5$

Пусть $x=a_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\alpha_n}$ — разложение на простые множители

Тогда: $f(x)=\alpha_1\cdot f(a_1)+\ldots+\alpha_n\cdot f(a_n)$,

а т.к. $f(a_i)$ нам известно, то и $f(x)$ мы можем найти

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\alpha_1\cdot \underset{-f(a_1)}{\underbrace{f\left(\frac{1}{a_1}\right)}}+\ldots+\alpha_n\cdot \underset{-f(a_n)}{\underbrace{f\left(\frac{1}{a_n}\right)}}=-f(x)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$ — нужно найти такие пары

Введем такую таблицу:

k	$f(k)$	
2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24	0	10 шт.
5, 7, 10, 14, 15, 20, 21	1	7 шт
11, 22, 25	2	3 шт.
13	3	1 шт.
17, 19	4	2 шт
23	5	1 шт

Легко убедиться, что числа и зн. функции к ним в таблице верны (все числа, у которых простые делители это 2 и 3 только — у них будет сумма вида: $k\cdot f(2)+m\cdot f(3)=0$ и т.д.)

1. Если $f(y)=1$, то подходит 10 штук x-ов $\Rightarrow$

$7\cdot 10=70$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Если $f(y)=2$, то подходит 17 x-ов $\Rightarrow$
$17 \cdot 3 = 51$

3. Если $f(y)=3$, то подходит 20 x-ов $\Rightarrow$
$20 \cdot 1 = 20$

4. Если $f(y)=4$, то подходит 21 x $\Rightarrow$
$21 \cdot 2 = 42$

5. Если $f(y)=5$, то подходит 23 x-а $\Rightarrow$
$23 \cdot 1 = 23$

$\Downarrow$

$70+51+20+42+23=206$

Ответ: 206 пар

№ 2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x-12y\geqslant 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \\ x-12y\geqslant 0 \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=x-6 \\ b&=2y-1 \\ a-6b&=x-12y \end{aligned}}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \quad (1) \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

вычтем из верх. нижн.

$$\begin{cases} 27b^2-13ab+90=0 \quad (2) \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a = \frac{27b^2+90}{13b}$, $b \neq 0$, т.к. из ① если $b=0 \Rightarrow a=0$
при $a=b=0$ нет реш. из ②

$\frac{81\cdot(3b^2+10)^2}{169b^2} + 9b^2 = 90 \quad |:9$

$\frac{9(3b^2+10)^2}{169b^2} + b^2 = 10$

$\frac{81b^4+540b^2+900+169b^4-1690\cdot b^2}{169b^2} = 0$

т.к. $b \neq 0$: $250b^4 - 1150b^2 + 900 = 0$

$10b^4 - 46b^2 + 36 = 0$

$5b^4 - 23b^2 + 18 = 0$

$(b^2-1)(5b^2-18) = 0$

$b \pm 1$; $b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = x-6$

$b = 2y-1$

1. $a=9$, $b=1$

$x=15$, $y=1$ (удв. $x-12y \geq 0$)

2. $a = \frac{\frac{27\cdot18}{5}+90}{3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}}$,

$b = 3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a-6b \geq 0$?

$27\cdot\frac{18}{5}+90 - \frac{27\cdot18}{5}\cdot6 \overset{?}{\geq} 0$

не подходит

3. $a=-9$, $b=-1$

$x=-3$, $y=0$ (не подходит, т.к. $-3<0$ из ОДЗ)

$a = \frac{\frac{27\cdot18}{5}+90}{-3\sqrt{\frac{2}{5}}}$,

$b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a-6b \geq 0$?

$\frac{\frac{27\cdot18}{5}+90-\frac{27\cdot18}{5}\cdot6}{-3\sqrt{\frac{2}{5}}} \overset{?}{\geq} 0$

подходит.

$a = \frac{-156\sqrt{10}}{5}$, $b = \frac{-3\sqrt{10}}{5}$

$x = 6 - \frac{156\cdot\sqrt{10}}{5}$;
$y = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ответ: $(x;y) = (15;1)$
$(x;y) = \left(6-\frac{156\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Огр: $10x - x^2 > 0$

$$-x^2+10x + |10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Делаем замену: $t = 10x - x^2$, $t > 0$ =>

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

Т.к. $t > 0 \Rightarrow |t| = t \Rightarrow$

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t \cdot \left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq 5^{\log_3 t}$$

Прологарифмируем по осн. 3:

$$\log_3 t + \log_3\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq \log_3 t \cdot \log_3 5$$

$$\log_3\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq (\log_3 5 - 1)\log_3 t$$

$t = 3^a \Rightarrow$

$$\log_3\left(1 + 3^{a\cdot\log_3 \frac{4}{3}}\right) \geq (\log_3 5 - 1)\cdot\log_3 3^a$$

$$\log_3\left(1 + \left(\tfrac{4}{3}\right)^a\right) \geq a\cdot(\log_3 5 - 1)$$

$$\log_3\left(\frac{3^a+4^a}{3^a}\right) \geq a\cdot\log_3 5 - a$$

$$\log_3(3^a+4^a) - \log_3 3^a \geq a\log_3 5 - a$$

$$\log_3(3^a+4^a) - a \geq a\log_3 5 - a$$

$$\log_3(3^a+4^a) \geq \log_3 5^a$$

$3 > 1 \Rightarrow 3^a + 4^a \geq 5^a \quad |:5^a$ (т.к. $5^a > 0$)

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^a + \left(\tfrac{4}{5}\right)^a \geq 1$$

Заметим, что $\left(\frac{3}{5}\right)^a$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^a$ убывают, т.е. их сумма тоже убывает. При $a=2$:

$\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$, а т.к. $\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a$ убыв $\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$

при $a \leq 2$

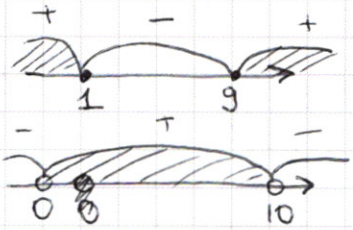
Таким образом, $0 < t \leqslant 3^2 = 9$

$0 < 10x - x^2 \leqslant 9$

$\begin{cases} x(10-x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \end{cases}$; $\Rightarrow$

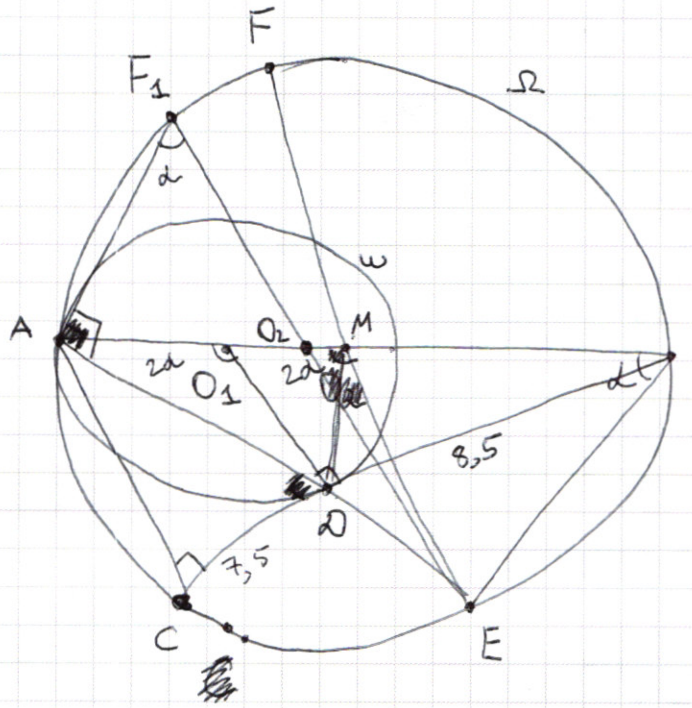
$\begin{cases} x(10-x) > 0 \\ (x-1)(x-9) \geqslant 0 \end{cases}$

$1 - 10 + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$
$x_2 = 9$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

№4.



$r = ?$
$R = ?$
$\angle AFE = ?$
$S_{\triangle AFE} = ?$

Проведем EO_2 до пер. с $\Omega \Rightarrow$ т. F_1

Док-ем, что $F = F_1$.

$M \in EF \cap AB$
$M \in \omega \cap AB$
$\triangle ADM$ и $\triangle AEB$ подобны по 2 углам, т.к. $\angle A$ - общ, а $\angle ADM = \angle AEB = 90°$ (опир на d), а значит и все соотв. эл. из них подобны $\Rightarrow \angle AO_1D = \angle AO_2E$ как центр и соотв. сторонам подоб. $\triangle$, а также $DO_1 \parallel EM$, $\angle O_1DB = 90°$, т.к. D - т. касания

M и O_2 - совпадают и F и F_1 - совпадаю

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow \frac{8,5}{16} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 17R = 32R - 16r \Rightarrow$

$r = \frac{15}{16}R$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ΔBDO_1, по т. Пифагора: $BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2$

$72,25 + r^2 = (2R - r)^2$

$72,25 + \left(\frac{15}{16}R\right)^2 = \left(2R - \frac{15}{16}R\right)^2$

$72,25 + \frac{225}{256}R^2 = \frac{289}{256}R^2$

$\frac{64}{256}R^2 = 72,25$

$\cancel{\frac{8}{16}R = 8,5}$

$\cancel{\frac{1}{2}R = 8,5} \Rightarrow R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16} = r$

$\angle EF_1A = \alpha = \angle EBA$

$\angle DO_1A = 2\alpha = \angle EO_2A$

$\angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle CBA = 2\alpha - 90^\circ$

$\sin \angle DBA = \frac{r}{2R - r} = \frac{\frac{255}{16}}{34 - \frac{255}{16}} = \frac{255}{289} = \frac{15}{17} = -\cos 2\alpha =$

$= 2\sin^2\alpha - 1$

$2\sin^2\alpha = \frac{32}{17}$

$\sin^2\alpha = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$AE = EF_1 \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \sin\alpha = 34 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}$

$AF = EF_1 \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \cos\alpha = 34 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

$S_{\Delta AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$; $S_{\Delta AEF} = 136$

№ 7

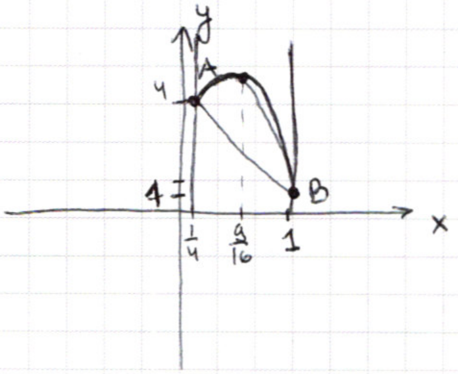
$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

При $x=\frac{1}{4}$: $3 \le ax+b \le 4 \Rightarrow f(x)=-32x^2+36x-3$

$x=1$: $0 \le ax+b \le 1 \Rightarrow f'(x)=-64x+36 \Rightarrow$

Экстр. в $x=\frac{9}{16}$



$ax+b$ – прямая $= g(x)$ (прямая g)

$g(\frac{1}{4}) \le 4$

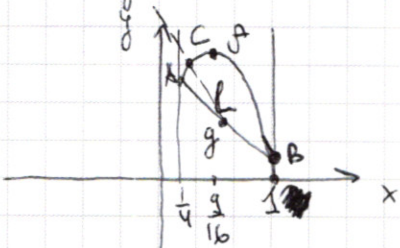
$g(1) \le 1$

Рассм. взаимн. расп. прямой g и пар. f

A и B – т. пересечения пар. с $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$

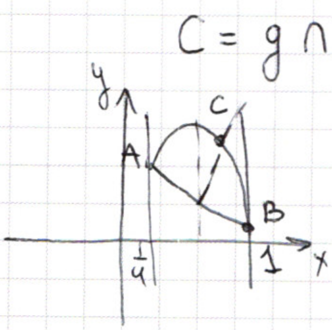
L – прямая AB

g может пересекать f только в A или B (на пром. $[\frac{1}{4};1]$), иначе



$g(x)>f(x)$ на $[A_x; C_x) \subset [\frac{1}{4};1]$ – противоречие с условием.

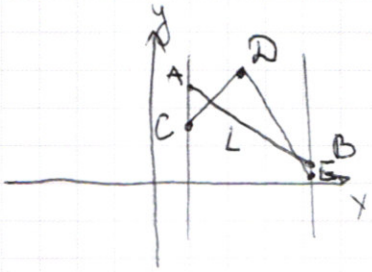
$C = g \cap f$



$g(x)>f(x)$ на $(C_x; B_x] \subset [\frac{1}{4};1]$ – противоречие с усл.

Также $g(x) \ge L(x)$ (прямая g ниже или совп с L) на $x \in [\frac{1}{4};1]$, т.к. иначе $g(x) > L(x)$

хотя бы в 1 т. $\in (\frac{1}{4}; 1))$



D – т., в которой $g(x) > L(x)$

$C = g \cap (x = \frac{1}{4})$

$E = g \cap (x = 1)$

Прямые g и L имеют 2 т. пересечения, что невозможно $\Rightarrow$

$g(x) < f(x) \Rightarrow g(x) < L(x)$ на $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ ①

Найдем $L(x)$: (прямая $\Rightarrow d \cdot x + c = L(x)$)

$$\begin{cases} d \cdot \frac{1}{4} + c = 4 \\ d + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -4 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow L(x) = -4x + 5$$

Рассмотрим вз. расположение $e(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$ и $L(x)$: найдем пересечени

$\frac{16x-16}{4x-5} = -(4x-5)$; $16x - 16 = -16x^2 + 40x - 25$;

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$(4x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \in [\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow e(x) \cap L(x)$

Перепишем нач. неравенство с усл ①

$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax + b \leq -4x + 5$;

Подставим $x = \frac{3}{4}$: $\frac{12-16}{3-5} \leq ax + b \leq -3 + 5$;

$2 \leq a \cdot \frac{3}{4} + b \leq 2 \Rightarrow g(\frac{3}{4}) = 2$

$\frac{3}{4}a + b = 2$; $a = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}b$

$g(\frac{1}{4}) \leq 4$: $\frac{1}{4}a + b \leq 4$; $\Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{3}b + b \leq 4$; $\Rightarrow 2b \leq 10 \Rightarrow b \leq 5$

$g(1) \leq 1$: $a + b \leq 1 \Rightarrow \frac{8}{3} - \frac{4}{3}b + b \leq 1 \Rightarrow b \geq 5$ $\Big| \Rightarrow$

$b = 5$; $a = -4$

Ответ: $(-4; 5)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)