МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-1=a$, $y-6=b$, тогда $b-6a=y-6x$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \quad |^2 \quad (b\geq 6a) \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-12a+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-4a)(b-9a)=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right.$$

~~1) b=4a:~~ ~~1) b=4a не подходит,~~

~~$9a^2+16b^2=90$~~ ~~т.к. $b\geq 6a$~~

2) $b=9a$:

$9a^2+81a^2=90 \Rightarrow a=\pm 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ y=15 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{array}$$ — не подходит проверкой

2) $b = 4a$:

$9a^2 + 16a^2 = 90$

$a^2 = \frac{90}{25}$

$a = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\begin{cases} a = \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b = \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ – не подходит проверкой.

$\begin{cases} a = \frac{-3\sqrt{10}}{5} \\ b = \frac{-12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\sqrt{10}+5}{5} \\ y = \frac{-12\sqrt{10}+30}{5} \end{cases}$

Ответ: $(2;15)$, $\left(\frac{-3\sqrt{10}+5}{5}; \frac{-12\sqrt{10}+30}{5}\right)$

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ *

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17}$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

* $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Downarrow$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\left(\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha = 3$

$3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |: \cos^2\alpha \neq 0$

$3\,tg^2\alpha - 2\,tg\alpha - 5 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$

Если $\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$:

$3\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$

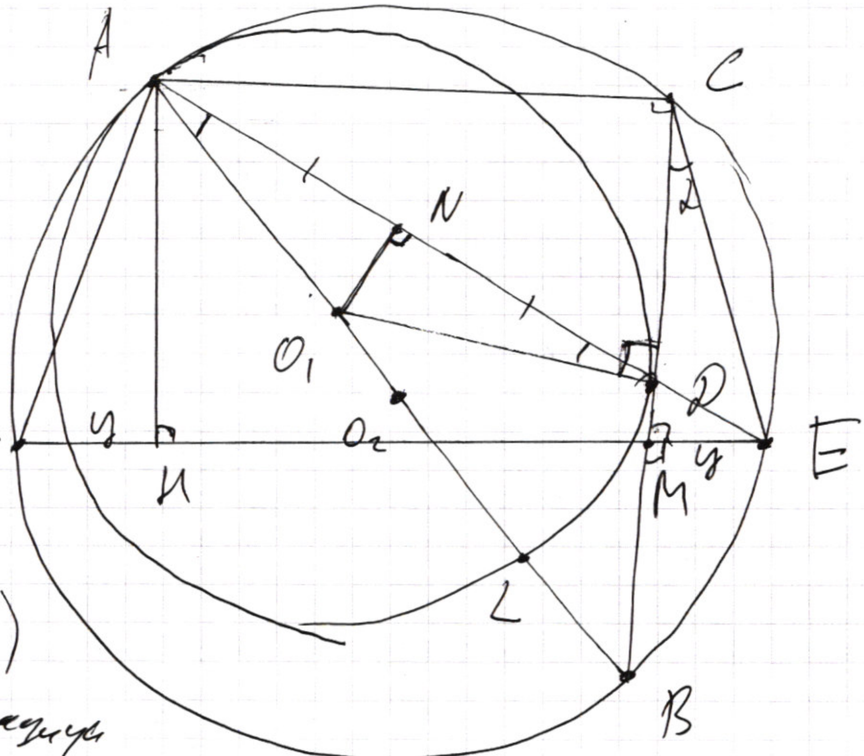
$tg\,\alpha = 0$

Ответ: $tg\,\alpha = -1$, $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$, $tg\,\alpha = 0$

№ 4.

Решение:

1) Т.к. Ω и ω касаются, то точки A, O_1, O_2 лежат на одной прямой (O_1 – центр ω, O_2 – центр Ω)



2) Пусть R – радиус Ω, r – радиус ω, $L = \omega \cap AB$.

Тогда $LB = 2R - 2Rr$, $O_1B = 2R - r$

3) По св-ву кас:

$BD^2 = BL \cdot AB$

$13^2 = (2R - 2r)\, 2R$

4) $\triangle ABC \sim \triangle O_1DB$ ($\angle ACB = 90°$, т.к. AB диаметр, $\angle O_1DB = 90°$, т.к. BD — кас.) и $AC \parallel O_1D$,

тогда по т. Фалеса $\frac{BO_1}{AO_1} = \frac{DB}{CD}$

$\Rightarrow \frac{2R - r}{r} = \frac{13}{12} \Rightarrow 24R = 25r$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 13^2 = (2R - 2r) \cdot 2R \\ 24R = 25r \end{cases}$$

$\frac{25^2 r^2}{144} - \frac{25 r^2}{6} = 13^2 \Rightarrow r = \frac{12 \cdot 13}{5}$, $R = \frac{13 \cdot 5}{2}$

5) $AB = 2R = 65$

6) $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{25(13^2 - 25)} = 60$

7) $M = CB \cap FE$, $AH \perp FE$.

8) Т.к. $\angle ACB = \angle FMC = 90°$, то $AC \parallel EF$

и $FACE$ — р/б трапеция, $\angle AFE = \angle CEF$.

9) $AD = \sqrt{12^2 + 12^2 \cdot 5^2} = 12\sqrt{26}$

10) O_1N — высота, медиана и бисс. в р/б $\triangle O_1AD$, тогда $AN = 6\sqrt{26}$

11) $\cos\angle BAE = \frac{AN}{AO_1} = \frac{6\sqrt{26}}{\frac{12 \cdot 13}{5}} = \frac{30\sqrt{26}}{12 \cdot 13} = \frac{5\sqrt{26}}{2 \cdot 13}$

12) $\angle BAE = \angle BCE$ (опир. на одну дугу)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13) $\cos\angle BCE = \sin\angle CEF = \cancel{\cos}\ \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \angle CEF = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$

~~14) $HM = AC = 60$, Пусть $FH = MB = y$, тогда~~

~~$CM = \frac{y}{tg\alpha}$, $\alpha = \angle BCE$~~

~~$MB = CB - \frac{y}{tg\alpha} =$~~

14) $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow$

$\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{CE}{65} \Rightarrow CE = 60$

$ME = CE\cdot\sin\alpha = 60\cdot\frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{30\sqrt{26}}{13}$

$FE = 2ME + HM =$

$= \frac{60\sqrt{26}}{13} + AC = 60\left(\frac{\sqrt{26}}{13}+1\right)$

15) $CM = AH = CE\cdot\cos\alpha = 60\cdot\frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{150\sqrt{26}}{13}$

16) $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}FE\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 60\left(\frac{\sqrt{26}}{13}+1\right)\cdot\frac{150\sqrt{26}}{13} =$

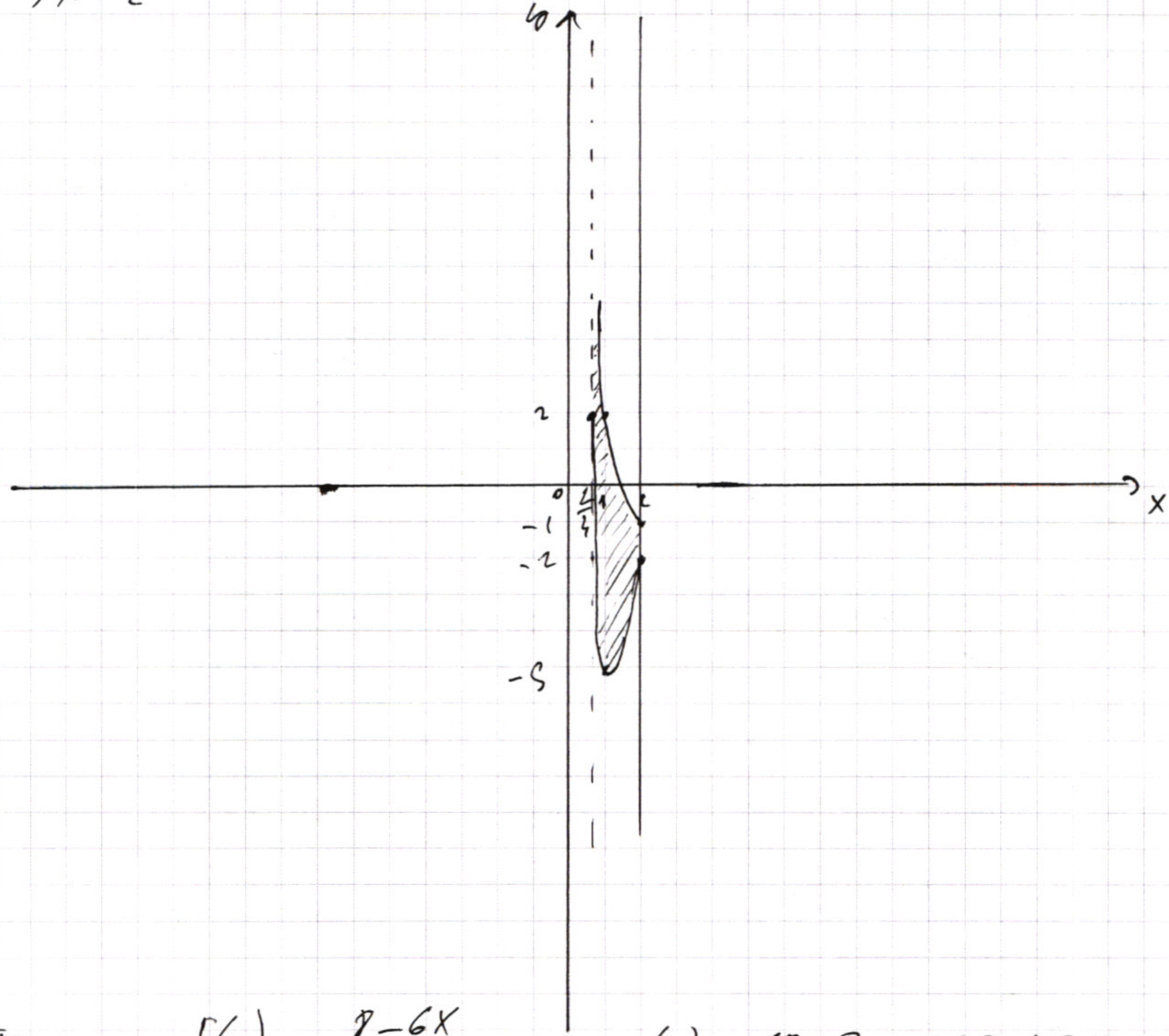
$= \frac{4500\sqrt{26}}{13}\left(\frac{\sqrt{26}}{13}+1\right)$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$, $r = \frac{156}{5}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$,

$S_{AFE} = \frac{4500\sqrt{26}}{13}\left(\frac{\sqrt{26}}{13}+1\right)$

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$



Пусть $f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$, $g(x)=18x^2-51x+28$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

$f(1)=2$, $f(2)=-1$

$g(1)=-5$, $g\left(\frac{2}{3}\right)=2$, $g(2)=-2$

Тогда у нас прямая $ax+b$ должна полностью содержаться в заштрихованной области (см. рисунок). То есть проходить ~~через точку~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$(\frac{2}{3}; 2)$ и~~ через точки, где $x = 2$, а $y \in [-2; -1]$ и через точки, где $x = \frac{2}{3}$, а $y \in (2; +\infty)$

1. Прямая проходит через точку $(2; -2)$ и точку $(\frac{2}{3}; 2)$:

$$\begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ \frac{2}{3}a + b = 2 \end{cases}$$

$\frac{4}{3}a = -4 \Rightarrow a = -3,\ b = 4$

Далее прямую мы можем поднимать по вертикальной прямой $x = \frac{2}{3}$, ~~не~~ пока, чтобы она проходила через точку $(2; -2)$. Это будет происходить до касания с гиперболой; то ~~есть~~ уравнение $ax + b = -2 + \frac{4}{3x-2}$ будет иметь одно решение:

$ax(3x-2) + (3x-2)b = -2(3x-2) + 4$

$ax^2 - 2ax + 3xb - 2b = -6x + 8$

$ax^2 - x(2a - 3b - 6) - 2b - 8 = 0$

$D = (2a - 3b - 6)^2 + 4a(2b + 8) = 0$

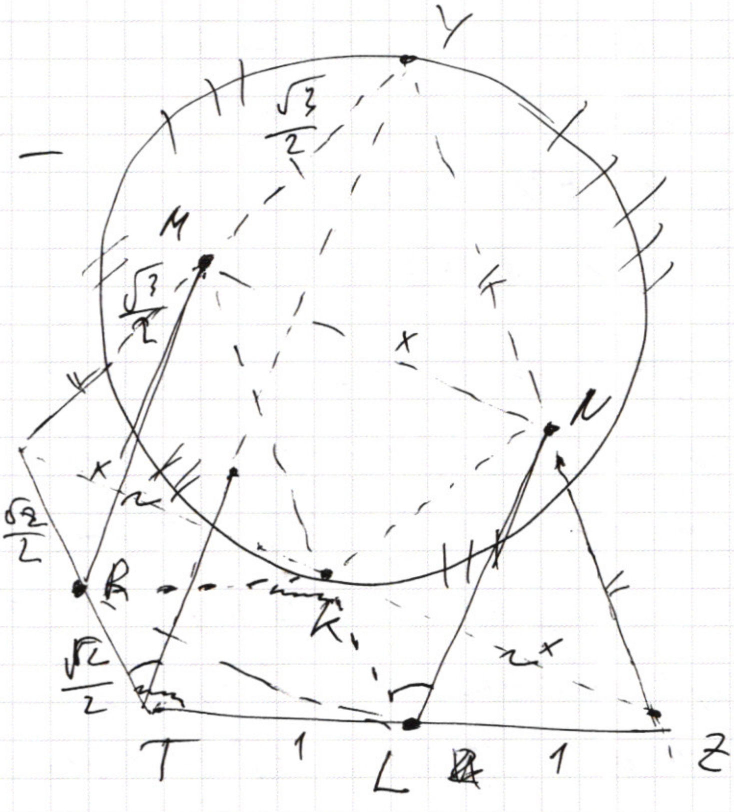
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases}(2a-3b-6)^2+(2b+8)4a=0\\ 2a+b=-2 \Rightarrow b=-2-2a\end{cases}$$

Аналогично для точки $(2;-1)$ и $(-\frac{2}{3};2)$, а потом случай касания прямой с гиперболой и проходящей через точку $(2;-1)$

№ 7.

~~Решение: Пусть середины сторон XY, YZ, XZ — M, N, K соотв., тогда, чтобы сфера проходила через середину XZ необходимо, чтобы она~~



Решение:

1) Пусть M, N, K, R, L — середины рёбер XY, YZ, XZ, XT, TZ соотв., тогда

$MR \parallel YT$, $NL \parallel YT$, $MN \parallel XZ$, $RL \parallel XZ$ (ср. линии треуг.). ~~(т.к.~~

2) $MR \parallel YT$ и $NL \parallel YT \Rightarrow MR \parallel NL$, аналогично $RL \parallel MN \Rightarrow RMNL$ — параллел., пото-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ромб вписан в окр. => он квадрат.

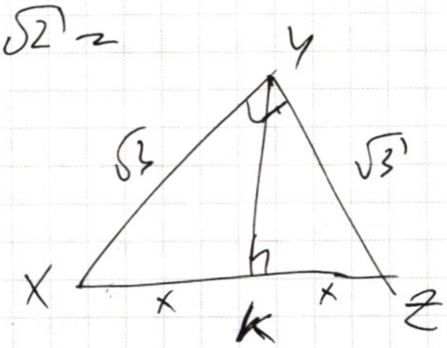
3) $MN = NL \Rightarrow YT = XZ$.

4) Пусть $MN = x$, тогда $XZ = 2x$

5) $MK \parallel YZ$, $KN \parallel XY \Rightarrow MYNK$ - паралл, который вписан в окр. => он квадрат. и $YZ = YX = \sqrt{3}$ $(MY = YN)$

6) $\angle XYZ = 90° \Rightarrow XZ\cancel{\sqrt{2}} = XY\sqrt{2} =$
$= \sqrt{6}$

Ответ: $XZ = \sqrt{6}$



№ 3.

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 26x < 0$

$$(-x^2 + 26x)^{\log_5 12} - x^2 + 26 \geq +13^{\log_5(26x - x^2)}$$

Пусть $26x - x^2 = t$

$$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$$ Решим ур-ние:

$$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} = t^{\log_5 13} \quad \Big| : t^{\log_5 13}$$

$$(t)^{\frac{\log_5 12 - 9}{\log_5 13}} + (t)^{\frac{\log_5 5 - \log_5 12}{\log_5 13}} = 1$$

$$t^{\log_{13}\frac{12}{13}} + t^{\log_{13}\frac{5}{13}} = 1$$

Пусть $f(t) = t^{\log_{13}\frac{12}{13}} + t^{\log_{13}\frac{5}{12}}$, т.к. $\log_{13}\frac{12}{13}$ и $\log_{13}\frac{5}{12} < 1 \Rightarrow f(t)\downarrow$, тогда наше ур-ние имеет не больше одного решения.

Подходит $t = 25$

Тогда нам необходимо решить нер-во $26x - x^2 \geq 25$

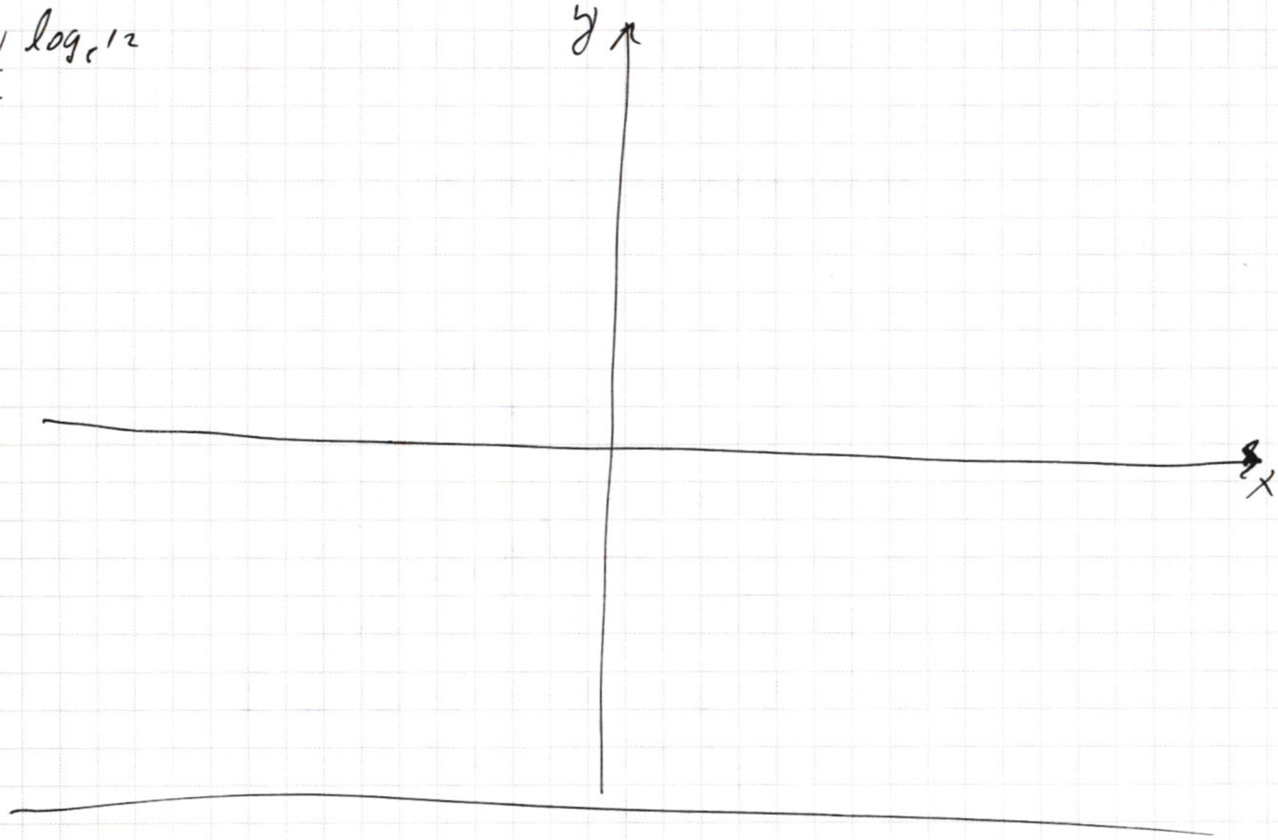
$$x^2 - 26x + 25 \leq 0$$

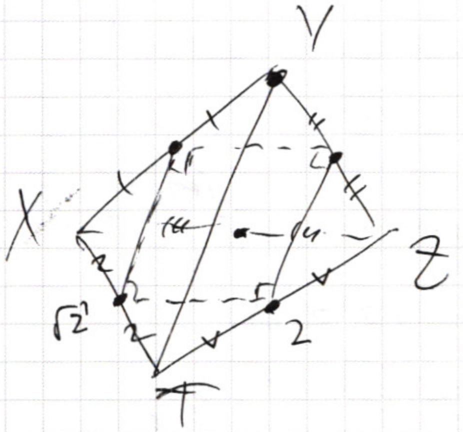
$$(x-1)(x-25) \leq 0$$

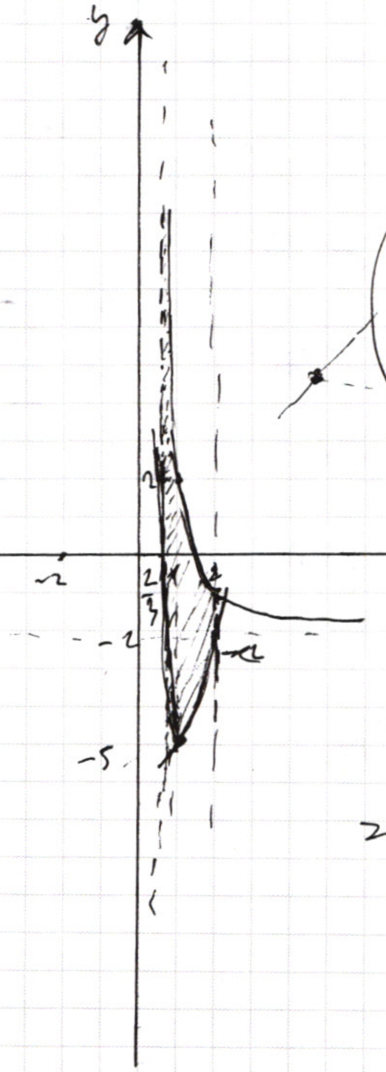
$1 \qquad 25 \quad x$

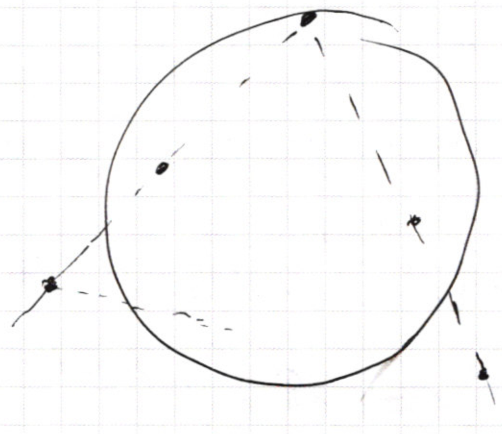
Ответ: $x \in [1; 25]$

$t^{\log_c 12}$









72

$18 \cdot 4 - 10\,2 + 28\,2$

$2 \quad -2$

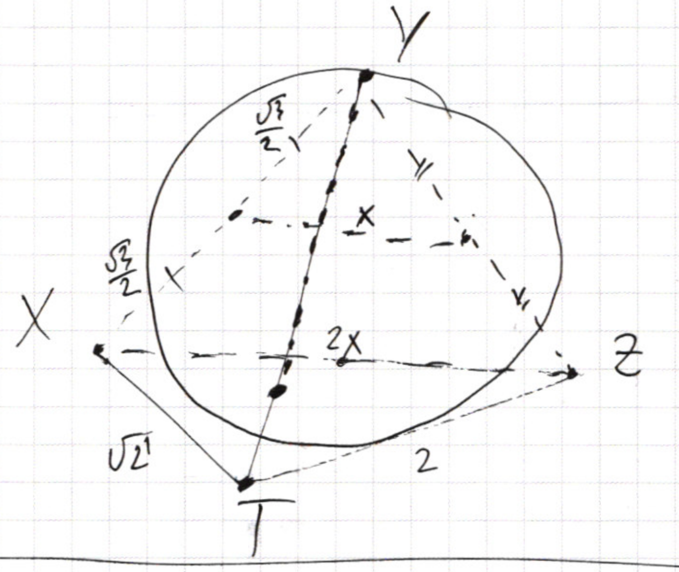
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26-x^2)}$

$t^{\log_5 12}-t \geq 13^{\log_5 t}$ $\quad$ $a^{\log_a b}=b$

$t>0$

$\cancel{t\left(t^{\log_5 12-1}-1\right) \geq 13^{\log_5 t}}$ $\quad$ $\cancel{\log_5 12=a}$ $\quad$ $\cancel{\log_5 t=b}$ $\quad$ $t>0$

$13^{\log_5 t}-t^{\log_5 12}+t \leq 0$

$\frac{1}{13}-\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 12}+\frac{1}{5}$

$-5^{\log_5 12\cdot(-1)}=-\frac{1}{12}$

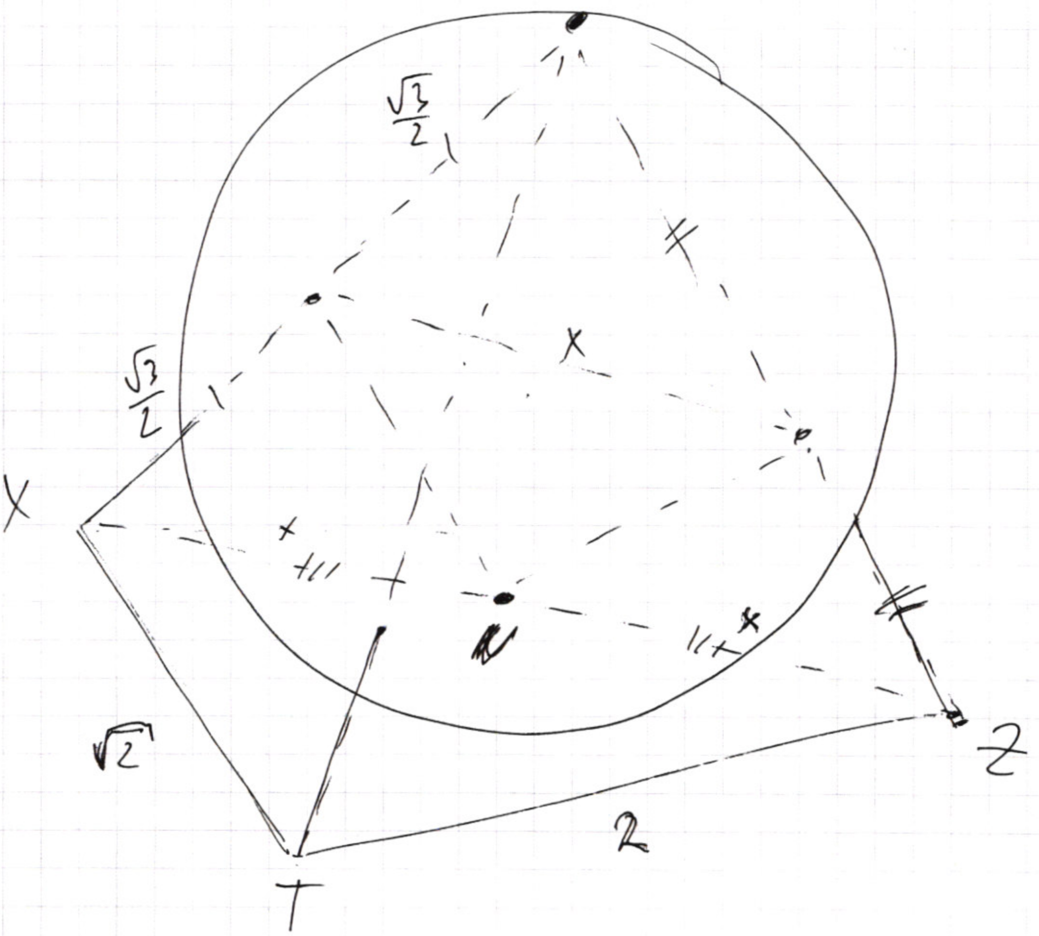
☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

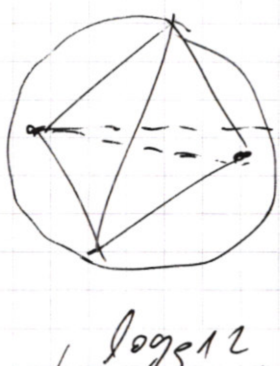
$13^{\log_5 t}$

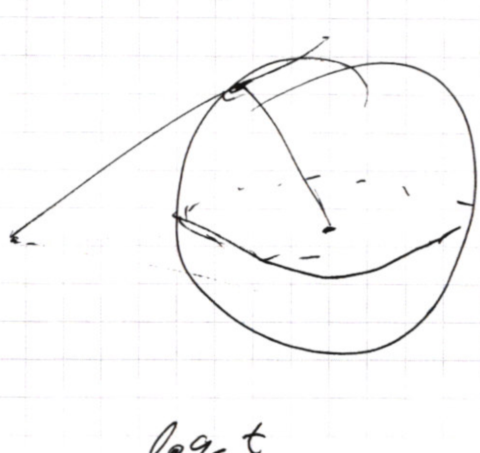
$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

$\log_x a \log_x b = \log_x b$



$t^a + t^b \geq n^t$ $\quad 5^2 + 12^2 = 13^2$





$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq 13^{\log_5 t}$ $\quad x^a + x^b = x^c$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1-\frac{25\cdot 26}{26\cdot 26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\begin{array}{r} 12\cdot 1 \\ 13 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 15b \end{array}$$

$$f(x)^a - g(x)^b \geq k(x)$$

$$t^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t}$$

$$13^{\log_5 t} - t^{\log_5 12} = t$$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(x) =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

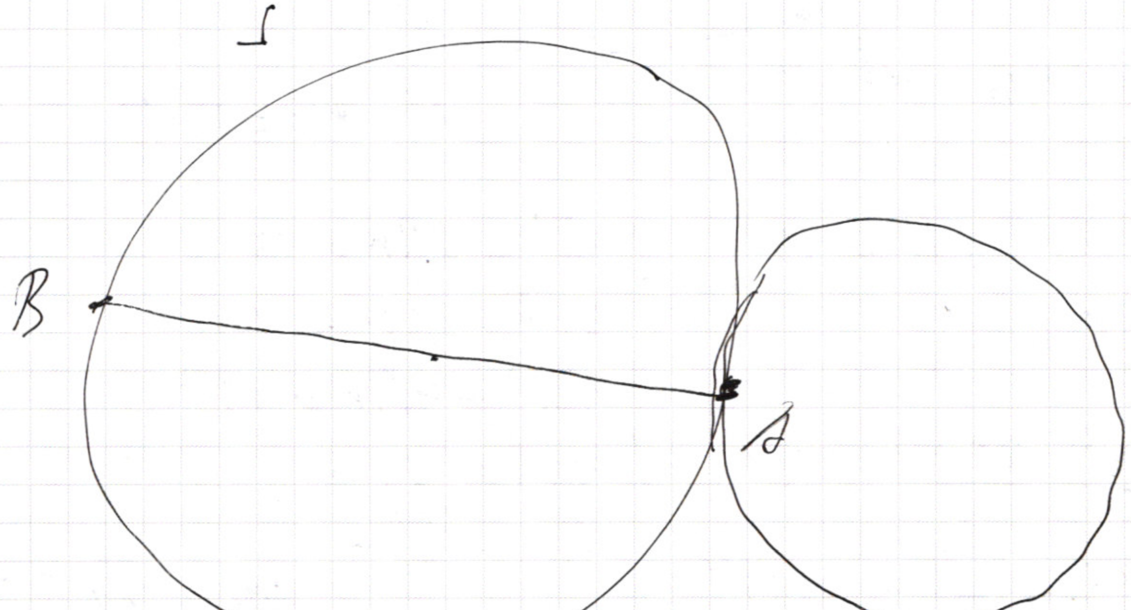
$26x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 26x \leq 0$

$(-x^2 + 26x)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$26x - x^2 = t \geq 0$

$t^{\log_5 12} - t \geq 13^{\log_5(t)}$

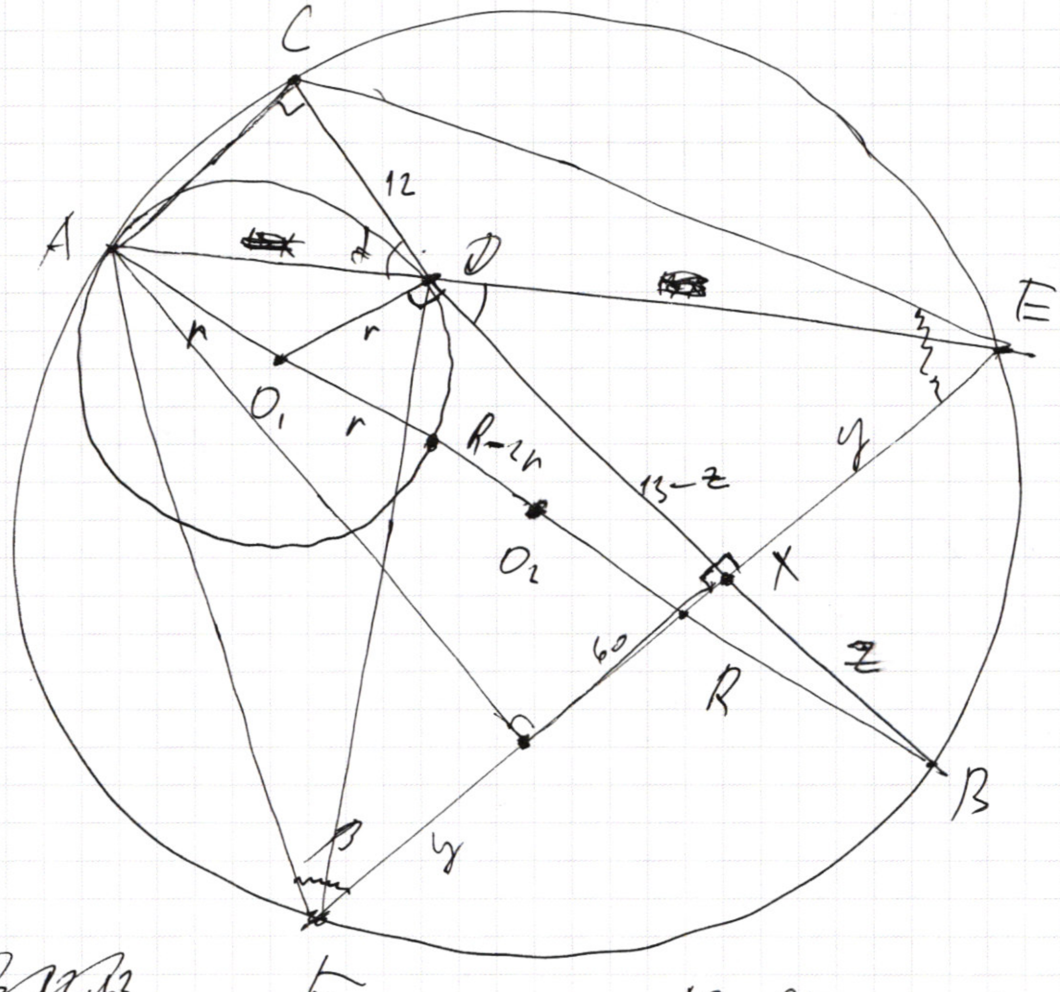


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\cancel{12x \cdot 13x = 12 \cdot 13}$

$\cancel{x = 1}$

$AD \cdot DE = 12 \cdot 13$

$$\begin{cases} (2R-2r)\cdot 2R = 13^2 \\ \dfrac{2R-r}{r} = \dfrac{13}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 13^2 \\ 24R - 12r = 13r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 13^2 \\ 24R = 25r \end{cases}$$

$$R = \frac{25r}{24}$$

$$\frac{25^2 r^2}{144} - \frac{25r^2}{6} = 13^2$$

$$25r^2\left(\frac{25}{144} - \frac{24}{144}\right) = 13^2 \qquad tg\,\alpha = \frac{60}{12} = 5$$

$$25r^2 = 12^2 \cdot 13^2$$

$$r = \frac{12 \cdot 13}{5}\ ; \quad R = \frac{\frac{12\cdot 13}{\cancel{5}} \cdot \cancel{25}^{5}}{\cancel{24}\,2} = \frac{13 \cdot 5}{2}$$

$$AB = 2R = 13 \cdot 5 = 65$$

$$AC = 60$$

$$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\log_{13}\left(t^{\log_5 12} + t\right) \geq \log_5 t$$

$\cancel{\log}$ $\lg\left(t^{\log_5 12} + t\right)$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} =$$

$$t^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t}$$

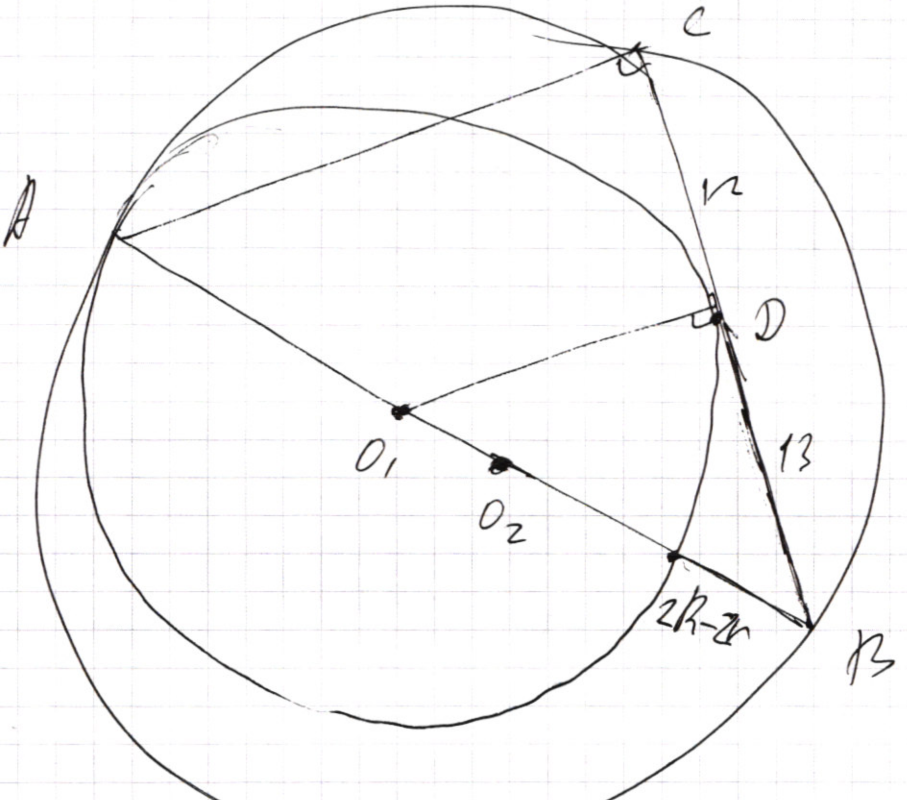
$$\cancel{\log_{13}\left(t^{\log_5 12} + t\right) = \log_5 t}$$

$$\log_5\left(t^{\log_5 12} + t\right) = \log_5 t \cdot \log_5 13$$

$$\log_5\left(t\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1\right)\right) = \log_5 t \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 t + \log_5\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1\right) = \log_5 t \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 t \cdot \left(\log_5 13 - 1\right) = \log_5\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1\right)$$



$\cancel{R}$

$\cancel{2R}$

$$\frac{2R-r}{r} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{24 \cdot 13}{10} \quad \frac{13 \cdot 25}{10}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$13^{\log_5 t} \leq t+t^{\log_5 12}$$

$$\log_5 13\cdot\log_5 t \leq \log_5\left(t+t^{\log_5 12}\right)$$

$$\frac{\log_5\left(t+t^{\log_5 12}\right)}{\log_5 t} \leq \log_5 13$$

$$\log_t\left(t+t^{\log_5 12}\right) \leq \log_5 13$$

$$\cancel{t-\log_5 13}\ \log_t\left(t+t^{\log_5 12}\right) \leq \log_t(\log_5 13)^t$$

$$(t-1)\left(t^{\log_5 12}+t-(\log_5 13)^t\right)\leq 0$$

$$13^{\log_5 t}-t \leq t^{\log_5 12}$$

$$\log_5\left(13^{\log_5 t}-t\right) \leq \log_5 12\cdot\log_5 t \qquad \log_a f(x) \geq \log_b(g(x))$$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\cancel{13^{\log_5 t} \leq t^{\log_5 12} \leq t}$$

$$13^{\log_5 t} \leq t+t^{\log_5 12}$$

$$\log_5 t \leq \log_{13}\left(t+t^{\log_5 12}\right)$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$b^2-12ab+36a^2=ab$$

$$\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$27a^2-13ab+90=0$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

324 ~~36~~

$$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$$

$$144-4(9x^2-18x-45)=$$

$$=-36x^2-2\cdot36x+324=-36(x^2+2x-9)$$

$$\cancel{|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}}$$

$$x^2-26x=t$$

$$\boxed{t<0}$$

$$|t|^{\log_5 12}\ge t+13^{\log_5(-t)}$$

$$(-t)^{\log_5 12}+13^{\log_5(-t)}+t\le 0$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$26x-x^2=t$$

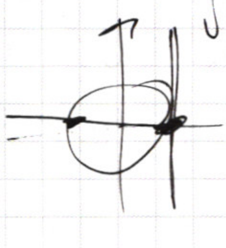
$$13^{\log_5 t}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha=3$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$tg\alpha - ?$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$xy-6x-y+6 = x(y-6)-(y-6) = (x-1)(y-6)$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$x-1=a$ $\quad b-6a = y-6x$

$y-6=b$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

~~x=6, y=~~ $x=2,\ y=15$

$x-1=a,\ y-6=b$ $\qquad b-6a = y-6x$

$b-6a=\sqrt{ab}$ $\qquad b^2-12ab+36a^2=ab$

$9a^2+b^2=90$ $\qquad b^2-13ab+36a^2=0$

$169a^2-144a^2=25a^2$

$(b-9a)(b-4a)=0$

$b=4a$

1)

$9a^2+16a^2=90$

$25a^2=90$

2) $b=9a$

$9a^2+81a^2=90$

$a^2=1$

$a=\pm 1$

$a=\frac{\sqrt{90}}{5}$

$a=\pm\frac{\sqrt{90}}{5}$ $\qquad b\ \frac{4\sqrt{90}}{5}$

$a=-\frac{\sqrt{90}}{5}$

$b=-\frac{4\sqrt{90}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases}(25-z)\cancel{z}=(60+y)y \\ \dfrac{y}{13-z}=5 \Rightarrow y=65-5z\end{cases}$$

$tg\beta=\dfrac{25-z}{y}$

$$25z-z^2=(125-5z)(65-5z)$$

$$\frac{25-z}{y}=\frac{60+y}{z}$$

~~25z~~

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=[p/4]$

$4\le x\le 28,\ 4\le y\le 28$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(0)=2f(0)$

$f(0)=0$

$\boxed{f(x)=0}$

$f(a)=\cancel{a+c}\ ca$

$\left[\frac{2}{3};2\right]$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

$$-\frac{6x-8}{3x-2}=-\frac{2(3x-2)-4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$$

$\frac{18\cdot4}{9}-\frac{51\cdot2}{3}+28=$

$18\cdot4-102+28=$

72

$\underbrace{18+28}_{46}-51=$ $\quad =2\cdot4-34+28=$

8 36

~~$ax+b=-5$~~

$a+b=-5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)