МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ:

$x^2+6x>0$

$\Rightarrow \cancel{(x^2+6x)=x^2+6x}$

$x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$t=x^2+6x$

$3^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}-t$

$t^{\log_4 5}=5^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}-t$

$z=\log_4 t$

$t=4^z>0$

$3^z\geq 5^z-4^z$

$\cancel{3^z\geq 4^z}$ $3^z+4^z\geq 5^z$

$z=2$ – корень уравнения

$3^z+4^z=5^z$

$3^2+4^2=5^2$

Докажем, что других корней нет

☐ черновик ☑ чистовик

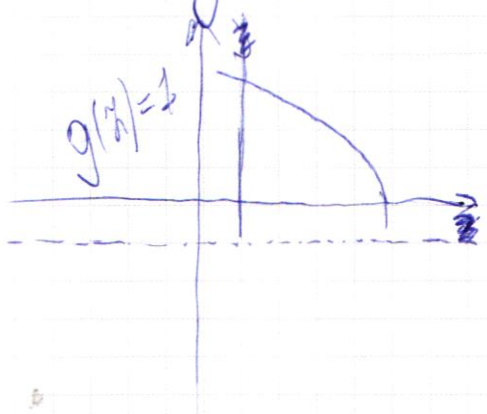
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ – убывает (так как $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ убывают)

~~$g(x) = (x = 1)$~~ $g(x) = 1$ – постоянная



Корень $x = 2$ – единственный корень

Решим неравенство

$-\frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4 \cdot 2} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$3^x + 4^x - 5^x \geq 0$

~~Св~~ Решим обобщенным методом интервалов

$+$ на $(0; 2)$, $-$ после 2

$0 < x \leq 2$

$0 < \log_4 t \leq 2$

$1 < t \leq 16$

$1 < x^2 + 6x \leq 16$

а) $x^2 + 6x - 16 \leq 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -8 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$

$+ \quad -8 \quad - \quad 2 \quad +$

б) $x^2 + 6x > 1$

$x^2 + 6x - 1 > 0$

$D = 36 + 4 = 40$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$

$x_2 = -3 -$

$-3-\sqrt{10} \qquad -3+\sqrt{10}$

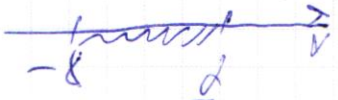
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

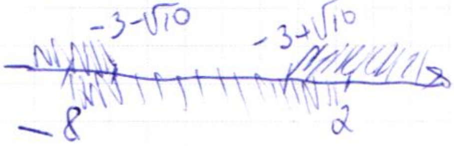
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$-3-\sqrt{10} > -8$

$\sqrt{10} < 5$

$10 < 25$

$\sqrt{10}-3 < 2$

$\sqrt{10} < 5$

$10 < 25$

$x \in [-8; -3-\sqrt{10}) \cup (-3+\sqrt{10}; 2]$

Ответ: $[-8; -3-\sqrt{10}) \cup (-3+\sqrt{10}; 2]$

Дано: №1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta$
$= -\frac{8}{17}$ ~~$\cos 2\beta$~~

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $tg\alpha = t$

$\frac{8t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$

$-1-t^2 = 8t+1-t^2$

$8t=-2$

$t=-\frac{1}{4}$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -1$

$\frac{8t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$

$8t - 1 + t^2 = -1 - t^2$

$2t^2 + 8t = 0$

$2t(t+4)=0$

$t=0$ $t=-4$

$tg\alpha = 0$ $tg\alpha = -4$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2yx=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$3x^2-6x=3(x^2-2x+1-1)=3(x-1)^2-3$$

$$3y^2-4y=\cancel{3(3y^2}\ 3\left(y^2-2y\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

$$3x^2-6x+3y^2-4y=3\cdot(x-1)^2-3+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=4$$

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=7+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$\cancel{(x-1)}$ $a=x-1 \Rightarrow x=a+1$

$b=y-\frac{2}{3} \Rightarrow y=b+\frac{2}{3}$

$xy=(a+1)\left(b+\frac{2}{3}\right)=a\cdot b+b+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}$

$\cancel{3x^2-2x}$ $3xy-2x-3y+2=3ab+3b+2a+2-2(a+1)-3\left(b+\frac{2}{3}\right)+2=3ab+3b+2a+2-\cancel{3b}-2a-2-3b-2+2=3ab$

$\cancel{-2\cdot(a+1)}$

$\cancel{3y+2x=}$

$$3y-2x=3\left(b+\frac{2}{3}\right)-2(a+1)=3b-2a$$

$$\begin{cases} \cancel{b}(3b-2a)=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \\ 3b\geq 2a \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b > 2a \\ \cancel{a+b>0}\ ab \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b^2+4a^2-12ab=3ab \\ \cancel{9b^2+9}\ 9a^2+9b^2=25 \\ 3b>2a \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

$9b^2+4a^2-15ab=0 \quad |:b^2$

$4\left(\frac{a}{b}\right)^2-15\cdot\left(\frac{a}{b}\right)+9=0$

$t=\frac{a}{b}$

$4t^2-15t+9=0$

$t_{12}=\frac{15\pm 9}{8} \quad t_1=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$t_2=3$

а) Пусть $t=3$

Из этого следует

$\frac{a}{b}=3 \Rightarrow a=3b$

$9b^2+b^2=\frac{25}{9}$

$90b^2=25$

$b^2=\frac{25}{90}$

$b=\pm\frac{5}{3\sqrt{10}}$

$a=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}$

б) Пусть $t=\frac{3}{4}$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}b$

$a^2+b^2=\left(\frac{3}{4}b\right)^2+b^2=\frac{9}{16}b^2+b^2=$

$=\frac{25b^2}{16}=\frac{25}{9}$

$b^2=\frac{16}{9}$

$b=\pm\frac{4}{3}$

$a=\pm 1$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть $a_1 = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$b_1 = \frac{5}{3\sqrt{10}}$

$3b = \frac{5}{\sqrt{10}} \geq 2a = \frac{10}{\sqrt{10}}$ — неверно

~~Пу.~~ Пусть $a = -\frac{5}{\sqrt{10}}$

$\cancel{a_2 = \frac{5}{\sqrt{10}}}$

$b_2 = \frac{-5}{3\sqrt{10}}$

$3b = -\frac{5}{\sqrt{10}} \geq 2a = -\frac{10}{\sqrt{10}}$ — верно

$$\begin{cases} x-1 = -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; ~~$x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; $y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{2}$~~)

$x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; $y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$x = 2$; $y = 2$

Пусть $a = 1$

$b = \frac{4}{3}$

$3b = 4 \geq 2a = 2$ — верно

~~Пусть $a = -1$~~

$$b = \begin{cases} x-1 = 1 \\ y - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Пусть $a = -1$

$b = -\frac{4}{3}$

$3b = -4 \geq 2a = -2$ — неверно

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$y = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$y-2 = \frac{1}{2(x-1)}$$

$x_1 = x-1$ $\quad x = x_1+1 \quad x \in (1;3]$

$y = y_1 + 2$; $y = y_1+2 \quad x \in (0;2]$

$x = 1+1 \quad x(1) = 2;3$

$y = y_1 + 2 = a(x_1+1)+b$

$y(1) =$

$y_1 = ax_1 + a + b - 2$

$$\begin{cases} a+b-2 = b_1 \\ a = a_1 \end{cases}$$

$$8x^2-34x+30 = 8(x_1+1)^2 - 34(x_1+1)+30 = 8x^2 - 18x_1 + 4$$

$$\frac{1}{2x_1} \geq a_1x_1 + b_1 \geq 8x_1^2 - 18x_1 + 4$$

для всех $x \in (0;2]$

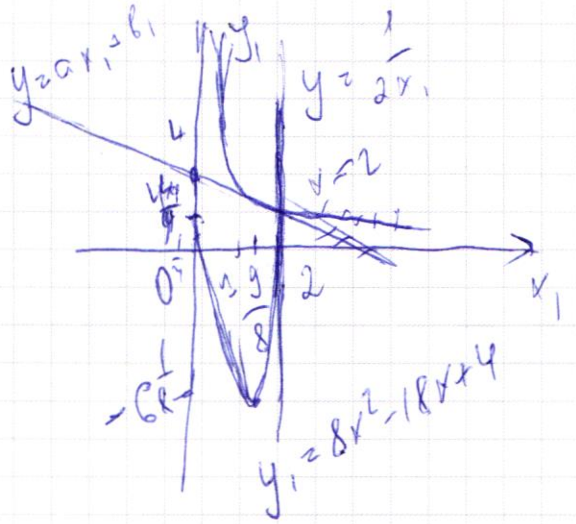
$16x_1 - 18 = 0$ $\left(x_0 = \frac{9}{8};\ y_0 = -6\frac{1}{8}\right)$

$x := x_1 \quad x = x_1 \quad y = y_1 \quad y : y = y_1$

$f(x) = 8x^2 - 18x + 4$

$f(0) = 4$

$f(2) = 0$



Очевидно, что $b_1 \geq 4$

~~Функция b_1~~ Фиксируем b_1 — найдем пересечение с прямой

$y = a_1 x + b_1$

$x = 2$

$y = 2a_1 + b_1$

$0 \leq y_1 \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} 0 \leq 2a_1 + b_1 \leq \frac{1}{4} \\ 4 \leq b_1 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Пусть эти условия выполнены

Пусть b_1 — фиксированно

Предельное положение прямой

$y = a_1 x + b_1$, когда она касается гиперболы

$y = \frac{1}{2x}$, $x \in (0; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\cos 2\alpha \sin^2\beta \cos 2\beta =$

$\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha(\cos 4\beta + \cos 2\alpha + 1)$

$+\sin 2\alpha$ $\quad (x^2+6x)^{\log_4 c}$

~~$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 4\beta \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$~~

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos^2 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad l$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta$ $\quad a^{\log_b a}$

$\sin 2\alpha(\cancel{\cos 4\beta}\ 2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cos 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta$

$2\cos 2\beta(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta) = -\frac{8}{17}$ $\quad a^{\log_b c}$

$\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}}$

$c^{\log_a b}$ $\quad \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\log_a c^{\log_a b} =$ $\quad \sin 2\alpha(2\cos 2\beta(2\cos 2\beta + \cos 2\alpha)) = -\frac{8}{17}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$ $\quad 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$9y^2 - 3y(5x-1) + 2(2x^2+x-1) = 0$

$\begin{cases} 3(\cancel{x^2 - 2x}) - 2(3x + 2y) \end{cases}$ $\quad 3y(3y - (5x-1) + 2(2x^2+x-1) = 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_3 5} - x^2$ $\quad$ ОДЗ: $x^2+6x > 0$

$x(x+6) > 0$

$3 \quad 3(x^2-2x+1) - 3 = \cancel{3x^2 - 6x + 3} - 3$

$-6 \quad 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

y_1 y_2

$x \in$ ~~(0, 2]~~

a, x_1

$a_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right]$

$$\begin{cases} a_1 \le -\frac{1}{8} \\ b_1 \ge 4 \\ 0 \le 2a_1 + b_1 \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

Получим условие

$$\begin{cases} a_1 \le -\frac{1}{8} \\ a_1 + b_1 - 2 \ge 4 \\ 0 \le 2a_1 + a_1 + b_1 - 2 \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le -\frac{1}{8} \\ a + b \ge 6 \\ 3a + b \le 2\frac{1}{4} \\ 3a + b \ge 2 \end{cases}$$

$a = -\frac{1}{8}$

$a + b = 6$

$2a + b = 2\frac{1}{4}$

$2a + b = 2$

Ответ: все пары $a; b$ удовлетворяющие системе неравенства