МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \ (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \ (2) \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} 3y \geq 2x \\ 3xy-2x-3y+2 \geq 0. \end{cases}$

Рассмотрим ур-ние (1):

$3y-2-2x+2=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

Пусть $3y-2=a$, $x-1=b$. Тогда:

$(a-2b)^2=(\sqrt{ab})^2 \Rightarrow (a-2b)^2=ab$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-ab+4b^2-4ab=0.$

$a(a-b)-4b(a-b)=0$

$(a-b)(a-4b)=0.$

① $a=b$

$3y-2=x-1$

$3y=x+1$

② $a=4b$

$3y-2=4x-4$

$3y=4x-2$

Подставим в ур-ние (2):

I) $x=3y-1$

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0.$

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0$

$30y^2-40y+5=0 \mid :5$

$6y^2-8y+1=0$

$D=64-24=40$

$y_{1,2}=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}$

$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}.$

Пара $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{6}; \frac{2+\sqrt{10}}{6}\right)$ – не удовл. ОДЗ.

II) $3y=4x-2.$

$3x^2+\frac{(4x-2)^2}{3}-6x-\frac{4(4x-2)}{3}-4=0$

$9x^2+(4x-2)^2-18x-4(4x-2)-12=0$

$9x^2+16x^2-16x+4-18x-16x+8-12=0.$

$25x^2-50x=0$

$25x(x-2)=0$

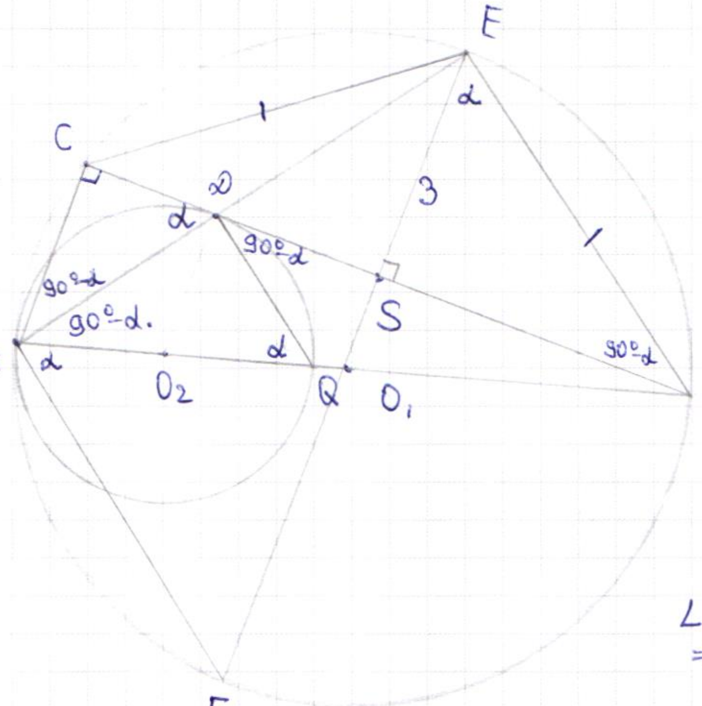
$x=0$ $\quad$ $x=2$

$y=-\frac{2}{3}$ – не уд. ОДЗ. $\quad$ $y=2.$

Ответ: $(2;2)$, $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

④



Решение.

1) Пусть $\angle FEB = \alpha$, тогда $\angle FAB = \alpha$ как опир. на одну дугу; $BC \perp EF$ по условию $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CBE = \angle CAE = 90° - \alpha$ (как опир. на одну дугу CE).
AB – диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90°$
По т. об угле между хордой и касат. $\angle CDA = \angle ADQ$ ... $= \alpha$ (Q – пересечение AB и ω).
Заметим, что A и центры окружностей – на одной прямой $\Rightarrow \angle ADQ = 90°$ т.к. AQ – диаметр ω $\Rightarrow \angle DAQ = 90° - \angle DQA = 90° - \alpha$.
$\angle FAE = \angle FAB + \angle EAB = \alpha + 90° - \alpha = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ EF – диаметр Ω.

2) $\angle CAE = \angle EAB = 90° - \alpha \Rightarrow$ AE – биссектриса $\angle CAB \Rightarrow CE = EB$ по лемме о трезубце. $\Rightarrow$ BF – сер. пер. к BC. Пусть EF пересек. BC в т. S, тогда $BS = SC = \frac{BC}{2} = \frac{BD + CD}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \frac{5}{2}$, $DS = 2$, $BS = \frac{9}{2}$. AB – диаметр $\Rightarrow \angle AEB = 90°$. По т. о ср. геом в прямоуг. Δ $ES^2 = DS \cdot BS = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9 \Rightarrow ES = 3$

Пусть центр Ω – O_1, центр ω – O_2, радиус ω – r, Ω – R. Тогда $EO_1 = R$, $O_1S = R - 3$, $BO_1 = R$, $BS = \frac{9}{2}$. По т. Пифагора в ΔBSO_1:

$$R^2 = (R-3)^2 + BS^2$$

$BS^2 + O_1S^2 = BO_1^2 \Rightarrow$ [illegible] $R = \frac{39}{8}$

$(R - R + 3)(R + R - 3) = \frac{81}{4}$

$2R - 3 = \frac{27}{4}$

$R = \frac{39}{8}$

2) По т. о секущей и касат. $BD^2 = BQ \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ [illegible]

$BD^2 = 2R(2R - 2r)$

$\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = R^2 - Rr$

$Rr = \left(R - \frac{BD}{2}\right)\left(R + \frac{BD}{2}\right)$

[illegible]

$BD^2 = 2R(2R - 2r) \mid :4$

$\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = R^2 - Rr \Rightarrow Rr = \left(R - \frac{BD}{2}\right)\left(R + \frac{BD}{2}\right)$

$\frac{39}{4} r = \left(\frac{39}{4} - \frac{13}{4}\right)\left(\frac{39}{4} + \frac{13}{4}\right) = \frac{26}{4} \cdot \frac{52}{4} = \frac{13}{2} \cdot 13$

$r = \frac{13^2 \cdot 4^2}{2 \cdot 39} = \frac{13 \cdot 2}{3} = \frac{26}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) Продолжение.

$$Rr = \left(R - \frac{BD}{2}\right)\left(R + \frac{BD}{2}\right)$$

$$Rr = \left(\frac{39}{8} - \frac{26}{8}\right)\left(\frac{39}{8} + \frac{26}{8}\right)$$

$$\frac{39}{8} r = \frac{13}{8} \cdot \frac{65}{8} \quad \Big| \cdot \frac{8}{39}$$

$$r = \frac{13 \cdot 65}{8 \cdot 39} = \frac{65}{3 \cdot 8} = \frac{65}{24}$$

По т. об отрезках хорд $AD \cdot DE = CD \cdot BD$ (1)

Рассмотрим $\triangle ADQ$ и $\triangle AEB$

$\angle EAB$ - общий
$\angle ADQ = \angle AEB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle ADQ \sim \triangle AEB$ по двум углам. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AQ}{AB} = \frac{r}{R} = \frac{65 \cdot 8}{24 \cdot 39} = \frac{5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}$$. Подставим в (1):

$$\frac{r}{R} AE\left(AE - \frac{r}{R} AE\right) = \frac{65}{4}.$$

$$\frac{5}{9} AE^2\left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{65}{4}$$

$$AE^2 = \frac{65 \cdot 9 \cdot 9}{4 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{13 \cdot 9}{4^2}$$

$$AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$$

$$\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{9\sqrt{13}}{4 \cdot \frac{39}{4}} = \frac{9}{3\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\angle AEF = \cos\angle AFE = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF}{2} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{39 \cdot 9}{16} = \frac{351}{16}.$$

Ответ: $r_\omega = \frac{65}{24}$, $R_\Omega = \frac{39}{8}$
$\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$, $S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$= -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{8}{17\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

① $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta = 2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}\right) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos\alpha =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$.

$tg\,\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \sin(\alpha+2\beta) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = 0$.

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} - \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{8}{17}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot 17\sqrt{17}$

$-32 + 17\cos 2\alpha = -17$.

$\cos 2\alpha = \frac{15}{17}$.

$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\frac{8}{15}$.

② $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta = 2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\right) = 2\sin\alpha\cos(\alpha+2\beta)$

$= 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$ или $\cos(\alpha+2\beta) = 0$.

① $\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$.

② $\cos(\alpha+2\beta) = 0 \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = 0$.

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} - \underset{0}{\sin(2\alpha+4\beta)} = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot 17\sqrt{17}$.

$-32 - 17\cos 2\alpha = -17$

$17\cos 2\alpha = -15$

$\cos 2\alpha = -\frac{15}{17}$.

$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{8}{15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) Продолжение. По т. об отрезках хорд $AD \cdot DE = CD \cdot BD$ (1)

Рассмотрим $\triangle ADQ$ и $\triangle AEB$.

$\angle EAB$ - общий
$\angle ADQ = \angle AEB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle ADQ \sim \triangle AEB$ по двум углам. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AQ}{AB} = \frac{r}{R} \Rightarrow AD = \frac{r \cdot AE}{R}$. Подставим в (1):

$\frac{r}{R} \cdot AE \left(AE - \frac{r}{R} \cdot AE\right) = \frac{65}{4}$.

$AE^2 \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{65}{4} \Rightarrow AE^2 = \frac{65}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9}$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{\sqrt{130}}{9 \cdot \frac{39}{2}} = \frac{2\sqrt{130}}{9 \cdot 139} = \frac{2\sqrt{10}}{27\sqrt{13}}$ $AE = \frac{\sqrt{130}}{9}$

27
$+8$
35

8
39
$+9$
351

$3y - 2 = x - 1$

$3y = x + 1$

$Rr =$

$x = 3y - 1$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x$.

$3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1)$

$-4y = 4$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$

$3(9y^2 - 6y + 1) + 3y^2 - 18y + 6 - 4y - 4 = 0$

$\log_t 2 =$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$

$\frac{3 \cdot (4 - \sqrt{10})}{6} = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

$6y^2 - 8y + 1 = 0$.

$D = 64 - 24 = 40$

$y_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{12} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$

$9 - 3\sqrt{10} + 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$-6 + 3\sqrt{10} -$

$3\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{4 - \sqrt{10}}{6}\right)$

$-6\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right) - 4\left(\frac{4 - \sqrt{10}}{6}\right) = 4$.

$\frac{36 - 12\sqrt{10}}{4} + \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$

$3\left(\frac{12 - 4\sqrt{10}}{4}\right) + \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

$x + 1 \geq 2x$

$-6 + 3\sqrt{10} - \frac{16 - 4\sqrt{10}}{6} = 4$

$-6 + 3\sqrt{10} - \frac{-16 + 4\sqrt{10}}{6} =$

$x \leq 1$

① $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$=-\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \dfrac{-\frac{8}{17}\cdot(-\sqrt{17})}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

① $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta = 2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}\right) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \sin(\alpha+2\beta)=0$.

$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=0$.

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}-0=-\frac{8}{17}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\beta\cos 2\beta$~~

~~$\sin(\alpha+2\beta) + \sin\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = 0$.~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \mid \cdot 17\sqrt{17}$

$-32+17\cos 2\alpha = -17$.

$17\cos 2\alpha = 15$

$\cos 2\alpha = \frac{15}{17}$.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{8}{15} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$

$-8\operatorname{tg}^2\alpha+8 = 30\operatorname{tg}^2\alpha$

$4\operatorname{tg}^2\alpha+15\operatorname{tg}^2\alpha-8=0$

$\operatorname{tg} 2\alpha =$

sin

$D=225+2\cdot 8^2 = 225+64=289$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

~~$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15+17}{8}$ ... $4, \frac{1}{4}$~~

$\operatorname{tg} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$=$ ~~$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{}\right)$~~

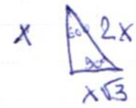
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$= \dfrac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{2}{-\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$= \sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta - \sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}$.

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\alpha$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$Rr = \left(\frac{93}{8} - \frac{26}{8}\right)\left(\frac{93+26}{8}\right)$

$\frac{93}{8} r = \left(\frac{57}{8} \cdot \frac{119}{8}\right)$

$r = \frac{57 \cdot 119}{93 \cdot 8} = \frac{57 \cdot 119}{2^3 \cdot 3 \cdot 31} = \frac{19 \cdot 119}{8 \cdot 31}$

$\frac{169}{4}$

$R^2 = (R-3)^2 + BS^2$

$3 \cdot (2R - 3) = \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$2R - 3 = \frac{81}{4}$

$\frac{27+12}{4} = 3$

$Rr = \left(\frac{39}{4} - \frac{13}{4}\right)\left(\frac{39}{4} + \frac{13}{4}\right) = \frac{26}{4} \cdot \frac{42}{4}$

$\frac{39}{4} R = \frac{13}{2} \cdot \frac{21}{2}$

$39r = 13 \cdot 21$

$r = 7.$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD = \frac{r \cdot AE}{R}$

$AD \cdot (AE - AD) = \frac{65}{4}$

$\frac{r}{R}\left(AE - \frac{r}{R} AE\right) = \frac{65}{4}$

$AE = 65$

$2\sin(2\alpha)\cos 2\beta$

$\frac{r}{R} = \frac{26 \cdot 4}{3 \cdot 39} = \frac{8}{9}$

$AE \cdot \frac{r}{R}\left(\frac{R-r}{R}\right) = \frac{65}{4} =$

$\frac{13}{2}$

$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha - 1} = -\frac{8}{15}$

$2t = -\frac{8}{15}t^2 + \frac{8}{15}$

$30t = -8t^2 + 8$

$\sqrt{\frac{39^2}{4^2} - \frac{130}{9^2}} = \sqrt{\left(\frac{39}{4} - \frac{130}{9}\right)\left(\frac{39}{4} + \right.}$

$4t^2 + 15t - 8 = 0$

$D = 225 + 16 \cdot 8 = 289$

$tg\alpha = \frac{-15 \pm 17}{8}$

$27 + 12 = 39$

$\frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{39 \cdot 9}{16}$

$225 + 128 = 352$

$(R-3)^2 + \frac{81}{4} = R^2$

$\frac{81}{4} = 3 \cdot (2R - 3)$

$\frac{27}{4} = 2R - 3$

$\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = R^2 - Rr$

$\sin\angle AFE$

$Rr = \left(R - \frac{BD}{2}\right)\left(R + \frac{BD}{2}\right)$

$\frac{39}{8} = R$

$= \left(\frac{39}{8} - \frac{26}{8}\right)\left(\frac{39}{8} + \frac{26}{8}\right) = \frac{13}{8} \cdot \frac{65}{8} = \frac{39}{8} r \mid : \frac{39}{8}$

$\frac{13 \cdot 65}{8 \cdot 39} = \frac{65}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24}$

$\frac{65}{24 \cdot \frac{39}{8}} = \frac{65}{39 \cdot 3} = \frac{5}{9}$

$\frac{13}{4} = \frac{26}{8}$

$\frac{r}{R} AE\left(AE - \frac{r}{R} AE\right) = \frac{65}{4}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$AE^2 = \frac{9^2}{4^2} \cdot 13 \Rightarrow AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

$AE^2 = \frac{65}{4} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{4}$

$AD = \frac{r}{R} \cdot AE.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$30tg\alpha = 8 - 8tg^2\alpha$~~

~~$8tg^2\alpha + 30tg\alpha - 8 = 0 \,|:2$~~

~~$4tg^2\alpha + 15tg\alpha - 4 = 0.$~~

I) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\frac{8}{15}$

$30tg^2\alpha = -8 + 8tg^2\alpha.$

$8tg^2\alpha - 30tg\alpha - 8 = 0 \,|:2$

$4tg^2\alpha - 15tg\alpha - 4 = 0$

$D = 225 + 4^3 = 225 + 64 = 289$

$tg\alpha = \frac{15 \pm 17}{8} = 4; -\frac{1}{4}.$

II) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{8}{15}$

$30tg\alpha = 8 - 8tg^2\alpha$

$4tg^2\alpha + 15tg^2\alpha - 4 = 0$

$D = 225 + 4^3 = 225 + 64 = 289$

$tg\alpha = \frac{-15 \pm 17}{8} = -4; \frac{1}{4}.$

Ответ: $tg\alpha = \pm\frac{1}{4}; \pm 4; 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

~~$3x^2-6x+$~~

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x^2-6x+(3y^2-4y-4)=0$

$D=36-12(3y^2-4y-4)=36-36y^2+48y+48=-36y^2+48y$

$3y^2-4y+(3x^2-6x-4)=0$

$D=16-12(3x^2-6x-4)=$

$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2.$

$$\begin{cases}(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)\\ 3x^2-6x+3+3y^2-4y+\ldots=7.\end{cases}\Rightarrow$$

$3(x-1)^2+$

$3y^2-4y$

~~$(3y-2)(y-1)$~~

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0.$ ~~$3y^2-3y-2y+2$~~

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha+\sin(2\alpha+4\beta)=$

$=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}.$

$\cos 2\beta=\frac{8}{17}\cdot\sqrt{17}=\frac{8}{\sqrt{17}}.$

$3x^2-6x+3+3y^2-$

$R^2+F(R-3)^2+\frac{81}{4}$

$tg\alpha=$

$(R-R+3)(2R-3)=\frac{81}{4}\Rightarrow 2R-3=\frac{81}{4}\Rightarrow 2R=\frac{81+12}{4}=\frac{93}{8}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2.$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}.$

$(3y-2)$

$y=\frac{2}{3}$

$3\cdot\frac{4}{9}-4\cdot\frac{2}{3}+n=0$

$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+n=0.$

$n-\frac{4}{3}=0$

$4n-3=0.$

~~$3y^2-4y+7$~~

~~$=3y^2-3-4y^2+4$~~

~~$=3(y-1)(y+1)$~~

~~$-4(y-1)(y+1)$~~

$r=\frac{2\cdot 39^2-13^2\cdot 2^3}{78}=\frac{2\cdot 13(9\cdot 13-13\cdot 4)}{78}=\frac{9\cdot 13-13\cdot 4}{3}$

$78\,|\,\frac{26}{3}$

$\frac{AB}{AD}=\frac{2r}{AD}$

$\frac{81+12}{4}=93$

$Rr=\left(R-\frac{BD}{2}\right)\left(R+\frac{BD}{2}\right)$ $Rr=\left(\frac{BD}{2}-R\right)($

$BD^2=2R(2R-2r)$

$\left(\frac{BD}{2}\right)^2=R^2-Rr$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$3y-2x+2-2=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$3y^2-4y+n=0$

$y=\frac{2}{3}$

$3\cdot\frac{4}{9}-\frac{8}{3}+n=0$

$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+n=0$

$n=\frac{4}{3}$

$9y^2-12y+4=0.$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y-2-2x+2=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$a=3y-2$

$b=x-1$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a(a-b)-4b(a-b)=0.$

$3y-2=4x-4$

$3y+2=4x-2$

$a=b.$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=25 \end{cases} \Rightarrow$$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}+2-\sqrt{10}$

$=4-\sqrt{10}+4-2\sqrt{10}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4 \mid \cdot 3$

$9x^2-18x+9y^2-12y=12$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=25$

$3x=x+1$

$\Rightarrow a^2-4ab+4b^2=ab.$

$a^2-ab+4b^2-4ab=0$

$a(a-b)+4b(a-b)=0.$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$

$\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2\right)=\frac{10}{4}=5.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha= 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}.$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$27y^2-12y+3+3y^2-18y+6-4y-4=0.$

$\cos 2\beta=\frac{+8\cdot\sqrt{17}}{17\cdot 2}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$

$$\begin{cases} 3y=\sqrt{2-3y} \\ 3y^2-4y-4=0 \end{cases}$$

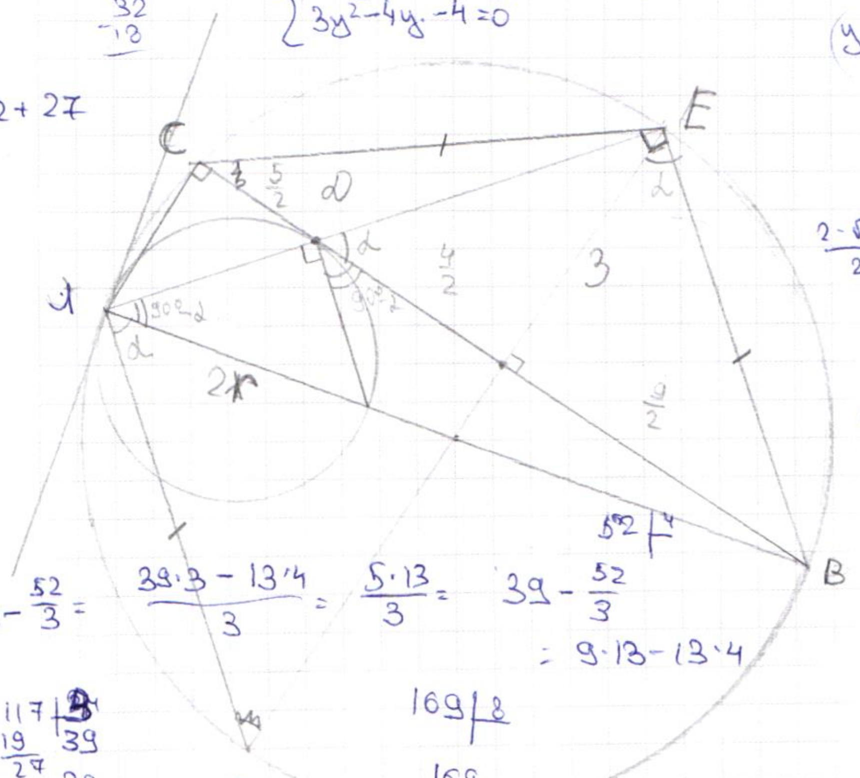
$30y^2-40y+5=$

$\left(y=-\frac{2}{3}\right)$

$2=\sqrt{3\cdot4-4-6+2}$

32
-13

$12+27$



$3\cdot4+3\cdot4-12-8=$

$=24-20=4.$

$\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{9+\frac{81}{4}}=\sqrt{\frac{36+81}{4}}=\sqrt{\frac{117}{4}}=\frac{\sqrt{117}}{2}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}+2\sqrt{10}-2$ $3\cdot\frac{4-\sqrt{10}}{6}\geq 2\cdot\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$=\frac{4-\sqrt{10}+2\sqrt{10}-4}{2}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}\geq\frac{4-2\sqrt{10}}{2}$

$2r\left(2R-2r\right)=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$39-\frac{52}{3}=\frac{39\cdot3-13\cdot4}{3}=\frac{5\cdot13}{3}=$ $39-\frac{52}{3}$

$=9\cdot13-13\cdot4$

$3\cdot\left(\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)\geq 2\cdot\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}\geq 2-\sqrt{10}$

$4-\sqrt{10}\geq 4-2\sqrt{10}$

$0\geq-\sqrt{10}.$

$117 \mid 3$
$-19 \quad 39$
27

$\frac{39}{8}$

$169 \mid 8$

$\frac{168}{8}$

$(3-R)^2+\frac{81}{4}=R^2$

$9\cdot4-24R+4R^2+81=R^2$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2}\geq 2+\sqrt{10}$

$4+\sqrt{10}\geq 4+2\sqrt{10}.$

$\frac{13^2\cdot2^3}{2\cdot3+3}=\frac{13\cdot4}{3}=$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)