МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 & \text{1 уравнение} \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 & \text{2 уравнение} \end{cases}$

вычтем из первого уравнения второе:

$x-8y=124+92=216$

$x=216+8y$

Рассмотрим первое уравнение.

$x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124$

$x-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=124$

$x-8y=216 \qquad 8y-x=-216$

~~$x=124+$~~

$x+6\sqrt[3]{8y+x}=124$

$8y+216+6\sqrt[3]{16y+216}=124$

$8y+216+12\sqrt[3]{2y+27}=124 \quad |:4$

$2y+54+3\sqrt[3]{2y+27}=31$

$2y+27+27+3\sqrt[3]{2y+27}=31$

$2y+27+3\sqrt[3]{2y+27}=4$

$\sqrt[3]{2y+27}=t$

$t^3+3t=4$

$t^3+3t-4=0$

$t^3+3t-4=0$

$t^3-1+3t-3=0$

$(t-1)(t^2+t+1)+3(t-1)=0$

$(t-1)(t^2+t+4)=0$

1) $t=1$

$\sqrt[3]{2y+27}=1$

$2y+27=1$

$2y=-26$

$y=-13$

$x=216+8y=216-8\cdot13=112$

2) $t^2+t+4=0$

$D=\cancel{1-16}$

$D<0$ решений нет

ответ: $x=112$

$y=-13$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2 $\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \le 3\log_{2x} \frac{1}{x}$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le \log_{2x} \frac{1}{x}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_{2x^3} x \ge 0 \\ \log_{2x} \frac{1}{x} \ge 0 \\ x > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ 2x \ne 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\lg x - \lg 1}{\lg 2x^3 - 1} \ge 0 \\ \frac{\lg \frac{1}{x} - \lg 1}{\lg 2x - \lg 1} \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2x^3-1} \ge 0 \\ \frac{\frac{1}{x}-1}{2x-1} \ge 0 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \ge 0 \\ \frac{\frac{1-x}{x}}{2x-1} \ge 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \ge 0 \\ \frac{x-1}{2x-1} \le 0 \\ x > 0 \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \cup \{1\}$

1) $\log_{2x^3} x \neq 0$ $\qquad x \neq 1$

$$\log_{2x^3} x \le \log^2_{2x} x$$

$$\frac{1}{\log_x(2x^3)} \le \log^2_{2x} x = \frac{1}{\log^2_x 2x}$$

$$\frac{1}{\log_x 2+\log_x x^3} \le \frac{1}{(\log_x 2+\log_x x)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 2+3} \le \frac{1}{(\log_x 2+1)^2}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_2 x}+3} \le \frac{1}{(\frac{1}{\log_2 x}+1)^2}$$

$$\log_2 x = t$$

$$\frac{1}{\frac{1}{t}+3} \le \frac{1}{(\frac{1}{t}+1)^2}$$

$$\frac{t}{3t+1} \le \frac{t^2}{1+t^2+2t} = \frac{t^2}{(t+1)^2}$$

$$\frac{t^2(3t+1)-t(t+1)^2}{(3t+1)(t+1)^2} \ge 0$$

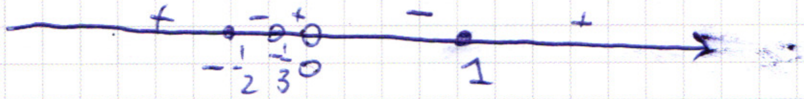
$$\frac{3t^3+t^2-t(t^2+2t+1)}{3t+1} \ge 0$$

$$\frac{3t^3+t^2-t^3-2t^2-t}{3t+1} \ge 0$$

$$\frac{t(2t^2-t-1)}{3t+1} \ge 0 \qquad \frac{t(t-1)(t+\frac{1}{2})}{3t+1} \ge 0$$

$t \neq 0$

N 2



$$t \in (-\infty; -\tfrac{1}{2}] \cup (-\tfrac{1}{3}; 0) \cup [1; +\infty)$$

$$\log_2 x \leq -\tfrac{1}{2} = \log_2 \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\tfrac{1}{3} < \log_2 x < 0$$

$$\log_2 2^{-\frac{1}{3}} < \log_2 x < \log_2 1$$

$$2^{-\frac{1}{3}} < x < 1$$

$$\log_2 x \geq 1$$

$$x \geq 2$$

Но с учетом ОДЗ:

$$x \in (\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}]$$

2) $x = 1$

$$\sqrt{\log_2 1} \leq \log_2 1$$

$$0 \leq 0 \quad \text{V}$$

$x = 1$ подходит

ответ: $x \in (\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}] \cup \{1\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\overline{abcdefg}$ – наше семизначное число

Рассмотрим различные последовательности десяток.

1) $10, 10^2, 10^3$

$g + \overline{fg} + \overline{efg} = 12414$

Но такого быть не может, т.к. $\overline{efg} \le 999$, $\overline{fg} \le 99$, $g \le 9$

2) $10^2, 10^3, 10^4$

$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12414$

Но такого быть не может, т.к. $\overline{efg} \le 999$, $\overline{defg} \le 9999$, $\overline{fg} \le 99$

3) $10^3, 10^4, 10^5$

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414$

$10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

отсюда g находится однозначно, т.к. только он влияет на разряд единиц.

$1+1+1=3$

$2+2+2=6$

$3+3+3=9$

$4+4+4=12$

$5+5+5=15$

$6+6+6=18$

$7+7+7=21$

$8+8+8=24$

$9+9+9=27$

$0+0+0=0$

Т.к. последняя цифра это 4, то $\boxed{g=8}$

тогда

$10000c + 2000d + 300e + 30f = 12390$

$1000c + 200d + 30e + 3f = 1239$

аналогично, $\boxed{f=3}$

№3 $1000c + 200d + 30e = 1230$

$100c + 20d + 3e = 123$

$\boxed{e = 1}$

$100c + 20d = 120$

тогда здесь уже два варианта $c = 1$ $d = 1$, или $c = 0$ $d = 6$.

Тогда всего вариантов в этом случае: 9 - вариантов выбрать первую цифру, 10 - вариантов выбрать вторую, 2 - варианта выбрать третью

$9 \cdot 10 \cdot 2 = \boxed{180 \text{ случаев}}$

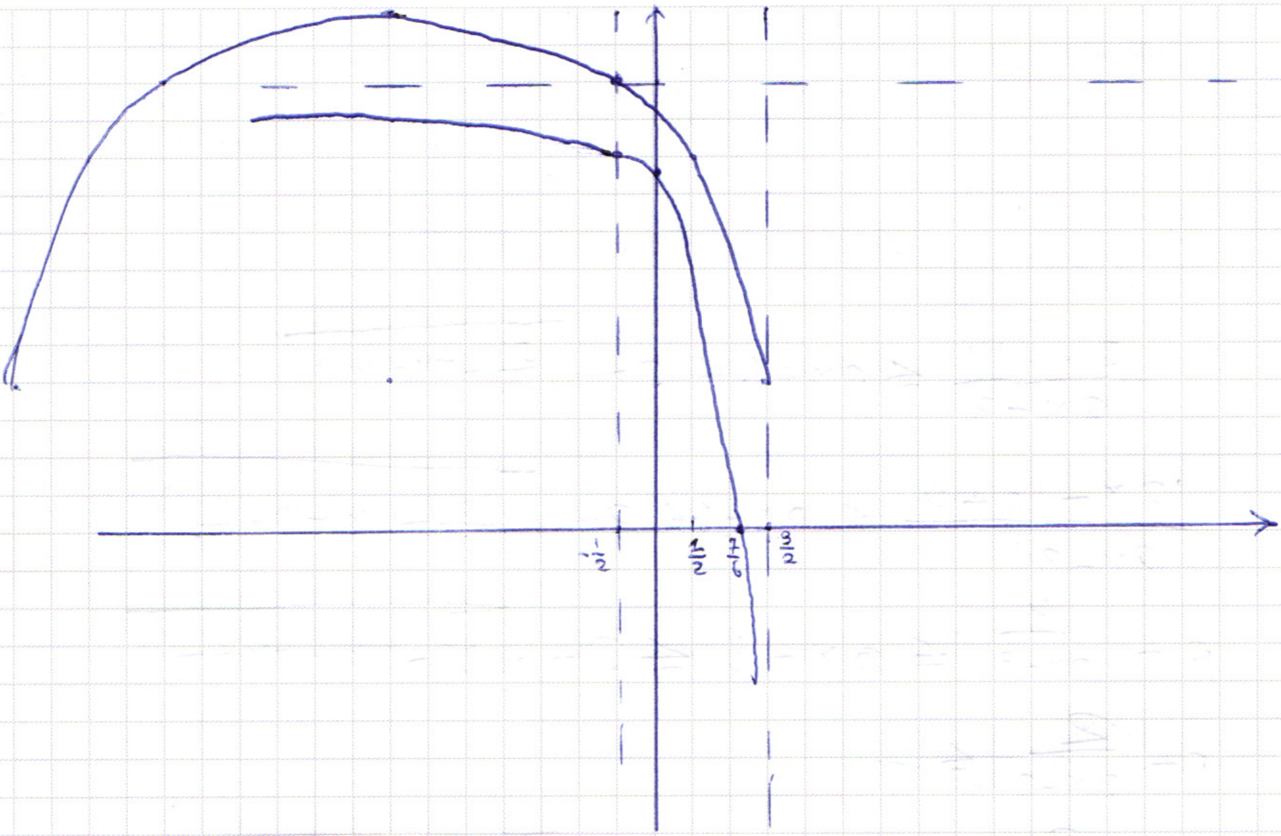
Остальные варианты рассматривать ~~от~~ смысла нет, т.к. если потом хоть ~~одна из них будет 1~~ c и d будет 1, то это не выполняется. ~~А при~~ Не будет выполнено условие.

ответ: $\boxed{180 \text{ случаев}}$

Кошечкин

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7
(Нумеровать только чистовики)



Тогда прямая должна пересекать ось абсцисс между $(\frac{7}{6}; \frac{3}{2})$, а должна пересекать ось ординат между $(\frac{14}{3}; 2+\frac{\sqrt{51}}{2})$

если тогда прямая пересекает ось абсцисс в точке x_0, где $\frac{7}{6} < x_0 < \frac{3}{2}$,

$x_0 = -\frac{b}{a}$, и пересекает ось ординат в точке y_0, где $(\frac{14}{3}; 2+\frac{\sqrt{51}}{2})$

$y_0 = +b$

$$\begin{cases} \frac{14}{3} \leq b < 2+\frac{\sqrt{51}}{2} \\ \frac{7}{6} < -\frac{b}{a} < \frac{3}{2} \\ 5 \leq -\frac{1}{2}a + b \leq 6 \end{cases} \qquad a < 0$$

~~$a\,[-4; 6]$~~

~~$b \in$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6 $\frac{12x-14}{2x-3} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$

$\frac{12x-18+4}{2x-3} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{\frac{100}{4}-(x^2+7x+\frac{49}{9})}$

$6+\frac{4}{2x-3} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{25-(x^2+7x+\frac{49}{4})}$

$\cancel{6+\frac{4}{2x-3} \leq}$

$6+\frac{2}{x-\frac{3}{2}} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{25-(x+\frac{7}{2})^2}$

$y=6+\frac{2}{x-\frac{3}{2}}$ — задает гиперболу с вертикальной асимптотой $\cancel{y=6}$ $x=\frac{3}{2}$, и горизонтальную ~~прямую~~ асимптоту $y=6$

$y=2+\sqrt{25-(x+\frac{7}{2})^2}$ — задает полуокружность с центром в точке $(-\frac{7}{2}; 2)$ с радиусом 5.

$$\frac{t^2+2t+1-t-3}{(t+1)^2(t+3)} \le 0$$

$$\frac{t^2+t-2}{(t+1)^2(t+3)} \le 0 \qquad \frac{(t+2)(t-1)}{(t+1)^2(t+3)} \le 0$$

$-\quad -3 \quad + \quad -2 \quad - \quad 1 \quad +$

$t \in (-\infty; -3) \cup [-2; 1]$ $\qquad t \in$

$$\left[\begin{array}{l} \log_x 2 < -3 \\ -2 \le \log_x 2 \le 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \log_x 2 + 3\log_x x < 0 \\ \begin{cases} \log_x \cancel{x}^{-2} \le \log_x 2 \\ \log_x x \ge \log_x 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_x 2x^3 < 0 \\ \begin{cases} \log_x \frac{x^{-2}}{2} \le 0 \\ \log_x \frac{x}{2} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\log_x 2 = -3$

$x = 2^{-\frac{1}{3}}$

$\log_x 2 \to -\infty$

$x \to 0$

$\log_x 2 = -2$

$x = 2^{-\frac{1}{2}}$

$\log_x 2 = 1$

$x = 2$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\lg 2x^3 - \lg 1}{\lg x - \lg 1} < 0 \\ \begin{cases} \frac{\lg \frac{x^{-2}}{2} - \lg \cancel{1}}{\lg x - \lg 1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$x \in (0, 2^{-\frac{1}{3}}) \cup [2^{-\frac{1}{2}}, 2]$

с учетом ОДЗ:

$(\frac{1}{2}; 2^{-\frac{1}{3}}) \cup$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 $\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

$\sqrt{9\log_{2x^3} x} \le 3\log_{2x} \frac{1}{x}$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -\log_{2x} x$

ОДЗ:

$\begin{cases} \log_{2x^3} x \ge 0 \\ \log_{2x} x \le 0 \\ x > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ 2x \ne 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\lg x - \lg 1}{\lg 2x^3 - \lg 1} \ge 0 \\ \frac{\lg x - \lg 1}{\lg 2x - \lg 1} \le 0 \\ x \ne \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x-1}{2x^3-1} \ge 0 \\ \frac{x-1}{2x-1} \le 0 \\ x \ne \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup [1; +\infty) \\ x \in (\frac{1}{2}; 1] \\ x \ne \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases}$

ОДЗ: $x \in (\frac{1}{2}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup \{1\}$

$\log_{2x^3} x \le \log^2_{2x} x$

$\frac{1}{\log_x 2x^3} \le \frac{1}{\log^2_x 2x}$

$\frac{1}{\log_x 2 + \log_x x^3} \le \frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x)^2}$

$\log_x 2 = t$

$\frac{1}{t+3} \le \frac{1}{(t+1)^2}$ $\frac{(t+1)^2 - (t+3)}{(t+1)^2(t+3)} \le 0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

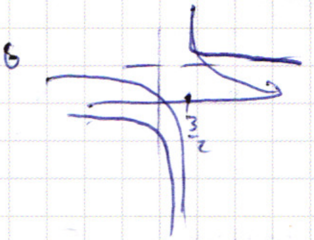
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x-14}{2x-3} = \frac{12x-18+4}{2x-3} = \frac{6(2x-3)}{2x-3} + \frac{4}{2x-3} = 6+\frac{4}{2x-3} =$$

$$= 6+\frac{2}{x-\frac{3}{2}}$$



$$2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$$

$$2\cdot\frac{7}{2}x+x^2+\frac{49}{4} = \frac{8}{4}$$

$$2+\sqrt{-\left(x^2+7x+\frac{49}{4}\right)+\frac{100}{4}} \qquad 2+\sqrt{\frac{100}{4}-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$= 2+\sqrt{25-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}$$

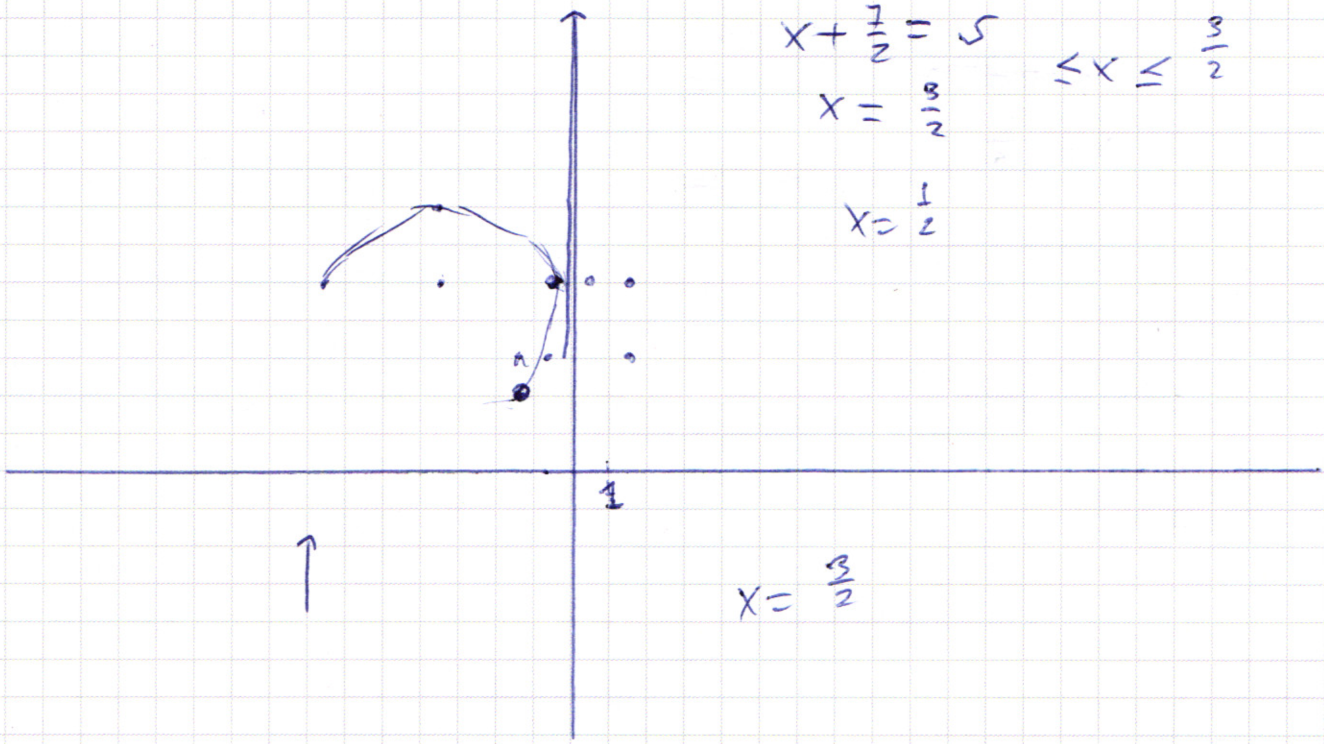
$x=\frac{1}{2}$

$x+\frac{7}{2}=4$ $\qquad y=5$

$x+\frac{7}{2}=5$ $\qquad \le x \le \frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2}$

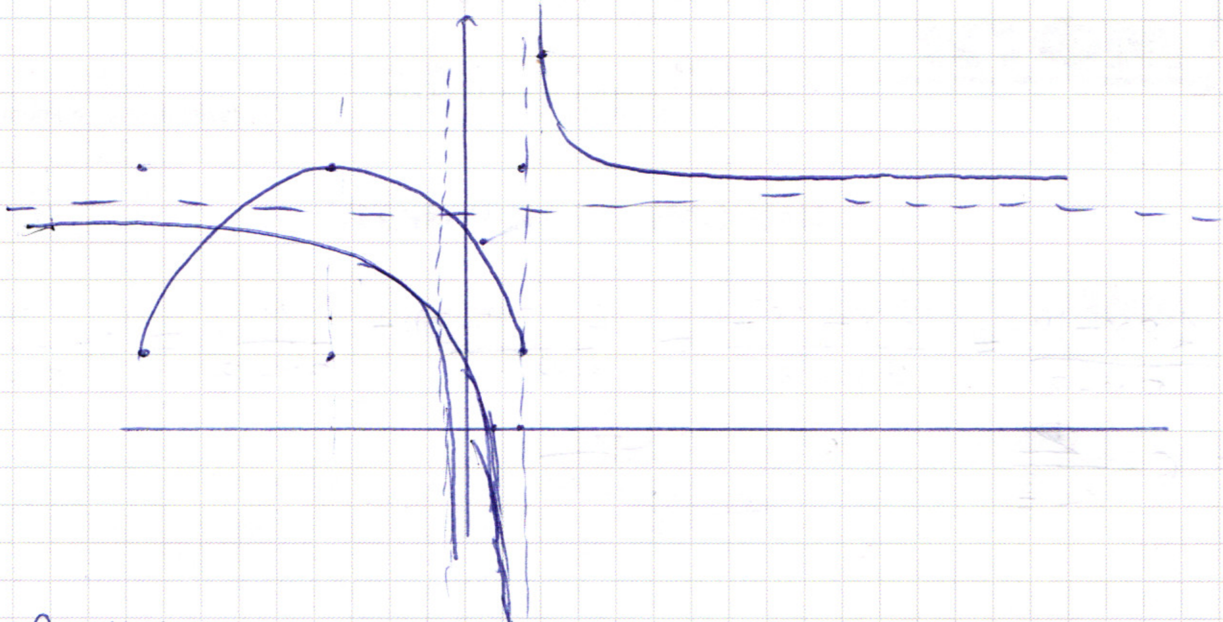
$x=\frac{1}{2}$



$x=\frac{3}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



Полуокружность с радиусом 5 и центром

$x=-\frac{7}{2}$

$2+\sqrt{25-(x+\frac{7}{2})^2}=0$

$x=\frac{1}{2}$

$25=(x+\frac{7}{2})^2$

$y=5$

$x=\frac{3}{2}$

$-\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=-\frac{10}{2}=-5$

$12x-14=0$

$x=\frac{7}{6}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№4 $\sqrt{\log_{2x^3} x^3} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\log_{2x^3} x^3 \ge 0$

$3\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -3\log_{2x} \cancel{x}$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le -\log_{2x} x$ $\qquad \sqrt{\log_2 1} \le \log_2 1$

$\log_{2x} \frac{1}{x^3} \ge 0$ $\qquad 0 \le 0$

$\cancel{\log^2_{2x}}$

$2^{-\frac{1}{3}} \cancel{>} 2^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{>} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{cases} \log_{2x^3} x \le \log^2_{2x} x \\ \log_{2x^3} x \ge 0 \\ \log_{2x} x \ge 0 \\ \cancel{\log}\ x > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \end{cases}$ $\qquad \cancel{\log}\ \lg$

$\sqrt{2} > \sqrt[3]{2}$

$2^3 \cancel{>} 2^2$

$\frac{1}{\log_x 2x^3} \le \frac{1}{\log^2_x 2x}$

$\frac{1}{\log_x 2 + \log_x x^3} \le \frac{1}{(\log_x 2 + \log_x x)^2}$

$\frac{1}{\log_x 2 + 3} \le \frac{1}{(\log_x 2 + 1)^2}$

$\log_x 2 = t$

$\frac{1}{t+3} \le \frac{1}{(t+1)^2}$ $\qquad \frac{t+3-t^2-2t-1}{(t+3)(t+1)^2} \ge 0$

$\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+3} \ge 0$ $\qquad \frac{t^2+t-2}{t+3} \le 0$

$\frac{t+3-(t+1)^2}{(t+3)(t+1)^2} \ge 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$

$x-8y=124+92=124+90+2=214+2=216$

$x=8y+216$

$\cancel{8y+216-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124}$

$36 \cdot 6 = 216$

$x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124$

$8y+216-\sqrt[3]{64y^2-64y^2-8\cdot 2\cdot 216y+216^2}$

$x-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=124$

27^2

$x+6\sqrt[3]{8y+x}=124$

$t_{1,2}=$

$\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=1;-\frac{1}{2}$

$8y+216+6\sqrt[3]{8y+8y+216}=124$

$4y+108+3\sqrt[3]{8y+8y+216}=62$

$216 : 8 = 27$

$54-31=23$

$2y+54+3\sqrt[3]{2y+27}=31$

$2y+3\sqrt[3]{2y+27}=-23$

$2y+27+3\sqrt[3]{2y+27}=\cancel{27}$

$\sqrt[3]{2y+27}=t$

$\cancel{t+3}$

$t^3+3t\cancel{8}4=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b \to \infty$

$x = -\frac{b}{a}$ 5

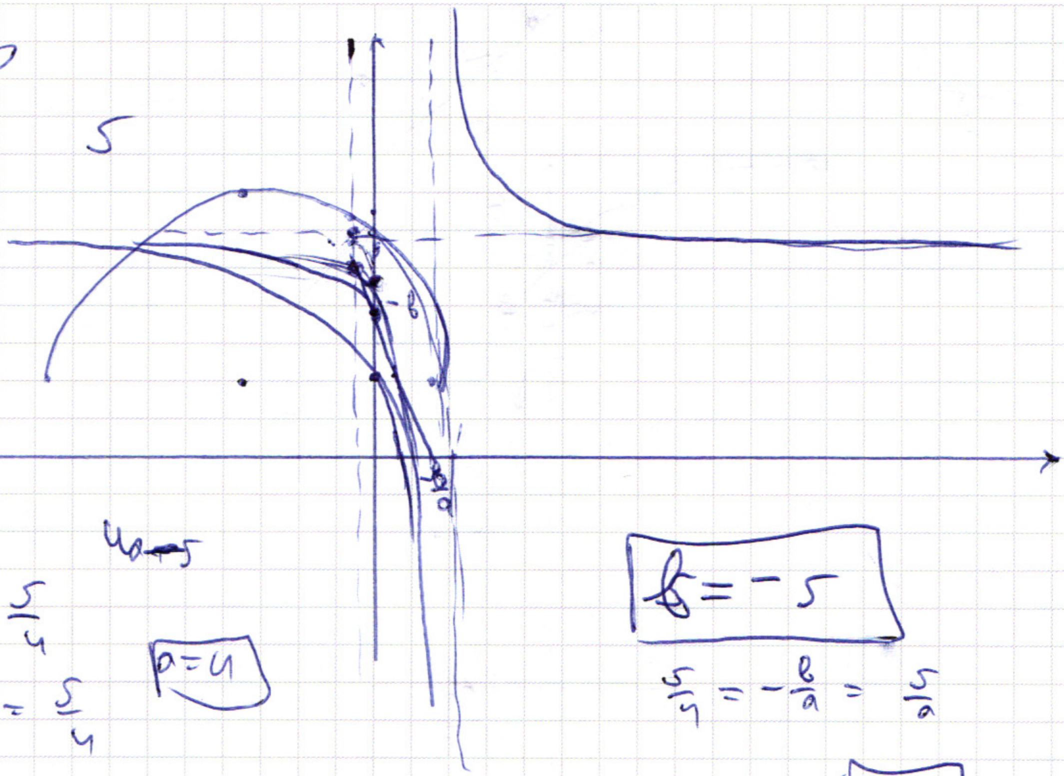
$b=5$

$-b=-5$

$x=$

$-\frac{5}{a} = \frac{-5}{4}$

$a=-4$



$-\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{a} = \frac{5}{4}$

$\boxed{a=4}$

$\boxed{b=-5}$

$\frac{5}{4} = -\frac{b}{a} = \frac{5}{a}$

$\boxed{a=4}$

$\frac{7}{6} \le -\frac{b}{a} < \frac{3}{2}$

$-b$

$\frac{4}{3}$

$4x+$

$2+\sqrt{25-\left(\frac{7}{2}\right)^2} = 9$

$2+\sqrt{25-\frac{49}{4}}$

$2+\sqrt{\frac{51}{4}} = 2+\frac{\sqrt{51}}{2} \approx 5,5$

1) $x=-\frac{1}{2}$

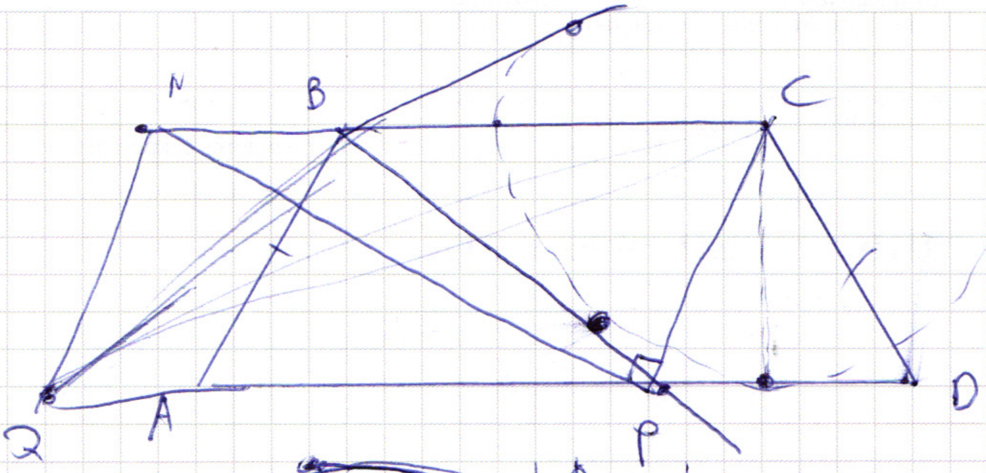
$\frac{-6-14}{-1-4} = +\frac{20}{5} = 4$ $\qquad \frac{-6-14}{-1-3} = 5$

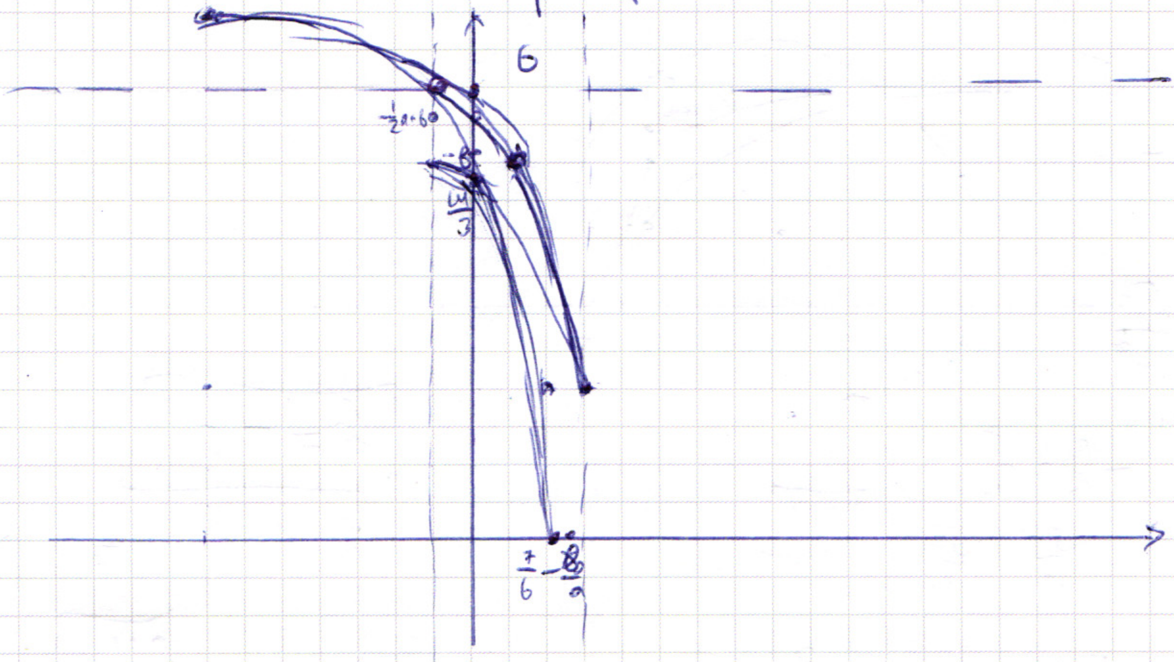
$2+\sqrt{25-(3)^2} = 6$

$\boxed{\begin{matrix} a=-4 \\ b=5 \end{matrix}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)





$\cancel{=b}$

$$\begin{cases} 5 \le -\frac{1}{2}a + b \le 6 \qquad -\frac{b}{a} \\ \cancel{b} \quad \frac{7}{6} \le -\frac{b}{a} \le \frac{3}{2} \\ \frac{14}{3} \le -b < 6 \end{cases}$$

$-\frac{14}{3} > b > -6$

$a = 4$

$\cancel{\le 2a+b \le 6}$

$5 \le -2 + b \le 6$

$7 \le b \le 8$

№ 2 $\quad ctg x + ctg y =$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos y \cos x} =$$

$$tg x + tg y$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos y \cos x} = \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} \qquad \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

$\cancel{\cos}$

$\cancel{\{\sqrt{3}(\cos(x+y)}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(\frac{\pi}{3}-x) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6}) \quad \Big/ : 2 \end{cases}$$

$$\sin(x+2y)\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y) = 4\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\sin(x+2y)\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \cos(x+2y)\cos\frac{\pi}{6} = 4\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\cos(x+2y-\frac{\pi}{6}) = 4\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

$$\sin(\frac{\pi}{3}-x) = \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{3}-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

$$\sin(x+2y) = \sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y$$

$$\cos(x+2y) = \cos(x+y)\cos y - \sin(x+y)\sin y$$

$$\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y + \sqrt{3}\cos(x+y)\cos y -$$

$$- \sqrt{3}\sin(x+y)\sin y = 8\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^3+3t-4=0$

$t^3-1+3t-3=0$

$t^3-1+3(t-1)=0$

$(t-1)(t^2+t+1)+3(t-1)=0$

$(t-1)(t^2+t+4)=0$

$t_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-4\cdot4}$

$t=1$

$2y+27=1$

$2y=-26$

$y=-13$

$x=216-8\cdot13=216-104=112$

$13\times8=104$

№3

$10^3\cdot10^4\cdot10^5$

a b c d e f g

10^1-10^3 ✗

10^2-10^4 ✗

10^3-10^5

10^4-10^6

10^5-10^7

a b ~~0~~ 6 1 3 8

6138 + 6138 + 138

$\times$ 6138
2
12276

~~1276~~

+ 12276
138
12414

2B 10B 2B 6 1 3 8   180 B.

a b c d e f g

3) $10^4 - 10^6$

2B 6 1 3 8

$\overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \overline{abcdefg} = 12414$

1.000.000 + 200.000b + 300.00c + 3000d + 300e + 30f + 7g = 12414

g = 8   f = 3   e = 1   d = 6

1.000.000 a + 200.000 b + 3.0000 c =

6 1 3 8

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $10^2 - 10^4$

$$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12414$$

$100e + 1000d + 100e + 10f + 10f + 10f + 3g =$

$= 1000d + 200e + 30f + 3g$

$d = 9 \quad e = 9 \quad f = 9 \quad g = 9$

$9000 + 1800 + 270 + 27$

$10800 + 270 + 27 = 10800 + 297 = \cancel{30}$

$$\begin{array}{r} + \; 9999 \\ 999 \\ \hline 10998 \end{array}$$

2) $10^3 - 10^5$

$$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414$$

$10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

1) $c = 0 \quad c = 1$

$g =$

$1 + 1 + 1 = 3$

$2 + 2 + 2 = 6$

$3 + 3 + 3 = 9$

$4 + 4 + 4 = 12$

$5 + 5 + 5 = 15$

$6 + 6 + 6 = 18$

$7 + 7 + 7 = 21$

$8 + 8 + 8 = 24$

$9 + 9 + 9 = 27$

$\boxed{g = 8}$

$10c + 2d = 12$

$d = 0$

$\boxed{\begin{array}{ll} c = 1 & d = 1 \\ c = 0 & d = 6 \end{array}}$

$10000c + 2000d + 300e + 30f = 12390$

$1000c + 200d + 30e + 3f = 1239$

$\boxed{f = 3}$

$1000c + 200d + 30e = 1230$

~~1000c +~~

$100c + 20d + 3e = 123$

$\boxed{e = 1}$

$100c + 200d = 120$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 \end{cases}$$

1 уравнение

2 уравнение

вычтем из первого уравнения второе.

$x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} =$

$12 = \sqrt[3]{64 \cdot 169 - 112^2}$

-216

108

$\times 169$
64

3

8

108

$x + 6\sqrt[3]{8y + x} = 124$

$6\sqrt[3]{-13 \cdot 8 + 112} = 12$

$\sqrt[3]{112 - 13 \cdot 8} = 2$

$112 - 104 = 2$

~~$-4a + 5b =$~~

$\boxed{-4x + 5} = \frac{12x - 14}{2x - 3}$

$(5 - 4x)(2x - 3) = 12x - 14$

$10x - 15 - 8x^2$

$(ax + b)(2x - 3) = 12x - 14$

$\frac{8 + 3a}{}$

$2ax^2 - 3ax + 2bx - 3b = 12x - 14$

$-2a = 4$

$2ax^2 - 3ax + 10x - 15 = 2x - 14$

$a = -2$

$2ax^2 - 3ax = -8x + 1$

$-2ax^2 - x(8 + 3a) + 1 = 0$

☒ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

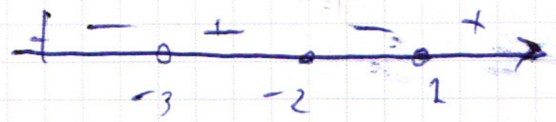
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{t^2+t-2}{t+3} \le 0$

$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}$

$\frac{(t+2)(t-1)}{(t+3)} \le 0$



$t \in (-\infty; -3) \cup [-2; 1]$

$(\log_x 2 + 2)$

$t \to -\infty$ $\cancel{x \to -\infty}$ $x \to 0$

$\cancel{t \to}$ $t = -3$ $x = 2^{-\frac{1}{3}}$

$t = -2$ $x = 2^{-\frac{1}{2}}$

$t = 1$ $x = 2$

$x \in (0; 2^{-\frac{1}{3}}) \cup [2^{-\frac{1}{2}}; 2]$

$t \in$