МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$\frac{1}{4} \leq \frac{5a - 4b + 16}{8a} \leq 1 \quad \Big| \cdot 8a$$

$2a \geq 5a - 4b + 16 \geq 8a$ $\qquad$ $4b$

$3a + 4b \leq -16$

$16 \geq 4b + 3a$ $\geq$

$-16 \geq -4b + 3a$

$0 \geq 6a$

$3a \leq 16 - 4b$

$3a \leq 4b - 16$

$$\frac{5a - 4b + 16}{8a} \leq \frac{1}{4}$$

$5a - 4b + 16 \geq 2a$ $\qquad$ $3a - 4b \geq -16$

$\cancel{3a + 4b \leq 16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$. (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$. (2)

$tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = 2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta$

Значит, $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

При этом возможны два случая: ~~$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$~~ $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

или $\sin 2\beta = \frac{-2}{\sqrt5}$.

Рассмотрим оба.

сл1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$.

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 = \frac{-3}{5}$, $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = \frac{4}{5}$.

Подставим в (2): $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\left(-\frac{3}{5}+1\right)+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{5} = -\frac{2}{5}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{4}{5}+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{2}{5}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$2t+2(1-t^2) = -(t^2+1)$ (разделим на $\cos^2\alpha\neq0$)

$tg\,\alpha = t$

$\cancel{2t+2-2t^2 = t^2+1}$

$\cancel{3t^2-2t-1=0}$

$\cancel{(3t+1)(t-1)=0}$

$\cancel{t=1 \text{ или } t=-\frac{1}{3}}$.

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3$ или $t=-1$.

сл 2) $\sin 2\beta = \frac{-2}{\sqrt5}$, $\cos 4\beta = \frac{-3}{5}$, $\sin 4\beta = \frac{-4}{5}$

Подставим в (2):

$\sin 2\alpha \cdot \left(-\frac{3}{5}+1\right) + \cos 2\alpha \cdot \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-2}{5}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$\frac{4}{5}\sin\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{-2}{5}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$2t - 2(1-t^2) = -1\cdot(t^2+1)$ (Снова разделим на $\cos^2\alpha \neq 0$)

$2t - 2 + 2t^2 = -t^2 - 1$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$ $\qquad tg\,\alpha = t$

$(t+1)(3t-1) = 0$

$t = \frac{1}{3}$ или $t = -1$.

Итак, из сл 1) и сл 2) $tg\,\alpha \in \{-1; \frac{1}{3}; 3\}$.

Т.к. нам сказали в условии, что значений $tg\,\alpha$ не менее трех, то все значения $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$ реализуются и не возникает противоречий.

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$; 3.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Введем замену: $a=x-6$

$b=2y-1$

Рассмотрим (2):

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$a^2+9b^2=90$

Заметим, что $a-6b=x-6-6(2y-1)=x-12y$,

а $a\cdot b=(x-6)(2y-1)=2xy+6-x-12y$.

Значит, в новых обозначениях система выглядит так:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1'') \\ a^2+9b^2=90 & (2'') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+36b^2-13ab=0 & (1') \\ a^2+9b^2=90 & (2') \\ a-6b\geq 0 & (3') \end{cases}$$

Решим (1'): $a^2+36b^2-13ab=0$

если $b=0$, то из (1') $\Rightarrow a=0$, но пара (0,0) не удовл (2'). Значит, $b\neq 0$. Делим 1' на b^2.

Замена $\frac{a}{b}=t$: $t^2-13t+36=0$

$(t-9)(t-4)=0$

$t=4$ или $t=9$.

то есть $a=4b$ или $a=9b$

Заметим, что система из (1'') и (2'') равносильна исходной.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим оба случая.

сл 1) $a=4b$.

Подставим в 2': $a^2+9b^2=90$

$$25b^2=90$$

$$b^2=\frac{18}{5},$$ заметим, что $a-6b\geq 0$

$b=3\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow a=12\sqrt{\frac{2}{5}}$.

$a-6b=12\sqrt{\frac{2}{5}}-18\sqrt{\frac{2}{5}}<0$ – не ОК.

$b=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow a=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a-6b=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+18\sqrt{\frac{2}{5}}>0$ – ОК

Значит, пара $\begin{cases} x=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6 \\ y=\frac{1-3\sqrt{2/5}}{2} \end{cases}$ – в ответ.

сл 2) $a=9b$

Подставим в 2': $a^2+9b^2=90$

$$90b^2=90$$

$$b^2=1.$$

$b=1 \Rightarrow a=9$

$a-6b=9-6>0$ – ОК.

$b=-1 \Rightarrow a=-9$

$a-6b=-9+6<0$ – не ОК.

Значит, пара $\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$ – в ответ.

Ответ: $(15;1)$ и $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}.$$

$$10x - x^2 + |10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}.$$

Положим $t = 10x - x^2$.

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

Так как присутствует $\log_3 t$; $t>0 \Rightarrow |t| = t$.

Известный факт, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(если $a=1$, то $1^{\log_b c} = c^0$, $1=1$, верно.

если $a \neq 1$, то ~~берем~~ $\log_a$: $\log_b c = \log_b a \cdot \log_a c$

$\frac{\ln c}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln b} \cdot \frac{\ln c}{\ln a}$ – верно).

Тогда $t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$.

$$t = 3^{\log_3 t}.$$

Итак, $3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t} \quad \Big| : 4^{\log_3 t} > 0$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t} + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t} \quad (*).$$

Заметим, что $\log_3 t \nearrow$ по t при $t>0$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{z} \searrow$ по z, $\left(\frac{5}{4}\right)^{z} \nearrow$ по z

Значит, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t} \searrow$ по t при $t>0$, а $\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t} \nearrow$ по t при $t>0$,

Как композиция возр и убыв и возр и возр.

~~соответственно.~~

Заметим, что при $t=9$, $\log_3 t=2$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\left(\frac{5}{4}\right)^2$

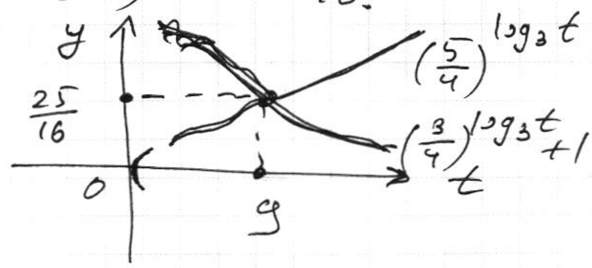
$\frac{25}{16}=\frac{25}{16}$.

при $0<t<9$,

$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t}+1>\frac{25}{16}$, а $\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t}<\frac{25}{16}$

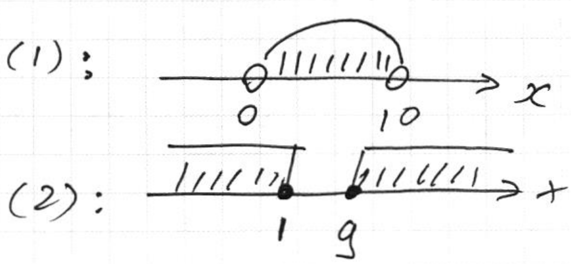
при $t>9$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t}+1<\frac{25}{16}$,

а $\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t}>\frac{25}{16}$.



Значит, решения $(*)$ – это $t\in(0;9]$.

Обратная замена: $\begin{cases}10x-x^2>0\\10x-x^2\le 9\end{cases}$ $\begin{cases}x(10-x)>0 \ (1)\\(x-1)(x-9)\ge 0 \ (2)\end{cases}$



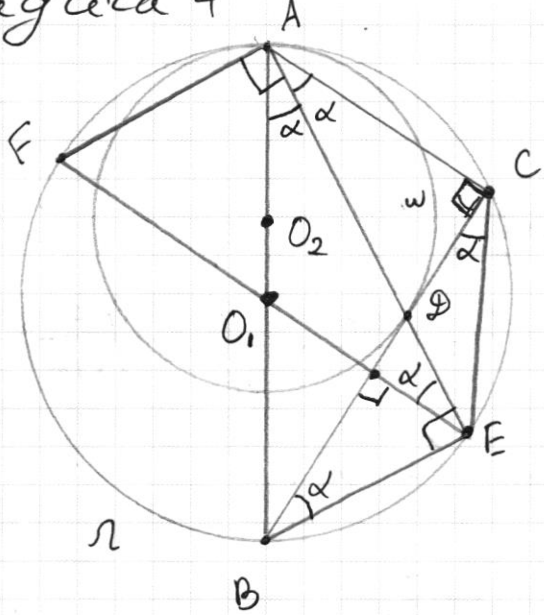
$\Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[9;10)$.

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$



По лемме Архимеда, E — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ Ω. Значит, прямая EF, перпендикулярная BC содержит O_1 — центр Ω. EF — диаметр Ω.

Пусть r и R — радиусы ω и Ω, а $\angle CAE = \angle BAE = \angle BCE = \angle CBE = \alpha$.

Заметим, что $\triangle CDE \sim \triangle ACE$ ($\angle DCE = \angle CAE = \alpha$, $\angle DEC = \angle AEC$ — общий)

Значит, $CD = AC \cdot \frac{CE}{AE}$.

Из Ω по Th синусов: $AC = 2R\sin(90^\circ - 2\alpha) = 2R\cos 2\alpha$

$CE = 2R\sin\alpha$

$AE = 2R\cdot\sin(90^\circ - \alpha) = 2R\cos\alpha$

$16 = BC = 2R\sin 2\alpha \Rightarrow R\sin 2\alpha = 8$

$CD = 2R\cos 2\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{15}{2}$.

$4R\cdot\cos 2\alpha \cdot \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = 15$

$4\cos 2\alpha \cdot \frac{1}{2\cos^2\alpha}\cdot \underbrace{R\sin 2\alpha}_{8} = 15$

$\frac{4\cos^2\alpha - 2}{\cos^2\alpha} = \frac{15}{8}$

$15\cos^2\alpha = 32\cos^2\alpha - 16$

$16 = 17\cos^2\alpha$,

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $tg\alpha = \frac{1}{4}$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\cancel{R\sin 2\alpha = 8}$

$R \sin\alpha\cos\alpha = 4$

$\cancel{R\cdot\frac{\sqrt{15}}{16} = 4 \Rightarrow R = \frac{64}{\sqrt{15}}}$.

$R \sin 2\alpha = 8$

$R = \frac{4}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4}{4/17} = 17.$

$\angle AFE = 90^\circ - \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\cancel{AE = 2R\cos\alpha = 34\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{136}{\sqrt{17}}}$.

Найдем DE.

Из подобия $\triangle CDE \sim \triangle ACE$:

$$DE = CE\cdot\frac{CE}{AE} = 2R\sin\alpha\cdot\frac{1}{4} = \frac{34}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{17}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

По св-ву секущих в ~~окр~~ окр-ти Ω:

$DB\cdot DC = DE\cdot DA$

$\frac{17\cdot 15}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot DA$, $DA = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$AE = AD + DE = 8\sqrt{17}$.

Гомотетия $H_A^{R/r}$ переводит ω в Ω, а точку D в точку E.

То есть, $\frac{R}{r} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow r = \frac{AD}{AE}\cdot R = \frac{15/2}{8}\cdot 17 = \frac{15\cdot 17}{16} =$

$= \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}$.

Найдем $S_{\triangle AEF}$,

т.к. O_1 — середина EF, то $S_{AEF} = 2S_{\triangle O_1AE} =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AO_1\cdot AE = \sin\alpha\, AO_1\cdot AE = \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot 17\cdot 8\sqrt{17} = 136.$

Ответ: $R = 17$, $r = 15\frac{15}{16}$, $\angle AFE = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$S_{\triangle AEF} = 136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

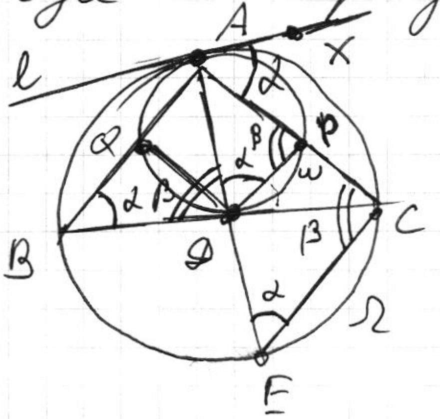
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 Доказательство леммы Архимеда

Пусть окр-ти ω и Ω касаются в точке A (внутр. образом)
BC — хорда Ω касается ω в точке D.
$[AD) \cap \Omega = E$.

Тогда E — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ Ω.



Пусть $X \in l$, l — касательная к ω и Ω в точке A.
$\angle XAC = \alpha$
тогда 1) $\angle ABC = \alpha$, $\angle AEC = \alpha$
2) $\angle ADP = \alpha$, где $P = [AC) \cap \omega$.
тогда $DP \parallel EC$.
пусть $\angle APD = \beta$, $\Rightarrow$ 1) $\angle ACE = \beta$.
2) $\angle ADB = \beta$.
Из $\triangle ACE$: $\angle EAC = 180^\circ - \alpha - \beta$
из $\triangle ABD$: $\angle EAB = 180^\circ - \alpha - \beta$.
то есть, E — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ окр-ти Ω, что и требовалось.

Задача 5. $f: \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$.

$f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p-простое.

1) Докажем, что $f(1) = 0$.

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$.

2). Пусть $b = a^n$, $a > 0$, n - целое.
$a \in \mathbb{Q}$

Тогда $f(b) = nf(a)$.

сл 1) $n = 0$ - верно.

сл 2) $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$

Индукция по n. База $n=1$ - верно. ✓.

переход: $f(a^n) = f(a^{n-1} \cdot a) = f(a) + (n-1)f(a) = nf(a)$. ✓

сл 3) $n < 0$, $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$

$0 = f(1) = f(a^k \cdot a^{-k}) = f(a^{-k}) + kf(a)$

$f(a^{-k}) = -kf(a) \Rightarrow f(a^n) = na$ ✓.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$, т.е. $f(x) < f(y)$

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$,
$f(12) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$.

Составим таблицу $n - f(n)$, $2 \leq n \leq 25$, пользуясь данными об f выше и разложением на простые

Далее $x \in \{2; 3, \dots, 25\}$
$y \in \{2, 3, \dots, 25\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(n)$	[illegible]	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

итак, если $x: f(x) = 0$ таких x-ов — 10

тогда любой $y: f(y) \neq 0$ подходит. таких y-ов — 14.

Тут 140 пар.

если $x: f(x) = 1$ таких x-ов — 7

тогда любой $y: f(y) \geq 2$ подходит. таких y-ов — 7

Тут 49 пар.

если $x: f(x) = 2$ таких x-ов — 3

тогда любой $y: f(y) \geq 3$ подходит таких y-ов — 4.

Тут 12 пар.

если $x: f(x) = 3$, он один — $x = 13$,

тогда подходят $y \in \{17, 19, 23\}$

3 пары.

если $x: f(x) = 4$, т.е. $x \in \{17, 19\}$, то подходит лишь $y = 23$. — 2 пары.

для $x = 23$ не найдется y-ка.

Всего пар: $140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$

Ответ: 206 пар

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 6 пусть $p(x) = ax+b$

$(a, b): \ \forall x \in [\frac{1}{4}; 1] \longrightarrow \frac{16x-16}{4x-5} \overset{(1)}{\le} ax+b \overset{(2)}{\le} -32x^2+36x-3$

Заметим, что $\cancel{\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}}$

при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, $4x-5 < 0$.

$(1) \Leftrightarrow 16x-16 \ge (4x-5)(ax+b)$

$x = 1: \ 0 \ge -(a+b), \ a+b \le 0$

$x = \frac{1}{4}: \ -12 \ge -4(\frac{a}{4}+b)$

$\frac{a}{4}+b \ge 3$

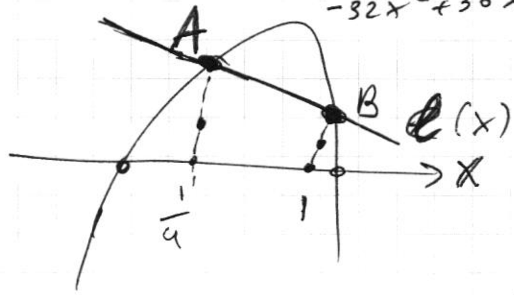
$(2): \ x=1: \ a+b \le 1$

$x = \frac{1}{4}: \ \frac{a}{4}+b \le 4$

Рассмотрим (2): $ax+b \le -32x^2+36x-3$

Пусть (a, b): (2) верно при $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$.

$-32x^2+36x-3 = g(x)$



Пусть l — прямая, содержащая $A: (\frac{1}{4}; g(\frac{1}{4}))$ и $B: (1; g(1))$.

Заметим, что прямая p не пересекает отрезка AB (без концов), т.к. иначе, взаимо~~...~~ное расположение p и l было бы таким, что при $x = \frac{1}{4}$ и при $x = 1$ ~~либо~~ p было бы выше l ~~или~~ l было бы выше p в некоторой из точек, что неверно.

„выше" = больше y-координата.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~т.к. парабола - выпукл~~

т.к. подграфик данной параболы $y \le g(x)$ — выпуклое множество, из неравенств: ~~следует~~

$g(x_1) \ge l(x_1)$

$g(x_2) \ge l(x_2)$ $\Rightarrow$, что $g(x) \ge l(x)$ $\forall x \in [x_1; x_2]$.

$(x_1 < x_2)$

l — прямая

Итак, если пара $(a; b)$ такова, что $g(\frac{1}{4}) \ge l(\frac{1}{4})$,

$g(1) \ge l(1)$,

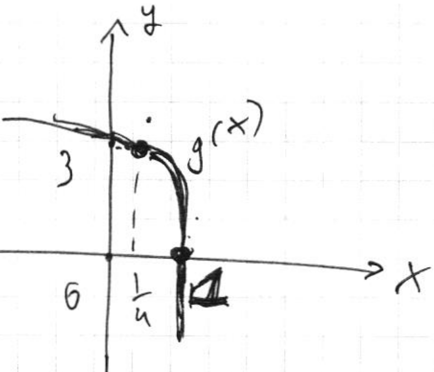
$g(x) \ge l(x)$ $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

По доказанному ранее, прямая p не пересекает прямую l по отрезку (внутренности отрезка) AB. (если только p не совпадает с l).

Значит, $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$: $p(x) \le l(x) \le g(x)$.

Рассмотрим (1):

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = g(x).$$



$g(x)$ выпукла при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$,

т.к. $4x-5 < 0$ при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

Здесь необходимо доп. исследование.

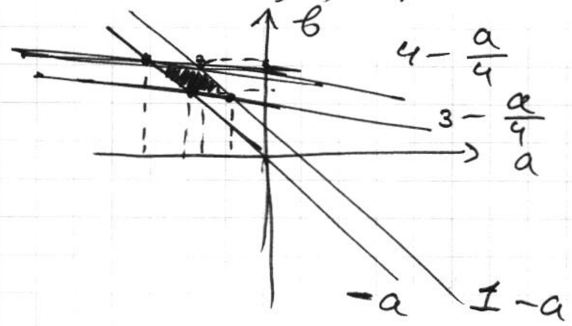
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Заметим, что мн-во $(a;b)$ ограничено так:

$-a \le b \le 1-a$

$3-\frac{a}{4} \le b \le 4-\frac{a}{4}$



у всех этих пар $a<0$, $b>0$.

$16x-16 \ge 4ax^2-5b+(4b-5a)x$

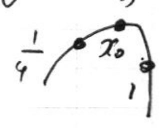
$4ax^2+(4b-5a-16)x+16-5b \le 0$

Мы хотим, чтобы парабола $h(x)$ была не выше нуля при $\frac{1}{4} \le x \le 1$.

Рассмотрим случаи положения вершины:

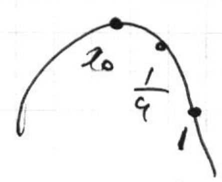
$$x_0 = \frac{5a-4b+16}{8a}$$

сл 1) $x_0 \in [\frac{1}{4}; 1]$ Необх. и дост., чтобы $h(x_0) \le 0$, т.е. $D \le 0$



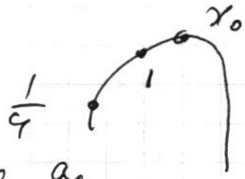
сл 2) $x_0 < \frac{1}{4}$.

необх и дост., чтобы $h(\frac{1}{4}) \le 0$



сл 3) $x_0 > 1$

необх и достат, чтобы $h(1) \le 0$

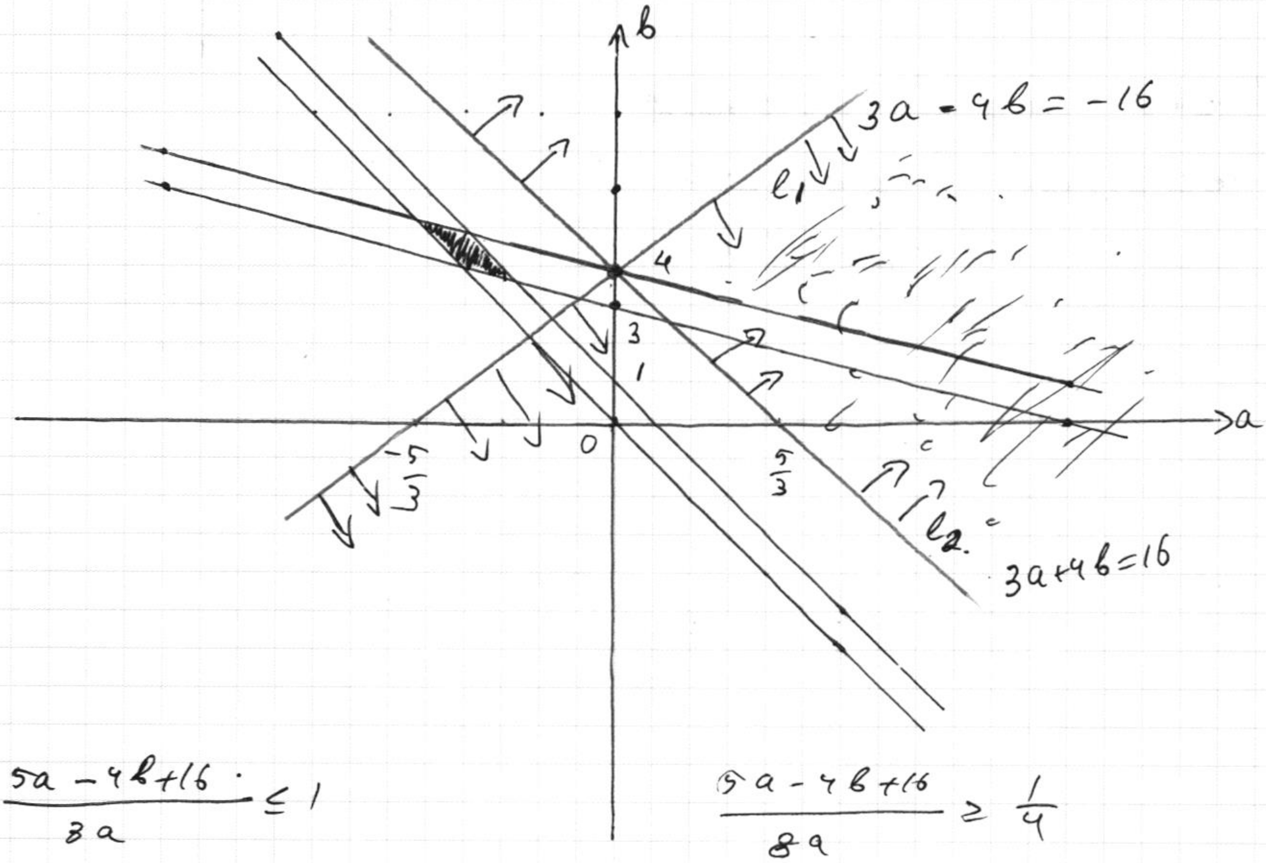


$\cancel{h(\tfrac{1}{4}) = \frac{a}{4} + b - \frac{5a}{4} - 4 + 16 - 5b = -4b - a + 12}$

неравенства $h(\frac{1}{4}) \le 0$ и $h(1) \le 0$ уже решены.
Из них следуют ограничения $0 \ge a+b$ и $3 \le \frac{a}{4} + b$.

~~Значит, осталось рассмотреть только случай 1)~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{5a-4b+16}{8a} \le 1$$

$$5a-4b+16 \ge 8a$$

$$\underbrace{3a+4b-16}_{l_2} \ge 0 \quad (p)$$

$$\frac{5a-4b+16}{8a} \ge \frac{1}{4}$$

$$5a-4b+16 \le 2a$$

$$\underbrace{3a-4b+16}_{l_1} \le 0 \quad (q)$$

Решения (p) и (q) изображены на графике как .

Как мы можем видеть, если точка (a, b) лежит в , то она не удовлетворяет системе $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$.

Значит, x_0 никогда не попадает в $[\frac{1}{4}; 1]$ при рассматриваемых a и b, то есть реализуется сл 2 или сл 3, а их мы уже решили.

Ответ: a и b таковы, что S(a, b) лежит внутри параллелограмма из прямых

$b = -a$

$b = -a + 1$

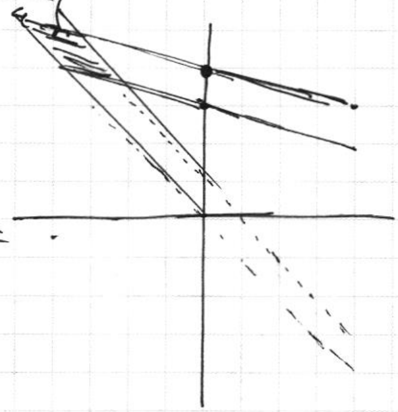
$b = 3 - \frac{a}{4}$

$b = 4 - \frac{a}{4}$,

то есть $(a; b)$ — решения системы

$$\begin{cases} -a \le b \le -a + 1 \\ 3 - \frac{a}{4} \le b \le 4 - \frac{a}{4} \end{cases}$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$



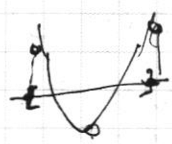
$f(1) = f(1) + f(1)$ $\quad f(1) = 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad f(a^{-1}) =$

$4 + 12 = 16$

$290 + 16 = 206$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$



$-8 + 9 - 3 = -2$ $\quad -64x + 36 = 0$

$-16x + 9 = 0$

$4 - 16 = -12$ $\quad x = \frac{9}{16}$

$\frac{-12}{-4} = 3$ $\quad x = \frac{5}{4}$

$4 + \frac{4}{4x-5}$ $\quad -a \le b \le 1 - a$

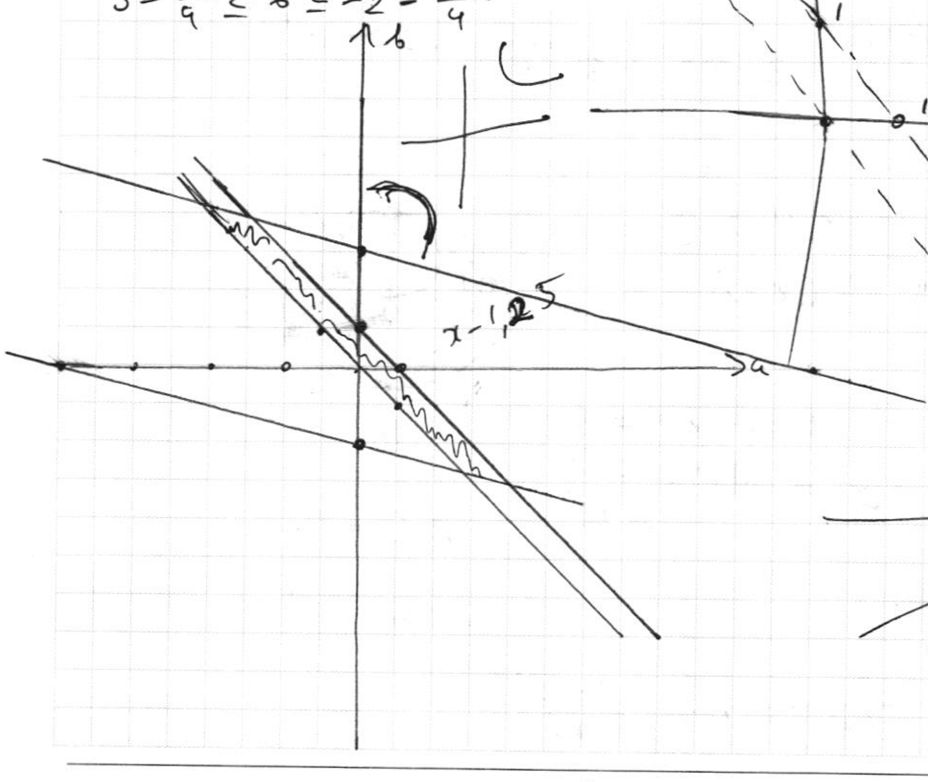
$0 \le a + b \le 1$

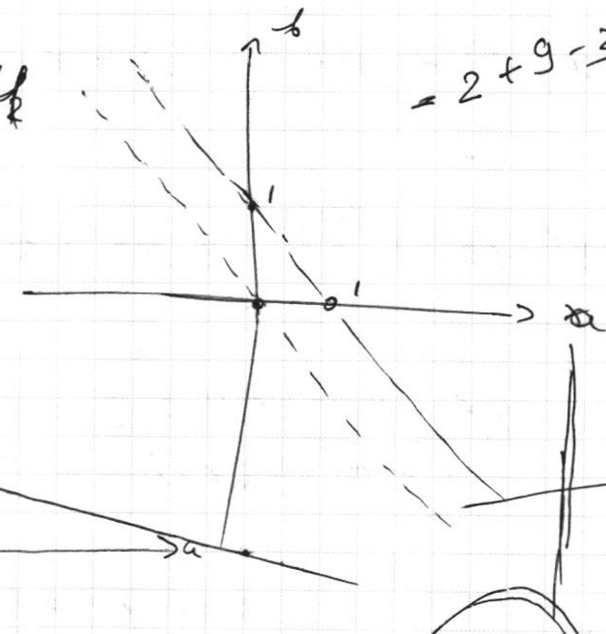
$0 \le a + b \le 1$

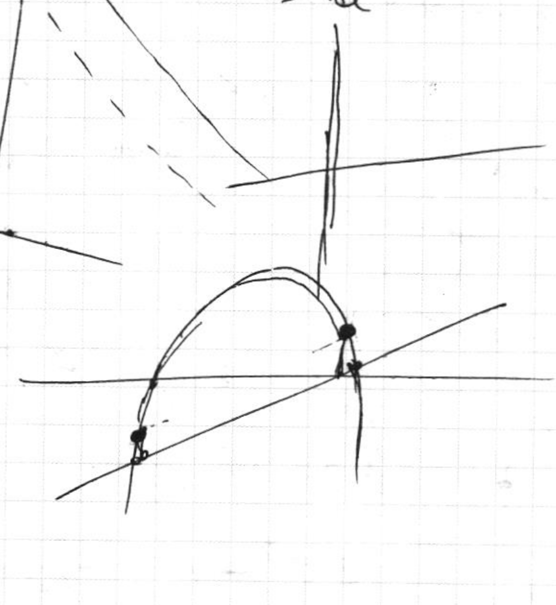
$3 \le \frac{a}{4} + b \le -4$

$3 - \frac{a}{4} \le b \le -2 - \frac{a}{4}$

$-2 + 9 - 3$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underbrace{2\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{2}{\sqrt5}} \cdot \underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{2}{5}$

$9(2y-1)^2$

$(x-6)^2+(6y-3)^2 =$

$= x^2-12x+36+36y^2+9-36y=0$

$\left(t-\frac{3}{3}\right)\left(t+\frac{1}{3}\right) = \cancel{t}\,1$

$(3t+1)(t-1)$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$

$(x-6)(6y-3) =$

$=3(x-6)(2y-1)=$

$=3(2xy+6-x-12y)$

$x^2+144y^2-24xy = 2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+12y+x+144y^2-6=0$

$\alpha(x-6)+\beta(2y-1)=x-12y$ $\quad \alpha=1$, $\beta=-6$

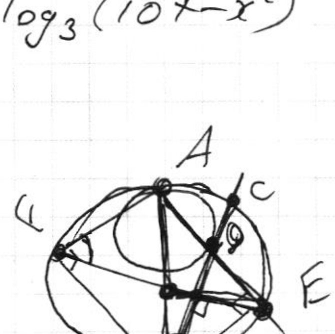
$-6 \quad +6$

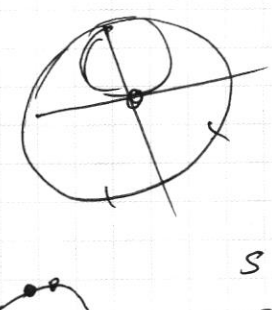
$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+$

$x^2-10x+9\geq 0$

$(x-9)(x-1)\geq 0$





$R\sin 2\alpha = 8$

$CQ = AC \cdot \frac{CE}{AE}$

$s^2+c^2=1$

$BC=16$

$\parallel$

$2R\sin 2\alpha$

$t^2+1=\frac{1}{c^2}$

$2c^2-1=\frac{2}{t^2+1}-1=\frac{1-t^2}{t^2+1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)