МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

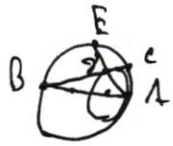
($tg(\frac{\pi}{2}+x) = -ctg\, x$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$



4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

$25 \cdot 75$ $\quad f(6) =$

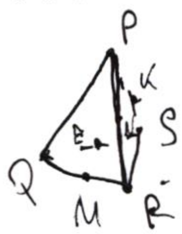
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

$0 : 1,5$
$2 : 2,5$
$3 : \frac{9}{4} = 2,75$

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



$QR = 2$
$QS = 1$
$PS = \sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2-6x+3y^2-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\cancel{D_x=36-12(3y^2-4y-4)=}$$

$$\cancel{=36-36y^2+48y+48=-36y^2+48y+84}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+3y-15xy+4x^2+2x-2=0 \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0 \quad (1) \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

для (1) $D_x=(2-15y)^2-16(9y^2+3y-2)=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-\underset{2\cdot 9\cdot 6}{108y}+36=\cancel{(9y+4)^2}\ \cancel{(9y-4)^2}=(9y-6)^2$

$$\begin{cases} x=\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8} \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{15y-2+9y-6}{8} \\ x=\frac{15y-2-9y+6}{8} \end{array}\right. \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ 3y-2x\geq 0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

I $x=3y-1$

$$\begin{cases} 3y-2(3y-1)\geq 0 \\ 3\underset{9y^2-6y+1}{(3y-1)^2}+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y-6y+2\geq 0 \\ 27y^2-18y+3+3y^2-18y+6-4y-4=0 \end{cases}$$

$D_y=64-24=40$

$$\begin{cases} 30y^2-40y+5=0 \\ -3y+2\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6y^2-8y+1=0 \\ y\leq\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{8\pm\sqrt{40}}{12} \\ y\leq\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{8\pm 2\sqrt{10}}{12} \\ y\leq\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6} \\ y\leq\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{array}\right. \\ y\leq\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\frac{4+\sqrt{10}}{6} \vee \frac{2}{3} \quad |\cdot 6$

$4+\sqrt{10} \vee 4 \quad |-4$

$\sqrt{10}>0$

$\Downarrow$

$y=\frac{4+\sqrt{10}}{6}$ - не подходит

$\frac{4-\sqrt{10}}{6} \vee \frac{2}{3} \quad |\cdot 6$

$4-\sqrt{10} \vee 4 \quad |-4$

$-\sqrt{10}<0$

$\Downarrow$

$y=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$ - подходит

$x=3y-1=2-\frac{1}{2}\sqrt{10}-1=1-\frac{1}{2}\sqrt{10}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II $x = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$

$27+48=60+15=75$
$2,25-4,5-4=-6,25$
$9,75-3\cdot 4=$

$\begin{cases} 3y-2(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2})\geq 0 \\ 3(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2})^2+3y^2-6(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2})-4y-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y-\frac{3}{2}y-1\geq 0 \\ \frac{27}{16}y^2+\frac{9}{4}y+\frac{3}{4}+3y^2-\frac{9}{2}y-3-4y-4=0 \end{cases}$

$\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}$

$\begin{cases} 1,5y-1\geq 0 \\ \frac{75}{16}y^2-6,25y-6,25=0 \end{cases}$ $|\cdot 4$ $\begin{cases} 1,5y\geq 1 \\ \frac{75}{4}y^2-25y-25=0 \end{cases}$ $|:25$ $\begin{cases} 1,5y\geq 1 \\ \frac{3}{4}y^2-y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq \frac{2}{3} \\ 3y^2-4y-4=0 \end{cases}$

$D=16+48=64$

$\begin{cases} y\geq \frac{2}{3} \\ y=\frac{4\pm 8}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq \frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases}$ $\Rightarrow y=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

Ответ: ~~(x;y)=(2;2)~~ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-0,5\sqrt{13} \\ y=\frac{4-\sqrt{13}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

$\S 3$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ:
$x^2+6x>0$
$x(x+6)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

т.к. по ОДЗ $x^2+6x>0$, то модуль раскрывается со знаком „+"

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$ Пусть $t=\log_4(x^2+6x)$ $4^t=x^2+6x$

$3^t+4^t\geq 5^t$

$3^t+4^t-5^t\geq 0$ $f(t)=3^t+4^t-5^t$ $f'(t)=\frac{1}{\ln 3\cdot t}+\frac{1}{\ln 4\cdot t}-\frac{1}{\ln 5\cdot t}=$

$=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{\ln 4\cdot\ln 5+\ln 3\cdot\ln 5-\ln 3\cdot\ln 4}{\ln 3\cdot\ln 4\cdot\ln 5}\right)$

$=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{(\ln 5-\ln 3)\cdot\ln 4+\ln 3\cdot\ln 5}{\ln 3\cdot\ln 4\cdot\ln 5}\right)$

В силу того, что $\ln(x)$ – возрастающая (монотонно) функция на всей области определения, то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $5>4>3>e \Rightarrow \ln 5 > \ln 4 > \ln 3 > 0$

$\Downarrow$

$(\ln 5 - \ln 3) > 0 \Rightarrow (\ln 5 - \ln 3)\cdot \ln 4 > 0 \Rightarrow (\ln 5 - \ln 3)\cdot \ln 4 + \ln 3 \cdot \ln 5 > 0$

и $\ln 3 \cdot \ln 4 \cdot \ln 5 > 0$

$\Downarrow$

$\frac{1}{t}$ умножается на число большее "0"

рассмотрим поведение $f(t)$

$$\begin{array}{c|ccc}
f(t) & \searrow & 0 & \nearrow \\
\hline
f'(t) & - & 0 & + \\
\end{array} \quad t$$

на промежутке от $(-\infty;0)$ $f(t)$ убывает, на промежутке от $[0;+\infty)$ возрастает $\Rightarrow$ в т. $t=0$ – минимум $f(t)$

$f(0) = 3^0+4^0-5^0 = 1$ т.к. $f(0)>0 \Rightarrow$ при всех остальных значениях t нер-во выполняется автоматически $\Rightarrow t \in R$

$\Updownarrow$

$\log_{x}(x^2+6x) \in R$

с учётом ОДЗ

$x \in (-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

S6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 2x+6 \geq 8x^2-34x+30 \qquad \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} \geq 2x+6 \geq 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2} \geq 2x+6 \geq 8x^2-34x+30$

$f(x) = 2+\frac{1}{2x-2} \quad g(x) = 2x+6 \quad h(x) = 8x^2-34x+30$

$h(x) = 8x^2-34x+30 \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} \quad h(x_0) = 8\cdot\frac{17^2}{8^2} - 34\cdot\frac{17}{8}+30 =$

парабола, ветви вверх

$= \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 30 = \frac{17^2-2\cdot 17^2}{8}+30 = -\frac{17^2}{8}+30$

$= \frac{-289+240}{8} = -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$m(2) = 8\cdot\overset{32}{4} - 34\cdot\overset{68}{2} + 30 = -6$ $\quad m(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$m(3) = 8\cdot\overset{72}{9} - 34\cdot\overset{102}{3} + 30 = 0$ $\quad m(4) = 8\cdot\overset{128}{16} - 34\cdot\overset{136}{4} + 30 = 22$

$f(x) = 2 + \frac{1}{2x-2}$ $\quad f'(x) = \frac{-2^{\,<0}}{\underbrace{(2x-2)^2}_{>0}}$ $\Rightarrow$ при $x \in R\setminus\{1\}$

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ при $x \in R \setminus \{1\}$

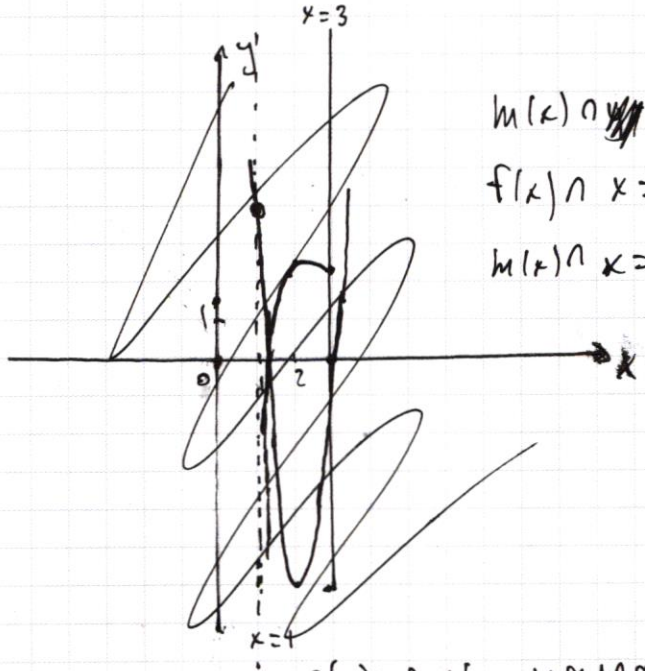
$f(x)$ − убывает

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$

$f(2) = \frac{5}{2}$

$f(3) = 2{,}25$

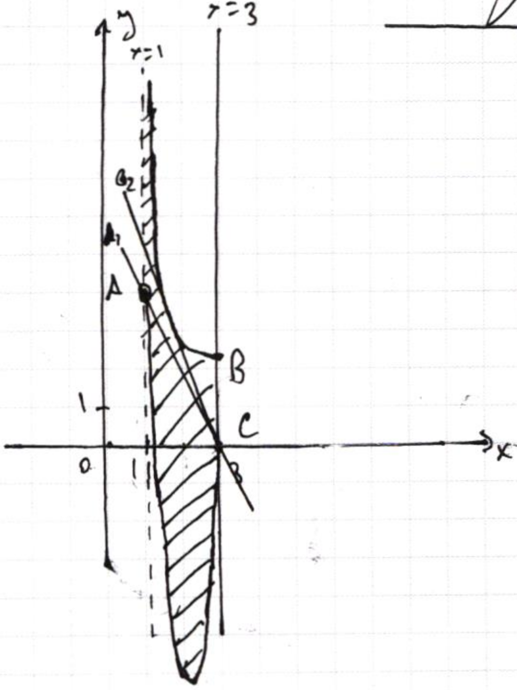
Изобразим $f(x)$ и $m(x)$ на координатной плоскости



$m(x) \cap x=1$ в т. $(1;4)$ A

$f(x) \cap x=3$ в т. $(3;2{,}25)$ B

$m(x) \cap x=3$ в т. $(3;0)$ C



$g(x) = ax + b$ − прямая, с угловым коэф. a и проходящая через т. $(0;b)$

заштрихованная область − искомая $\Rightarrow$ при $x \in [1;3]$ $g(x)$ должна полностью содержаться в этой области

$\Downarrow$

$g(x)$ лежит между положениями a_1 и a_2 включая a_1 и a_2

a_1 − $g(x)$ проходит через A и C

a_2 − $g(x)$ касается $f(x)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. a_1 проходит через т. $A(1;4)$ и $C(3;0)$, то ур-ие прямой по 2^х точкам

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, где $x_0;y_0$ - координаты A

$x_1;y_1$ - координаты C

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{0-4}$ $\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-4}$ $\quad -4x+4 = 2y-8$

$2y = -4x+12$

$y = -2x+6 \Rightarrow a = -2$
$b = 6$

a_2 - касательная к $f(x)$, проходящая через т. C

~~ур-ие касательной $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, где x_0 - координата т. касания~~

$g(x) = ax+b$ т.к. $C \in g(x)$ $\quad 0 = 3a+b$ $\quad b = -3a$

$g(x) = ax-3a$

$f(x) = g(x)$

$\frac{4x-3}{2x-2} = ax-3a$ $\quad 4x-3 = (ax-3a)(2x-2)$

$4x-3 = 2ax^2-2ax-6ax+6a$

$2ax^2-8ax-4x+6a+3=0$

$2ax^2-x(8a-4)+6a+3=0$ т.к. $f(x)$ касается $g(x)$, то ур-ие имеет одно решение $\Rightarrow D=0$

~~$D = (4a-4)^2-8(6a-3) = 16a^2-32a+16+48a-24=0$~~

~~$16a^2+16a-8=0$ | :8~~

~~$2a^2+2a-1=0$~~

~~$D = 4+8 = 12$ $\quad a = \frac{-16 \pm 2\sqrt{3}}{4}$~~ ~~$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-8+\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{-8-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$~~

~~$= 16a^2-32a+16-48a+24=0$~~

~~$16a^2$~~

$D = (8a-4)^2-8(6a+3) =$

$= 64a^2-64a+16-48a-24 =$

$= 64a^2-112a-8=0$ | :8

$8a^2-14a-1=0$

$D = 196+32 = 228 = 4\cdot(57)$

$a = \frac{14 \pm 2\sqrt{57}}{16}$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{7-\sqrt{57}}{8} \\ a = \frac{7+\sqrt{57}}{8} \end{array}\right.$ т.к. $a = \frac{7+\sqrt{57}}{8}$ - не подходит т.к. из рисунку видно, что $\operatorname{tg} a < 0 \Rightarrow a < 0$

$\Rightarrow a = \frac{7-\sqrt{57}}{8}$ $\quad \frac{7-\sqrt{57}}{8} \vee 0$ $\quad 7 \vee \sqrt{57}$ $\quad \Rightarrow \frac{7-\sqrt{57}}{8} < 0$

$7-\sqrt{57} \vee 0$ $\quad 49 < 57$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: подходят все пары вида ~~...~~, где

$(a;b) = \cancel{\dots}\ (a;-3a)$, где $a \in \left[\frac{7-\sqrt{57}}{8}; -2\right]$

№7

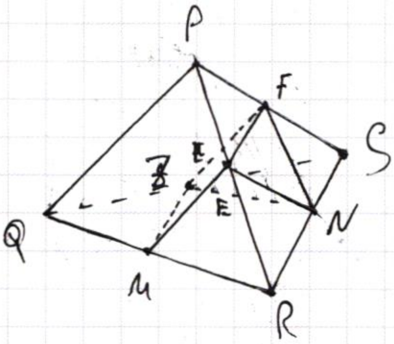
Дано:

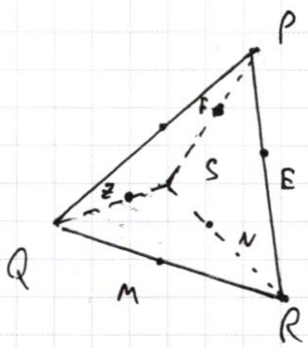
$QR = 2$

$QS = 1$

$PS = \sqrt{2}$

RS - ? радиус описанной - ?





Пусть M, N, E, F, Z — середины сторон QR, RS, PR, PS, PS соотв.

т. P, M, N, E, F, Z — лежат на одной сфере с центром A и радиусом r

~~т.к. в △QSR ZN — средняя линия~~

т.к. в $\triangle QSR$ ZM — средняя линия $\Rightarrow ZM \parallel RS$; $ZM = \frac{1}{2}RS$

аналогично в $\triangle PRS$ EF — средняя линия $\Rightarrow EF \parallel RS$, $EF = \frac{1}{2}RS$

$\Rightarrow ZM \parallel EF$, $ZM = EF$

$\Downarrow$

$ZMEF$ — пар-м

$\Downarrow$

$ZF = ME$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17} \; \vdots \frac{1}{2} \\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\cos 2\beta = -\frac{8}{17}\cdot -\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\Downarrow$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cancel{\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \beta$ $\quad 2\beta = \pm\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi m$, $m\in Z$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

45

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta=\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi n \\ 2\alpha+2\beta=\pi-\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi k \end{array}\right.$, $n, k\in Z$

I $\;2\beta=\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi m$

1) $2\alpha+2\beta=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n$ $\quad 2\alpha=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n+\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi m$

Пусть $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ $\quad \sin x=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos x=\frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \arcsin x=\arccos x$
$\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})=\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

$2\alpha=2\pi n+2\pi m;\ n, m\in Z$ $\quad \alpha=\pi n+\pi m;\ n,m\in Z$

$tg\,\alpha = tg(\pi n+\pi m)=tg\,0=0$

~~[illegible]~~

2) $2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k$ $\quad 2\alpha=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi m+2\pi k$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+\pi m+\pi k$ $\quad ; m,k\in Z$

$tg\,\alpha=tg\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)+\pi m+\pi k\right)=-ctg\left(\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right)=-ctg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$

т.к. $ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$ $\quad -ctg\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=-\sqrt{17-1}=-4$

$ctg\,x=\pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}$

знак «+» сохраняется т.к. $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})\in[0;\frac{\pi}{2}]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II $2\beta = \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m$

1) $2\alpha + 2\beta = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$2\alpha = -\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi m + 2\pi n \quad ; m, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = -\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + \pi m + \pi n$

$tg\alpha = tg\left(-\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + \pi m + \pi n\right) =$

$= tg\left(-\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) = -tg\left(\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) =$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \pm\sqrt{\frac{17}{16} - 1} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$

$tg^2 x = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$

знак "-" т.к. $\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

2) $2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$2\alpha = \pi - \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \quad ; m, n \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + 2\pi n$

$tg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m + 2\pi n\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ – не определён

Ответ: $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = -4$; $tg\alpha = -\frac{1}{4}$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = [p/4]$, где p – простое

$3 \le x \le 27 \qquad f(9) = f(3) + f(3) \qquad f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$3 \le y \le 27$

В силу того, что $x \in [3; 27]$, $y \in [3; 27]$ $\quad \frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{9}; 9\right]$

$x, y \in \mathbb{N}$

~~Пусть $f(x/y) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f(k) + f(p)$~~ т.к. $\frac{x}{y}$ принимает только положительные знач.

т.к. $p \ge 0$ $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow p > 0 \Rightarrow \left[\frac{p}{4}\right] \ge 0$

1) то, если $\frac{x}{y}$ – простое, то $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

2) если $\frac{x}{y} \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)$ ~~нужно~~ составное т.к. по опред. нужному оно не

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

простое $\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(k \cdot p) = f(k) + f(p)$

где k и p - простые т.к. $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow kp > 0 \Rightarrow k > 0$, $p > 0$

$\Downarrow$

$f(k) = [\frac{k}{4}] \geq 0$

$f(p) = [\frac{p}{4}] \geq 0$

$\Downarrow$

если $\frac{x}{y} \in N$, это реальн нар-ют $f(\frac{x}{y}) \geq 0$

если $\frac{x}{y} \notin N$ $f(xy) = f(\frac{k}{p}) = f(k) + f(p^{-1}) = [\frac{k}{4}] + f(\frac{1}{p}) =$

k и p - простые в данном случае из имеющихся усл. $f(\frac{1}{p})$ определить невозможно $\Rightarrow$

т.к. число $\frac{1}{p}$ - нельзя назвать простым

и $f(\frac{1}{p}) = f(1) + f(\frac{1}{p}) = [\frac{1}{4}] + f(\frac{1}{p}) = f(\frac{1}{p})$

из условиям это не определяется

$\Downarrow$

не при каких x и y $f(\frac{x}{y}) < 0$ не выполняется

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:

$\Omega(O_1;R)$

$\vartheta(O_2;r)$

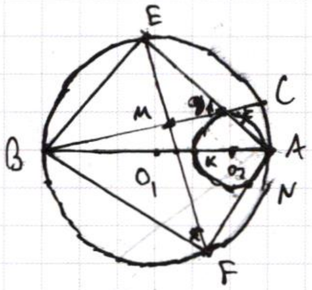
AB - диаметр

Ω кас. $\vartheta = A$

$CD = 2,5$

$BD = 6,5$

$R, r, S_{\triangle AEF}, \angle AFE$ - ?



1. $EF \cap BC = M$

2. т.к. O_1 и O_2 - лежат на одной прямой и A, B, O_1 лежат на одной прямой

$\Downarrow$

O_1, O_2, A, B - лежат на одной прямой

3. $AB \cap \vartheta = K$

4. $AB \cdot BK = BD^2$ т.к. AB - секущая, BD - кас.

$AB = R + r + O_1O_2 \quad BK = R + O_1O_2 - r$

~~5. $CA = CD$ (кас. из одной т.)~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad | : \cos^2 x$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad \frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \begin{cases} 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow 2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$~~

$2\beta = \pm\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m, m \in Z$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \end{cases}, n, k \in Z$

$\left[\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ 2\beta = \pm\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m \end{cases}\right.$ $\quad n, k, m \in Z$

Пусть $\sin x = \frac{1}{\sqrt{17}}, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$
$\Downarrow$
$\cos x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
$\Downarrow$
$\arcsin x = \arccos x$
$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

1) $2\beta = \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m$, $2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m + 2\pi k$ $\quad , m, k \in Z$

$\alpha = \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) + \pi m + \pi k$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) + \pi m + \pi k\right)$ т.к. период тангенса $= \pi$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) = \cancel{tg\left(\frac{1}{2}\cdot 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -tg(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}))}$

$= \cancel{-tg\left(\frac{1}{2}\cdot 2\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) = -tg\left(\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right)}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2\left(\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right)}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{16\cdot 17}{289}}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$ $\quad tg\alpha = -\sqrt{\frac{1}{17}}$

2) $2\beta = \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m$, $2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$ $\qquad \frac{1}{\sin^2 x} = ctg^2 x + 1$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac{1}{2}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ - не существует

3) $2\beta = -\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right) + 2\pi m$, $2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$ $\qquad \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17}$

$tg\,\alpha = tg\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{17}}$

4) $2\beta = -\arccos\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$, $2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$tg\,\alpha =$