МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Рассмотрим:

$xy-x-2y+2=(y-1)x-2(y-1)=$
$=(y-1)(x-2)$

$x-2y=x-2-2y+2=(x-2)-$
$-2(y-1)$

$x^2+9y^2-4x-18y=(x-2)^2-4+$
$+(3y-3)^2-9=(x-2)^2+9(y-1)^2-$
-13

$\Rightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=x^2+9y^2-4x-18y+13=25$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$x-2=a$
$y-1=b$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ ab\geq 0 \quad (2) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

— решим отн. a: $a^2-5ab+4b^2=0$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a=\frac{5b\pm 3b}{2}$ $\Rightarrow$

$$\left[\begin{aligned} a_1&=4b \\ a_2&=b \end{aligned}\right.$$

Из неравенства 2 знаем, что a и b совпадают по знаку $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} a&=4b \\ a&=b \end{aligned}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 16b^2+9b^2=25 \\ a=4b \end{cases} \\ &\begin{cases} b^2+9b^2=25 \\ a=b \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} b^2=1 \\ a=4b \end{cases} \\ &\begin{cases} b^2=\frac{25}{10} \\ a=b \end{cases} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} b=\pm 1 \\ a=4b \end{cases} \\ &\begin{cases} b=\pm\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a=b \end{cases} \end{aligned}\right.$$

учитывая, что $a=4b$ и $a=b$, получим решения:

$$(a;b): \left[\begin{aligned} &\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \\ &\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \\ &\begin{cases} b=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a=\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ &\begin{cases} b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Продолжение на сл. странице:

$a = x-2$

$b = y-1$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=1 \\ y-1=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-1 \\ y-1=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(3;5)$; $(1;-3)$; $\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2};1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

1) $x^2+18x>0$

2) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = t$; $t>0$ из 1)

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$; $t>0 \Rightarrow$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$, прологарифмируем по основанию 12:

$\log_{12}\left(5^{\log_{12}t}\right) + \log_{12}t \geq \log_{12}\left(t^{\log_{12}13}\right)$

$\log_{12}5 \cdot \log_{12}t + \log_{12}t \geq \log_{12}13 \cdot \log_{12}t$

$\log_{12}t\,(\log_{12}5 + 1 - \log_{12}13) \geq 0$

$\log_{12}t\,(\log_{12}5 + \log_{12}12 - \log_{12}13) \geq 0$

$\log_{12}t\left(\log_{12}\frac{5\cdot 12}{13}\right) \geq 0$; $\log_{12}\frac{60}{13} > 0$, т.к $\frac{60}{13} > 1$

$\Rightarrow$ получим неравенство: $\log_{12}t \geq 0$

$t \geq 1$

$x^2+18x \geq 1$

$x^2+18x-1 \geq 0$; решим ур-е $x^2+18x-1=0$

$\frac{D}{4} = 81+1 = 82$

$x = \frac{-9\pm\sqrt{82}}{2}$

$\Rightarrow x^2+18x-1 \geq 0$ верно при $x \in \left(-\infty; \frac{-9-\sqrt{82}}{2}\right] \cup \left[\frac{-9+\sqrt{82}}{2}; \infty\right)$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{-9-\sqrt{82}}{2}\right] \cup \left[\frac{-9+\sqrt{82}}{2}; \infty\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

1) $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

рассмотрим $f(1)$: $f(1) = [\frac{1}{4}] = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{y} \cdot y) = 0 = f(\frac{1}{y}) + f(y) \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

2) Найдем все $f(p)$; $1 \le p \le 24$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$;

$f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$

3) Рассмотрим $f(a)$; a – составное; $b_1; b_2; b_3 \dots b_n$ – простые множители a $\Rightarrow$

$f(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \dots b_n) = f(b_1) + f(b_2 \cdot b_3 \dots b_n) = f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n) =$
$= f(a)$

4) Рассмотрим все возможные зн-я y:

$y=1 \Rightarrow f(y)=0$ и $f(x/y) = f(x) \geq 0$ (т.к. $f(x)$ – сумма неотриц. чисел)

$y=2 \Rightarrow f(y)=0$ и $f(x/y) \geq 0$

$y=3 \Rightarrow f(y)=0$ и $f(x/y) \geq 0$

$y=4 \Rightarrow f(y) = f(2)+f(2) = 0$; $f(x/y) \geq 0$

$y=5 \Rightarrow f(y)=1 \Rightarrow$ если $f(x/y) < 0$, то $f(x)=0 \Rightarrow$

x – простое составное число, в котором только 1; 2; 3 или 1; 2; 3.

их кол-во: 1; 2; 3; $2^n \cdot 3$, где $n = \{1; 0; 2; 3\}$; 2^n; $n \in [1; 4]$;

$2^n \cdot 9$; где $n = \{1; 0\}$; всего: $1+4+4+2 = 11$ чисел

$y=6$: $f(y) = f(2)+f(3) = 0$: $f(x/y) \geq 0$

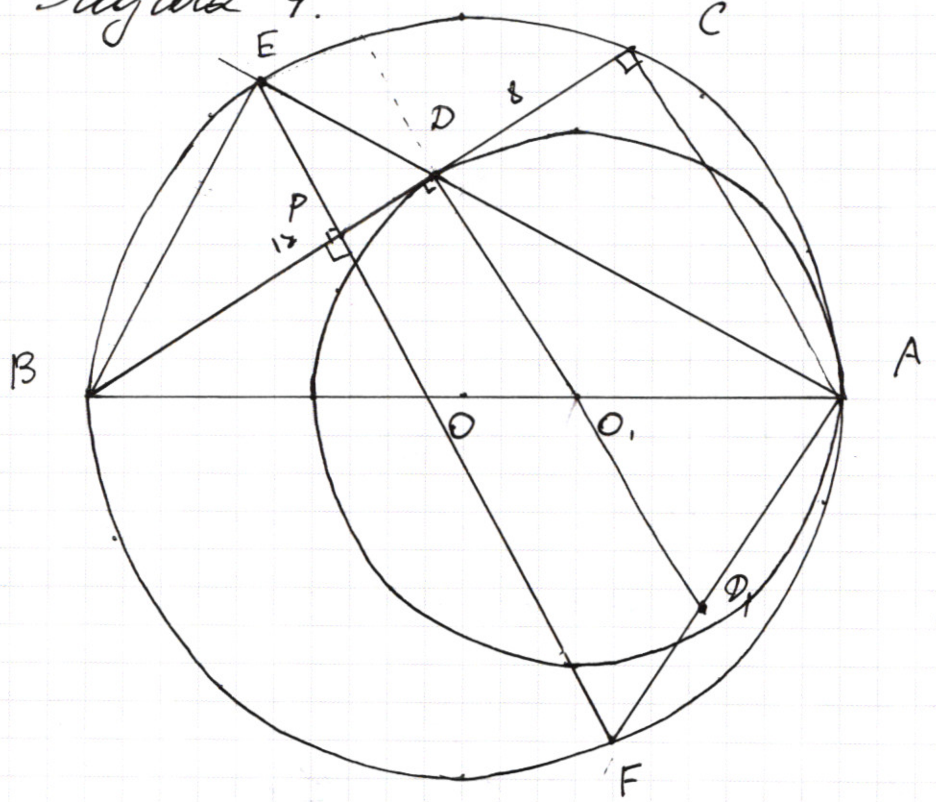
$y=7$: $f(y)=1$ => подх 11 чисел (аналог. с 5) +
$y=8$: $f(y)=3f(2)=0$ => $f(x/y)\geq 0$
$y=9$: $f(y)=2f(3)=0$ $-f(x/y)\geq 0$
$y=10$: $f(y)=f(5)$ – 11 чисел подх. +
$y=11$: $f(y)=2$ => подходят все, кроме 11; 22; 13; 17; 19; 23 – <u>18 чисел</u>
$y=12$: $f(y)=0$
$y=13$: $f(y)=3$ – подх все, кроме 13; 17; 19; 23 – 20 чисел
$y=14$ $f(y)=f(7)=1$ – 11 чисел подх +
$y=15$ $f(y)=f(3)+f(5)=f(5)=1$ – 11 чисел подх. +
$y=16$ $f(y)=0$
$y=17$ $f(y)=4$ – подх все, кроме 13; 19 и 23 – 21 число
$y=18$ $f(y)=0$
$y=19$ $f(y)=4$ – подх все, кроме 17 и 23 – 21 число
$y=20$ $f(y)=f(5)=1$ – 11 чисел подх +
$y=21$ $f(y)=f(7)=1$ – 11 чисел подх +
$y=22$ $f(y)=f(11)=2$ – 18 чисел подх. +
$y=23$ $f(y)=5$ – подходят все, кроме 23 – 23 числа
$y=24$ $f(y)=0$

Всего: $7\cdot 11+2\cdot 18+2\cdot 21+23+20=77+36+42+23+20=$

$=100+78+20=198$

Ответ: 198 пар.

Задача 4.



Дано:
$CD=8$
$DB=17$
Окр $(O_1;r)=\omega$
Окр $(O;R)-\Omega$
BC – касается ω
ω касается Ω в т. A

Найти:
а) $R;r$
б) $\angle AFE$
в) S_{AEF}

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:

а) 1. Т.к A – точка касания, то радиус AO_1 лежит на $AO \Rightarrow O_1 \in AB$.

2. $\triangle CBA \sim \triangle DBO_1$, т.к $\angle B$ – общий; $\angle BDO_1 = 90°$, т.к O_1D – радиус, а BD – касательная;

$\angle BCA = 90°$, т.к опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BDO_1 = \angle BCA$

и $\triangle CBA \sim \triangle DBO_1$ по двум углам

$\Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{AB}{BO_1}$; $BO_1 = 2R - r$, $AB = 2R$

$\Rightarrow \frac{BD + DB}{DB} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{17+8}{17} = \frac{25}{17}$

$34R = 50R - 25r \Rightarrow \cancel{R = \frac{16}{25}r}$ $R = \frac{25}{16}r$; $r = \frac{16}{25}R$.

3. $\triangle BDO_1$: $BO_1 = 2R - r = \frac{34}{16}r$; $DO_1 = r$ по постр.

$BD^2 + O_1D^2 = BO_1^2$ по т. Пифагора

$\Rightarrow 17^2 = \left(\frac{34}{16}r\right)^2 - r^2 = r^2\left(\frac{34^2-16^2}{16^2}\right) = r^2 \cdot \frac{18 \cdot 50}{16^2} = \frac{36 \cdot 25}{16^2} r^2$

$\Rightarrow r \cdot \frac{6 \cdot 5}{16} = 17$; $r = \frac{16 \cdot 17}{30} = \frac{272}{30} = \frac{136}{15}$

$R = \frac{25}{16}r = \frac{25 \cdot 17}{30} = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6}$

б) 1. $\triangle DCA$ по т. Пифагора: $DA = \sqrt{CA^2 + DC^2}$

Из подобия $\triangle CBA \sim \triangle DBO$: $\frac{CA}{DO_1} = \frac{BC}{BD} = \frac{25}{17} \Rightarrow CA = \frac{25}{17}r =$
$= \frac{85 \cdot 16}{30} = \frac{5 \cdot 16}{6} = \frac{40}{3}$

$\Rightarrow DA = \sqrt{\frac{40^2}{9} + 64} = \sqrt{\frac{1600 + 9 \cdot 64}{9}} = \sqrt{\frac{16(100-4)}{9}} = \sqrt{\frac{64(25-4)}{9}} =$
$= \frac{8}{3}\sqrt{24} = \frac{16}{3}\sqrt{6}$

2. По св-ву хорд. $ED \cdot DA = CD \cdot BD \Rightarrow ED = \frac{CD \cdot BD}{DA} =$
$= \frac{17 \cdot 8 \cdot 3}{16\sqrt{6}} = \frac{17 \cdot 3}{2\sqrt{6}} = \frac{17 \cdot 3\sqrt{6}}{12} = \frac{17\sqrt{6}}{4}$

3. $\triangle BEA$ $\angle BEA = 90°$, т.к. опирается на диаметр.

$\Rightarrow \sin(\angle EBA) = \frac{EA}{BA} = \frac{ED + DA}{BA}$

$ED + DA = \frac{17}{4}\sqrt{6} + \frac{16}{3}\sqrt{6} = \frac{17 \cdot 3 + 16 \cdot 4}{12}\sqrt{6} = \frac{51 + 64}{12}\sqrt{6} = \frac{115}{12}\sqrt{6}$

$BA = 2R = \frac{85}{3}$

$\sin(\angle EBA) = \frac{115\sqrt{6} \cdot 3}{12 \cdot 85} = \frac{23 \cdot \sqrt{6}}{4 \cdot 17} = \frac{23\sqrt{6}}{68}$

4. $\angle EBA = \angle EFA$, т.к. опираются на дугу EA $\Rightarrow$

$\angle EFA = \angle EBA = \arcsin\left(\frac{23\sqrt{6}}{68}\right)$

1) $\angle \triangle AD D_1 \sim \triangle AEF$, т.к.: $\angle A$ - общий, - $DD_1 \parallel EF$; т.к. $DD_1 \perp BC$ и $EF \perp BC$ $\Rightarrow$

$\frac{EA}{ED} = \frac{CD}{CP}$, т.к. CD - высота $\triangle ADD_1$, а CP - высота $\triangle AEF$

$EA = \frac{115}{12}\sqrt{6}$ $\qquad 8 \cdot \frac{\frac{115}{12}\sqrt{6}}{\frac{17\sqrt{6}}{4}} = \frac{8 \cdot 115\sqrt{6} \cdot 4}{12 \cdot 17 \cdot \sqrt{6}} = \frac{8 \cdot 115 \cdot 4}{51} = \frac{920}{51}$

$\Rightarrow CP = \frac{CD}{ED} \cdot EA = \cancel{\frac{8 \cdot \frac{17\sqrt{6}}{4} \cdot 12}{115\sqrt{6}}} = \cancel{\frac{2 \cdot 17 \cdot 12}{115}} = \cancel{\frac{204}{115}}$

2. Из соотношения хорд: $EP \cdot PF = BP \cdot PC$

$EP = \sqrt{ED^2 - PD^2}$ по т. пифагора. ; $PD = PC - DC = \cancel{\frac{204}{115}} - 8 =$
$= \frac{920}{51} - 8 = \frac{920 - 408}{51} =$
$= \frac{512}{51}$

$BP = BD - PD \Rightarrow$

$(BD - PD)(CD + PD) = \sqrt{DE^2 - PD^2} \cdot PF$

$PF = \left(17 - \frac{512}{51}\right) \cdot \frac{920}{51} \Big/ \sqrt{\frac{17^2 \cdot 6}{4} - \frac{512^2}{51}}$, считая, что PF - известно

$EF = PF + EP$

$\sin(\angle EAF) = \frac{EF}{2R}$

$\Rightarrow \angle EAF = \arcsin\left(\frac{EF}{2R}\right) \Rightarrow \angle FEA = 180 - \angle EAF - \angle EFA$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \sin(EAF) \cdot EF \cdot EA = \frac{1}{2}\sin\left(\arcsin\left(\frac{EF}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{23\sqrt{6}}{68}\right)\right) \cdot EF \cdot EA$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle EFA = \arcsin\left(\frac{23\sqrt{6}}{68}\right)$; $S = \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(\frac{EF}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{EF}{2R}\right)\right) \cdot EF \cdot EA$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

Рассмотрим функции:

$y = \frac{12x+11}{4x+3}$; $y = -8x^2-30x+4$

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$f'(x) = \frac{48x+36-48x-44}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2} \Rightarrow$ функция убывает на всем $D(f)$

Нули: $\frac{12x+11}{4x+3} = 0$; $x = -\frac{11}{12}$

Асимптоты (при $x \to -\infty$; т.к. $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{12x+11}{4x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty}(3 + \frac{2}{4x+3}) = 3 \Rightarrow 3$ - асимпт.

$f(-\frac{3}{4}) = \frac{-9+11}{0} \to \infty$

$f(-\frac{11}{4}) = \frac{-33+11}{-8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

$f(x) = -8x^2-30x-17$ - парабола, ветви вниз

$f'(x) = -16x-30$; $f'(x) = 0$: $x = -\frac{30}{16} = -\frac{7,5}{4}$

Нули: $-8x^2-30x-17 = 0$

$\frac{D}{4} = 225-17\cdot8 = 225-136 = 89$

$x = \frac{15 \pm \sqrt{89}}{8} \Rightarrow$ на участке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ ось x не пересек.

$f(-\frac{3}{4}) = 1$; $f(-\frac{11}{4}) = 5$

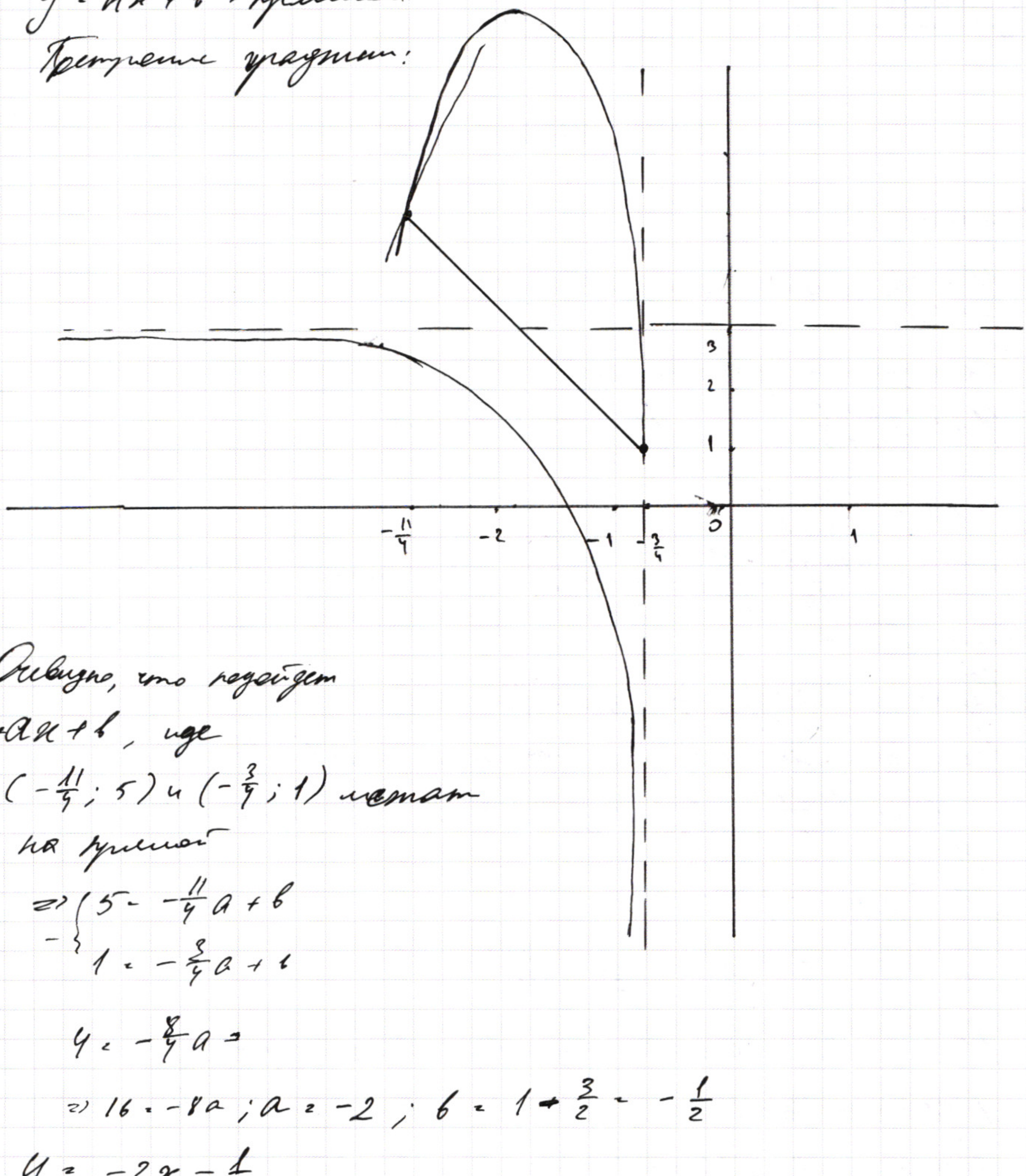
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$y = ax + b$ - прямая

Построим график:



Очевидно, что подойдет $y = ax + b$, где $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ лежат на прямой

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases} -$$

$$4 = -\frac{8}{4}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = -8a;\ a = -2;\ b = 1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = -2x - \frac{1}{2}$$

~~Докажем, что~~ она $\overset{\text{не}}{}$ касается $\frac{12x+11}{4x+3} \Rightarrow$ $\overset{\text{не}}{}$ является единственным решением

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 12x + 11 = -8x^2 - 2x + 6x - \frac{3}{2}$$

$$16x^2 + 8x + 12{,}5 = 0$$

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

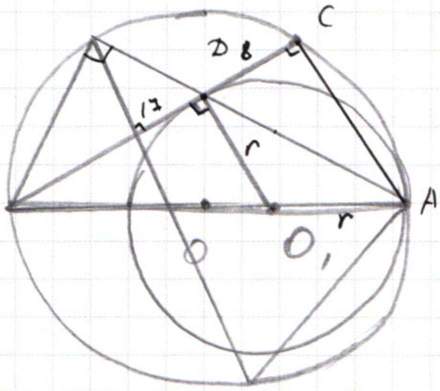
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AC = \sqrt{64+}$

$AC = \frac{25}{16} \cdot r \cdot \frac{17 \cdot 25}{4\sqrt{18}}$

$AD = \sqrt{64 + \frac{17^2 \cdot 25^2}{16 \cdot 18}}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(ab) = [\frac{ab}{4}]$

$f(a) \leq \frac{a}{4}$

$f(b) \leq \frac{b}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{4} + \frac{b}{4} \leq ab/4$

$f(ab) \leq \frac{ab}{4}$ $a+b \leq ab$

$f(x/y) < 0 \Rightarrow [\frac{x}{4y}] < 0$

$f(x/y) = [\frac{x}{4y}] < 0$

x/y – не простое $\Rightarrow$ пары вида $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{1}$; $\cancel{\frac{5}{1}; \frac{7}{1}; \frac{11}{1}; \frac{13}{1}}$; $\cancel{\frac{17}{1}; \frac{19}{1}; \frac{23}{1}; \frac{4}{2}}$

1 – 24 пары
2 – 12 пар
3 – 8 пар
5 – 4 пары
7 – 3 пары
11 – 2 пары
13 – 1 пара
17 – // –
19 – // –
23 – // –

$24 + 12 + 8 + 4 + 3 + 2 + 1 \cdot 4 = 44 + 3 + 10 = 57$ пар.

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$ ~~...~~

$f(1/y) = f(1) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(1) = 0$

~~$f(p)$~~ $= f(\frac{1}{y})$

$f(y\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

Если число не пр., то оно – сумма пр.:

$\frac{x}{y}$ $\cancel{x = 4a + m}$; ~~...~~ $y = 4f + l$

$f(a)$, где a; $\{b_1; c_1; d_1\}$

$f(a) = f(b_1) + f(c_1) + f(d_1)$ $b_1; c_1, d_1$ – пр.

$f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$

$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$

$f(19) = 4$
$f(23) = 5$

$f(x;11) = 2$
$f(x;7) = 1$
$f(x;5) = 1$
$f(x;3) = 0; 1$

$(x;2) = 0; 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{-9+11}{-3+3}$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ $y' = -16x-30$ $-\frac{11}{4}: \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

$-8x^2-30x-17=0$ $y'=0 \Rightarrow 16x+30=0$ $-3{,}5$

$x^2+\frac{30}{8}x+\frac{17}{8}=0$ $x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{3{,}5}{4}$

$\cancel{x = \frac{22}{8}}$

$x = -\frac{6}{8}$

$-8\frac{9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17=$

$-4{,}5+22{,}5-17=1. \Rightarrow -8x^2-30x+4 \ge 0$

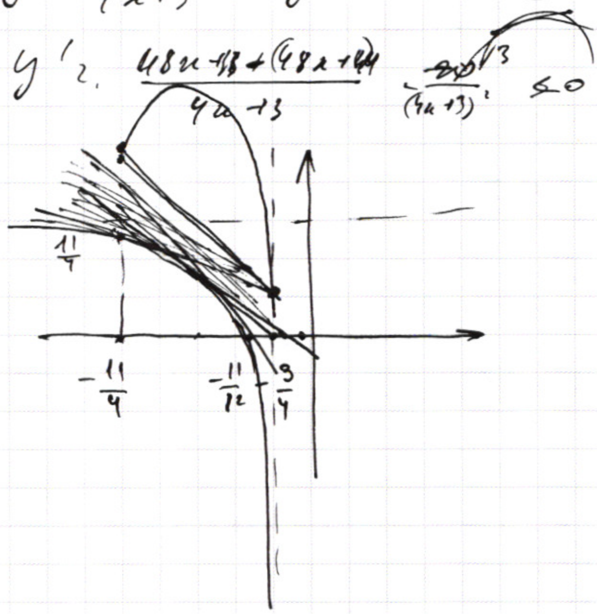
$y=\frac{12x+11}{4x+3}$ $y=0 \Rightarrow x = -\frac{11}{12}$ $x=-\frac{3}{4}$ нет

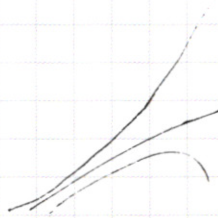
$-\frac{8\cdot 121}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17=$

$=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=0$

$\frac{44}{2}-17=5$

$y' = \frac{48x+36-(48x+44)}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2} \le 0$





$-8x^2-30x-17=0$

$\frac{D}{4}=225-8\cdot 17=89$

$x=\frac{15\pm\sqrt{89}}{-8}$ $\frac{3}{4}$ -3

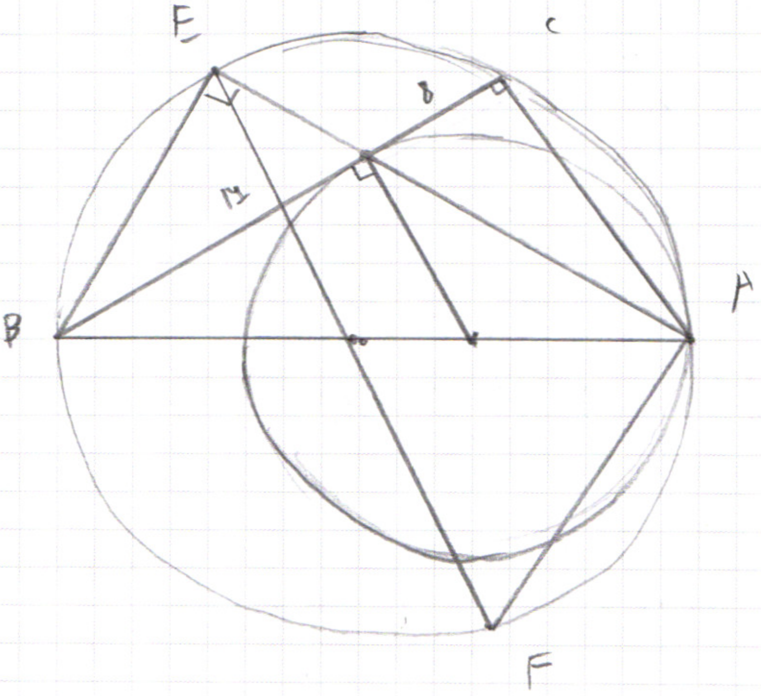
lim $x \to \infty$ $\frac{12x+9}{4x+3}+\frac{2}{4x+3}$

$-\frac{b}{2a}=\frac{30}{-16}=-3{,}5$ $3+0$

$-\frac{8\cdot 30^2}{16^2}+\frac{30\cdot 30}{16}-17$

$136 \,|\, 16$

$\frac{\times 16}{\;\;17}$
112
16
272



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$~~ $\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\cancel{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \pm\cancel{\frac{2\sqrt6}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\beta \pm \frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta$~~ $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\sin^2\beta \pm \frac{4}{\sqrt5}\sin\beta\cos\beta + 2\sin 2\cos\beta = -\frac{4}{5}$

2. $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$

$(x-2)^2+3(y-1)^2 = 25$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2 = x(y-1)-2(y-1)$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$ $\quad$ ~~$x-2 = \frac{(x-2y)^2}{(y-1)}$~~

$(x-2)(y-1)\geq 0$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$ $\quad x-2y = x-2+(2y-2) =$

$(x-2)^2+3(y-1)^2 = 25$ $\quad = ((x-2)-2(y-1)) = x-2-2y+2$

$\begin{cases} ((x-2)-2(y-1))^2 = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+3(y-1)^2 = 25 \end{cases}$ $\quad a = x-2$, $b = y-1$

~~$a=2, b=1$~~

$\begin{cases} ab\geq 0 \\ (a-2b)^2 = ab \\ a^2+3b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a^2-4ba+4b^2 = ab$ $\quad \begin{cases} a^2+4b^2 = 5ab \\ a^2+3b^2 = 25 \end{cases}$

$a^2-5ab+4b^2 = 0$

отн. a:

$D = 25b^2-16b^2 = 9b^2$ $\quad b^2 = 5ab-25$

$a = \frac{5b\pm 3|b|}{2}$

~~$15ab+100+15a-7$~~

$b>0$: $a = 4b$ – сов.

$b<0$: $a = b$ – сов.

$a^2+20ab-100 = 5ab \Rightarrow a^2 = -15ab+100$

$a=4b$
$b\neq 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a^2+3b^2=25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 16b^2+3b^2=25 \\ b^2+3b^2=25 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{\frac{25}{19}}=\pm\frac{5}{\sqrt{19}} \\ b=\frac{5}{\sqrt{4}}=\pm 2{,}5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\pm\frac{20}{\sqrt{19}} \\ a=\pm 2{,}5 \end{array}\right.$$

2 ✓

3. ✓ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

1) $x^2+18x>0$ $\quad x(x+18)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;\infty)$

Прологарифм. по 5 при $x>0$

$\log_{12}(x^2+18x)\cdot 1+\log_5(x^2)\geq\log_{12}13\cdot\log_5(x(x+18))-\log_5 18x$

$\log_{12}x+\log_{12}(x+18)+2\log_5 x\geq\log_{12}13\cdot\log_5 x+\log_{12}13\cdot\log_5(x+18)-\log_5 18-\log_5 x$

$\log_{12}5\cdot\log_{12}(x)+\log_{12}5\cdot\log_{12}(x+18)+2\log_{12}x\geq\log_{12}13\cdot\log_{12}x+\log_{12}13\log_{12}(x+18)-\log_{12}(18x)$

$t=x^2+18x$

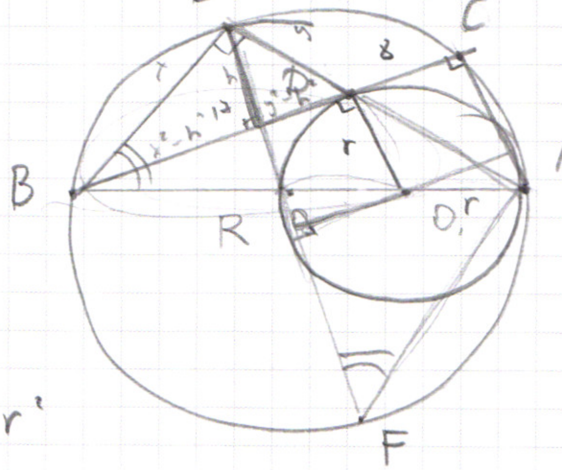
$5^{\log_{12}(t)}+t\geq|t|^{\log_{12}13}$ $\quad t>0$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13} \Rightarrow \log_{12}t+\log_5 t\geq\log_{12}13\log_5 t$

$\log_{12}5\cdot\log_{12}t+\log_{12}t\geq\log_{12}13\cdot\log_{12}t$ $\quad \log_{12}t\geq\log_5 t(\log_{12}13-1)$

$\log_{12}t(\log_{12}5+1-\log_{12}13)\geq 0$ $\quad (\log_{12}\frac{5}{13}+1)$ $\quad \log_{12}(\frac{5\cdot 12}{13})\geq 0$

$t>1$ $\quad t=1$ — удов.
$t>1 \Rightarrow t\geq 1$



$\frac{17}{25}=\frac{r}{CA}=\frac{2R-r}{2R}$ $\quad \frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R}$

$34R=50R-25r$

$r=\frac{16}{25}R$

$R=\frac{25}{16}$ $\quad R=\frac{25}{16}r$

$2\cdot 17R=225R-25R$

$\Rightarrow 25r=16R$

$r=\frac{16}{25}R$

$r^2+17^2=(2R-r)^2=(2R-\frac{16}{25}R)=$

$=\frac{34}{25}R^2$ $\quad (\frac{50}{16}r-r)^2=\frac{34}{16}r^2$

$17^2=\frac{18}{16}r^2$ $\quad 17=\frac{\sqrt{18}}{4}r$

17^2+r^2

$(8+x)(17+x$

$r=\frac{4\cdot 17}{\sqrt{18}}$ $\quad \frac{50}{16}-1=\frac{34}{16}r^2-r^2$

$=\frac{18}{16}r^2$

17
12
34
17
204

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)