МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{-2}{17}$

$\sin\varphi+\sin\psi=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{1}{17}\to\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\to\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\to tg\,2\beta=\pm 4$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\to tg(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{1}{4}=\frac{tg2\alpha+tg2\beta}{1-tg2\alpha\, tg2\beta}$

~~1) $tg\,2\beta=4$, $tg(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{4}$~~

~~$\frac{tg2\alpha+4}{1-4tg2\alpha}=\frac{1}{4}\to 4tg2\alpha+16=1-4tg2\alpha\to 8tg2\alpha=-15$~~

$tg(2\alpha+2\beta)-tg(2\alpha+2\beta)\,tg2\alpha\,tg2\beta=tg2\alpha+tg2\beta$

$tg(2\alpha+2\beta)-tg2\beta=tg2\alpha(1+tg(2\alpha+2\beta)\,tg2\beta)$

$tg\,2\alpha=\frac{tg(2\alpha+2\beta)-tg2\beta}{1+tg(2\alpha+2\beta)\,tg2\beta}$, $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\begin{array}{r} 225\\ \times\ 4\\ \hline 900\end{array}$

1) $tg(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{4}$, $tg2\beta=4$

$tg2\alpha=\frac{\frac{1}{4}-4}{1+1}=-\frac{15}{8}$

$\begin{array}{r} 34\\ \times\ 34\\ \hline 136\\ 102\ \\ \hline 1156\end{array}$

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=-\frac{15}{8}\to 15-15tg^2\alpha=-16tg\alpha$

$tg^2\alpha-\frac{16}{15}tg\alpha-1=0\to$ По теореме Виета: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{16}{15}\\ x_1x_2=-1\end{cases}$

$D=\frac{256}{225}+4=\frac{1156}{225}$

$tg\alpha=$ ~~$\pm\frac{\sqrt{1156}}{15}$~~ $\frac{\frac{16}{15}\pm\frac{\sqrt{1156}}{15}}{2}=\frac{16\pm\sqrt{1156}}{30}=\frac{16\pm 34}{30}=\frac{5}{3};\ -\frac{6}{10}=\frac{5}{3},-\frac{3}{5}$

2) $tg(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{4}$, $tg2\beta=4$

$tg2\alpha=\frac{-\frac{1}{4}-4}{1-1}\to\infty\to 2\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in z\to\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in z\to tg\alpha=\pm 1$

3) $tg(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{4}$, $tg\,2\beta=-4$

$tg\,2\alpha=\frac{\frac{1}{4}+4}{1-1}\to\infty\to 2\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\to tg\,\alpha=\pm1.$

4) $tg(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{4}$, $tg\,2\beta=-4$

$tg(2\alpha)=\frac{-\frac{1}{4}+4}{1+1}=\frac{15}{8}$

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{15}{8}\to 1-tg^2 2\alpha=\frac{16}{15}tg\alpha\to tg^2\alpha+\frac{16}{15}tg\,\alpha-1=0$

~~По т-ме Виета:~~ $\cancel{\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{15}{16}\\ x_1x_2=-1\end{cases}\to}$

$\cancel{D=\frac{225}{256}+4=\frac{1156}{225}\to tg\alpha=\frac{-16\pm\sqrt{1156}}{15}}$ $\boxed{1156=34^2}$

~~По т-ме Виета:~~ $\cancel{\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{16}{15}\\ x_1x_2=-1\end{cases}\to tg\alpha=\frac{-1}{15}}$

$D=\frac{256}{225}+4=\frac{1156}{225}\to tg\alpha=\frac{-\frac{16}{15}\pm\frac{\sqrt{1156}}{15}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{1156}}{30}=\frac{-16\pm34}{30}=$

$=-\frac{5}{3};\ \frac{6}{10}=$

$=-\frac{5}{3};\ \frac{3}{5}$

Ответ: $\cancel{-16-\sqrt{1156}}$ $-\frac{5}{3};\ -\frac{3}{5};\ -1;\ 1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}.$

№2.

$\begin{cases}y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$ $\begin{cases}y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}\\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=45+9+36=100\end{cases}$

$y-6x=y-6x-6+6=(y-6)-6(x-1)$

Замена: $a=x-1$, $b=y-6$

$\cancel{\begin{cases}b-a=\sqrt{ab}\\ 9a^2+b^2=100\end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases}b^2-2ab+a^2=ab,\ b-a\geq0,\ ab\geq0\\ 9a^2+b^2=100\end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases}8a^2=100-3ab\to b=\frac{100-8a^2}{3a}=\frac{100}{3a}-\frac{8a}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{100}{a}-8a\right)\\ 9a^2=(10-b)(10+b)\end{cases}}$

(При $a=0$: $\begin{cases}b=0 \text{ или } b=1\\ b=\pm10\end{cases}$ – не подходит)

$\cancel{\begin{cases}b=\frac{1}{3}\left(\frac{100}{a}-8a\right)\\ 9a^2=\frac{30a-100+8a^2}{3a}\cdot\frac{30a+100-8a^2}{3a}\end{cases}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (9a^2)^2 = \dfrac{(30a)^2 - (100-8a^2)^2}{1} \\ b = \dfrac{100-8a^2}{3a} \end{cases}$$

Замена $t = a^2$:

$81t^2 = 900t - 10000 + 1600t - 64t^2$

$145t^2 - 2500t + 100^2 = 0$

$29t^2 - 500t + 2000 = 0$

$D = 25^2 \cdot 100^2 - 4 \cdot 29 \cdot 2000 = 100^2(25 - 29 \cdot 0{,}8) = 100^2(25 - 23{,}2) = 100^2 \cdot 1{,}8$

$t = \dfrac{500 \pm 100 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}}{2 \cdot 29} = \dfrac{500 \pm \frac{3}{\sqrt5}100}{48} = \dfrac{250 \pm \frac{150}{\sqrt5}}{29} = \dfrac{250 \pm 30\sqrt5}{29}$

$\sqrt5 < 3 \to 30\sqrt5 < 90 \to 250 - 30\sqrt5 > 0$

$a = \sqrt{t} = \sqrt{\dfrac{250 - 30\sqrt5}{29}}$

$\begin{array}{r} 7 \\ \times 29 \\ 0{,}8 \\ \hline 23{,}2 \end{array}$

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 - 12ab + 36a^2 = ab, \ b - 6a \geq 0, \ ab \geq 0 \\ 9a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

$9a^2 + 13ab - 36a^2 = 100 \to -13ab = -100 - 27a^2$

$b = + \dfrac{100 + 27a^2}{13a}$

$9a^2 - 100 = \dfrac{100^2 + 54a^2 + 27^2a^4}{169a^2}$

Замена $t = a^2$:

$169t(9t - 100) = 100^2 + 54t + 3^6t^2$

$9t^2(81 - 169) + 54t \cancel{+100(100+169)} + 16900t + 100^2 = 0$

$-9t^2 \cdot 88 + t(16900 + 54) + 100^2 = 0$

Решим $b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$ отн. b:

$D = 169a^2 - 4 \cdot 36a^2 = (169 - 144)a^2 = 25a^2$

$b = \frac{13a \pm 5a}{2} = \frac{8a}{2}; \frac{18a}{2} = 4a; 9a$; ~~($b = 4a$) не подходит т.к.~~

Подставим в $9a^2 + b^2 = 100$:

1) $9a^2 + 16a^2 = 100 \to 25a^2 = 100 \to a = 2, b = 8$ ($a=2, b=8$) — не подходит, т.к. $\frac{16}{2} - \frac{4 \cdot 6}{2} < 0$. Из этого случ. подх. $a = -2, b = -8$ $\left(\begin{matrix} -8 + \frac{24}{2} > 0 \\ -\frac{16}{2} \cdot \left(-\frac{4}{2}\right) > 0 \end{matrix}\right)$

2) $9a^2 + 81a^2 = 100 \to a^2 = \frac{100}{90} = \frac{1}{9}$

$a = \pm\frac{1}{3}, b = \pm 3$

$a = -\frac{1}{3}, b = -3$ — не подходит $\left(-3 + \frac{6}{3} < 0\right)$

$a = +\frac{1}{3}, b = 3$ — подходит $\left(\begin{matrix} 3 - \frac{6}{3} > 0 \\ 3 \cdot \frac{1}{3} > 0 \end{matrix}\right)$

~~Ответ:~~

Обратная замена: 1) $x = -2 + 1 = -1$, $y = -8 + 6 = -2$

2) $x = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$, $y = 3 + 6 = 9$

Ответ: $(-1; -2)$, $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

№5.

Если $f(ab) = f(a) + f(b)$, то $f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \to f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad f(x) < f(y)$

Тогда для простых в диапазоне:

p:	5	7	11	13	17	19	23
f(p)	1	1	2	3	4	4	5

Для любого составного: $f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$

Тогда для чисел в диапазоне $[4; 28]$:

z	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
f(z)	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1

9 „0", 8 „1", 3 „2", 2 „3", 2 „4", 1 „5" — 25 чисел

$5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$

Способы: „5": 24, „4": $2 \cdot 22 = 44$, „3": $2 \cdot 20 = 40$, „2": $3 \cdot 17 = 51$

„1": $8 \cdot 9 = 72$, „0": 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всего способов: $24+44+40+51+72=68+72+91=140+91=231$

Ответ: 231.

№4.

O_1 - ц. Ω, O_2 - центр ω

$AB \perp a$, где a - общ. кас.

$O_2A \perp a \to O_2 \in AB$

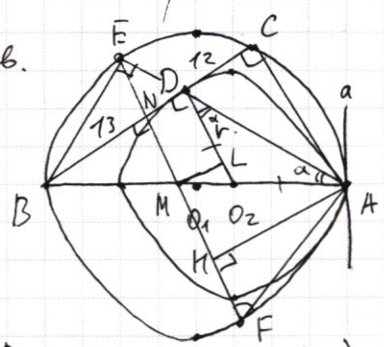
Проведём AC, $\angle C$ опирается на диаметр $\to \angle C = 90°$

Пусть радиусы окр. Ω и ω — R и r соотв.

Тогда $O_2B = 2R - r$, $AB = 2R$

Для $\triangle O_2BD$ т. Пифагора:

$169 = (2R-r)^2 - r^2$



Из подобия $\triangle O_2BD$ и $\triangle ABC$ ($\angle D = \angle C = 90°$, $\angle B$ - общ.):

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25} \to 1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{25} \to \frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$

$r = \frac{24}{25}R \to R = \frac{25}{24}r$

~~$169 = \left(\frac{26}{25}\right)^2 R^2 - r^2$~~ $169 = r^2\left(\left(\frac{25}{24}\cdot 2 - 1\right)^2 - 1\right) = r^2\left(\left(\frac{26}{24}\right)^2 - 1\right) =$

$= r^2\left(\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1\right) = r^2 \cdot \frac{25}{144}$

$r^2 = \frac{169\cdot 144}{25} \to r = \frac{13\cdot 12}{5} = \underline{31{,}2}$

$\times\begin{array}{r}13\\12\\\hline 26\\13\;\\\hline 156\end{array}$

$R = \frac{25}{24}\cdot\frac{13\cdot 12}{5} = \frac{130}{4} = \frac{65}{2} = \underline{32{,}5}$

$\angle AFE$ опирается на дугу AE, $\angle BAD$ на дугу BE

$\cup BE + \cup AE = \pi R \to$ ~~$\angle AFE$~~ $\angle AFE + \angle BAD = \pi$

Для $\triangle ABD$ т. синусов: $\frac{\sin(\angle BDA)}{2R} = \frac{\sin\alpha}{13}$

$\triangle AO_2D$ − р/б $\triangle$ (по определению) $\to \angle O_2DA = \alpha$ $(\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{2R} = \frac{\sin\alpha}{13} \to \frac{\cos\alpha}{2R} = \frac{\sin\alpha}{13} \to tg\,\alpha = \frac{13}{2R} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$

$tg\angle AFE = ctg\,\alpha = 5 \to \angle AFE = \underline{arctg\,5}$

Проведём $AH \perp EF$; $EF \cap BC = N$, $EF \cap AB = M$,

$\triangle EBA$ − прямоугольн., $\triangle MLO_2 \sim \triangle BDO_2$, $EM \parallel O_2D\ (\perp BC)$

Тогда $\angle MEA = \alpha$ (соответств.) $\to \triangle MEA$ − р/б $\triangle$ (по признаку).

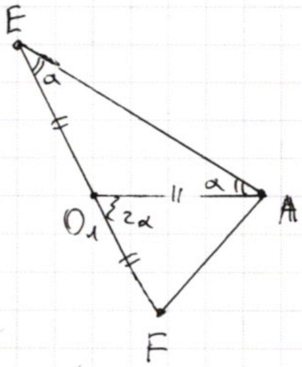
$\downarrow$

M − середина AB (медиана в прям. $\triangle EBA$) $\to M \equiv O_1$

$\angle AO_1F = 2\alpha$ (по т. о вн. угле)

$\downarrow$

$\angle OFA = 90° - \alpha = \angle O_1AF \to \angle A = \frac{\pi}{2}$



$\triangle AEF$ − прямоугольный

$tg\,\alpha = \frac{1}{5} \to \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

(α − острый)

$AF = 2R\sin\alpha$, $AE = 2R\cos\alpha$

$S = \frac{1}{2}\cdot 4R^2\cdot\sin\alpha\cos\alpha = 2R^2\sin\alpha\cos\alpha$

$S = 2\cdot\frac{65^2}{4}\cdot\frac{5}{26} = \frac{13^2\cdot 5^3}{4\cdot 13} = \frac{13\cdot 5^3}{4} = \frac{13\cdot 125}{4} = 406{,}25.$

125 | 4
12 | 31,25
5
4
100
100
0

31,25
× 13
9375
3125
406,25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$tg\,\alpha = ?$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)$ ($\sin\alpha$, $-\sin\beta$)

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17}$

$\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$ $\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2} = \frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha = 0 \to \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 4\beta}{2} = -\frac{1}{17}$ $\quad 12$

$\times\begin{array}{r}34\\34\\\hline 136\\102\\\hline 1156\end{array}$

$\sin 2\alpha\left(\cos 2\beta + \sin 2\beta\, ctg\, 2\alpha\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\left(\cos 4\beta + \sin 4\beta\, tg\, 2\alpha + 1\right) = -\frac{2}{17}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\frac{\cos 2\beta}{} = -\frac{}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{-9+25}{15} = \frac{16}{15}$

$\Downarrow$

$\sin 2\alpha \neq 0$

$-\frac{18}{30} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad$ ~~$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$~~

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\cos\left((\alpha-\beta)\right) =$

$= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\frac{\pi}{2} + \sin 0 = 1 = 2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} = 1$ $\quad tg\,2\alpha = \frac{tg(2\alpha+2\beta) - tg\,2\beta}{1+tg(2\alpha+2\beta)\,tg\,2\beta}$

$\sin\pi + \sin 0 = 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right) = 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-2}{17} \to \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}}$ ~~$\sin(\alpha)+\sin\alpha\cos\beta+$~~ $\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg} 2\beta = \pm 4$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos\beta = \cos(\pi-\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi+\beta\right) = \sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \beta-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi-\beta+\frac{\pi}{2} = \cancel{\frac{3\pi}{2}}-\beta-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

~~$2\alpha = -\beta-\frac{\pi}{2}+2\pi k$~~

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta) = \mp\frac{1}{4}$

~~$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \mp\frac{1}{4}$~~

~~$1-\operatorname{tg}^2 x = \pm 8\operatorname{tg} x$~~

~~$\operatorname{tg}^2 x \pm 8\operatorname{tg} x - 1 = 0$~~ ~~$D = 64+4 = 68$~~

$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \pm 4}{1 \pm 4\operatorname{tg} 2\alpha} = \pm\frac{1}{4}$

~~tg~~

$\frac{\pm 4\operatorname{tg} 2\alpha \mp 16}{4} = 1 \pm 4\operatorname{tg} 2\alpha$

1) $\operatorname{tg} 2\beta = +4$, $\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{4}$

$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + 4}{1-4\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{4} \to 4\operatorname{tg} 2\alpha + 16 = 1 - 4\operatorname{tg} 2\alpha$

$8\operatorname{tg} 2\alpha = -15 \to \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{15}{8}$ 8, 15, 17?

2) $\operatorname{tg} 2\beta = -4$ $\operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)$

№2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy+6-(y+6x)} = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 54+36 = 100 \end{cases}$$

$9(x-1)^2+(y-6)^2 = 100$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Замена: $a = x-1$, $b = y-3$

$x = a+1$, $y = b+3$

$$\begin{cases} \cancel{b+3-6a-b = \sqrt{ab}} \\ \cancel{9a^2+b^2=100} \end{cases} \quad \begin{cases} b-6a-3 = \sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=100 \to b=\sqrt{100-9a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+a^2=+3ab \\ b^2+9a^2=100 \end{cases} \to 8a^2 = 100-3ab \to$$

$$b = \frac{100-8a^2}{3a} \qquad 10-b = \frac{300a-100+8a^2}{3a}$$

$$b^2-a^2 = 10(10-a^2) = (b+a)\cdot 3ab$$

$$100-a^2 = 3ab^2+3a^2b$$

$$100-3ab^2 = a^2(1+3b)$$

$[x] \le x$

$10 \quad (9a^2)^2 = (30a)^2-$

..., 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

$$9a^2 = 100 - \frac{1}{9a^2}(100-8a^2)^2 -$$

f: 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5

$$81a^4 = 900a^2 - 10000 + 1600a^2 - 64a^4$$

$f(1)=0$

$29 \times 0{,}8 = 23{,}2$

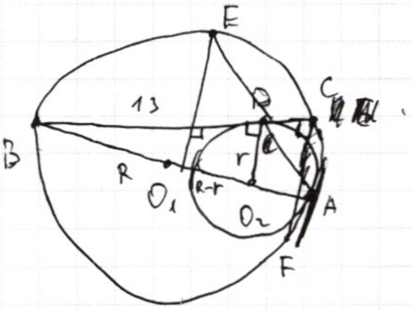
$16+7=23$

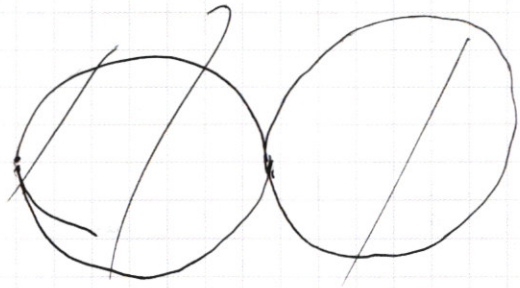
$25-23{,}2 = 1{,}8 = 9\cdot 0{,}2$

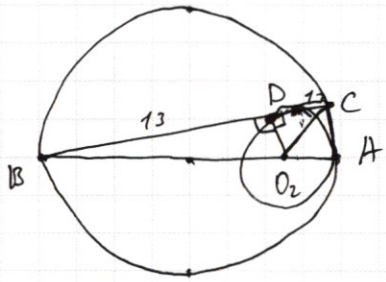
$169 - 4\cdot 36 = 25$

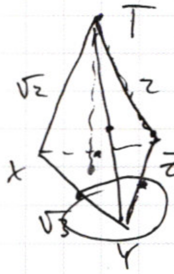
$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \to f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right]$$


E
C
13
B
R
O1
r
R-r
O2
A
F




D
C
13
B
O2
A


T
√2
2
X
Z
√3
Y