

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{Пусть } a = x - 2, \quad b = y - 1$$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$$a \cdot b \geq 0 \begin{cases} \rightarrow a \geq 0, b \geq 0 \\ \rightarrow a \leq 0, b \leq 0 \end{cases}$$

~~if a < 0, b < 0 => a > 2b~~

$$\rightarrow a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow x \geq 2, y \geq 1$$

$$a - 2b - \sqrt{ab} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 - \frac{3b}{4} = 0$$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{3b}{4}$$

$$\left|\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right| = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2} = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{2} - \sqrt{a} = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{b}$$

$$-\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$a = 4b$$

$$a = b = 0$$

$$x - 2 = 4y - 4$$

не реш-е тк $0^2 + 9 \cdot 0^2 \neq 25$

$$x = 4y - 2$$

$$4y - 2 - 2y = \sqrt{4y^2 - 2y - 4y + 2 - 2y + 2}$$

$$2y - 2 = \sqrt{4(y-1)^2}$$

$$2(y-1) = 2(y-1)$$

верно

т.к $y \geq 1$ $|2(y-1)| = 2(y-1)$

$$16y^2 - 16y + 4 + 9y^2 - 16y + 8 - 18y = 12$$

$$25y^2 - 50y = 0$$

$$y = 0 \text{ не подх. т.к } y \geq 1 \quad y = 2$$

$$y=2 \Rightarrow x=6$$

при $a \geq 0, b \geq 0$ реш-е $\begin{matrix} x=6 \\ y=2 \end{matrix}$.

-) $b \leq 0, a \leq 0$

$$a' = -a \quad b' = -b \quad \Rightarrow a' \geq 0, b' \geq 0$$

$$\begin{cases} 2b' - a' = \sqrt{a'b'} & \rightarrow (\sqrt{2b'} - \frac{\sqrt{a'}}{8})^2 = \frac{65a'}{64} \\ (a')^2 + 9(b')^2 = 25 \end{cases}$$

$$|\sqrt{2b'} - \frac{\sqrt{a'}}{8}| = \frac{\sqrt{65} \cdot \sqrt{a'}}{8}$$

$$\sqrt{2b'} - \frac{\sqrt{a'}}{8} = \frac{\sqrt{65} \cdot \sqrt{a'}}{8}$$

$$\frac{\sqrt{a'}}{8} - \sqrt{2b'} = \frac{\sqrt{65} \cdot \sqrt{a'}}{8}$$

$$\sqrt{2b'} = \sqrt{a'} \cdot \left(\frac{\sqrt{65} + 1}{8} \right)$$

$$-\sqrt{2b'} = \left(\frac{\sqrt{65} - 1}{8} \right) \sqrt{a'}$$

$$2b' = a' \left(\frac{\sqrt{65} + 1}{8} \right)^2$$

$$b' = a' = 0$$

$$b' = a' \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{128}$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

$$-b = -a \left(\frac{\sqrt{65} + 1}{128} \right)^2$$

не реш-е

$$b = a \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{128}$$

$$a - 2b = a \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{64} - a \left(\frac{\sqrt{65} + 1}{32} \right)^2 = \sqrt{\frac{a^2 (\sqrt{65} + 1)^2}{128}}$$

$$a^2 \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{1024} = a^2 \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{128}$$

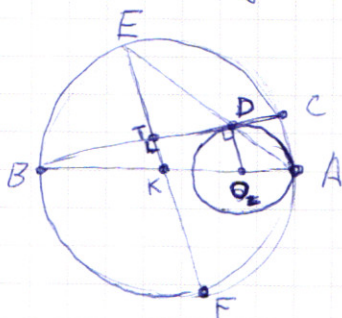
$$a = 0 \Rightarrow 0 - 2b = \sqrt{0}$$

$$b = 0$$

$a = b = 0$ не реш-е

Ans: $\begin{matrix} x=6 \\ y=2 \end{matrix}$.

(4)



$$EF \cap BD = T$$

$$EF \cap AB = K$$

$$O_2 - \text{ц. } \omega$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- $\rightarrow \angle OAD = \alpha \Rightarrow \angle ODA = \alpha$ (т.к. $\triangle OAD$ - μ/δ $OA = OD = r_w$)
- $\rightarrow EF \perp BC$
 $OD \perp BC$ (OD - μ/δ к т.кас.) $\Rightarrow EF \parallel OD \Rightarrow \angle KEA = \angle ODA$
 (соств. при \parallel прямых и секущ.)
- $\Rightarrow \angle KEA = \mu/\delta \Rightarrow EK = KA$
- \rightarrow ~~EF, BA~~
 степенность точки K $\Rightarrow EK \cdot KF = AK \cdot BK$
 $KF = BK \Rightarrow \triangle BKF$ - μ/δ
- $\Rightarrow \angle BKF = \angle EKA = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle EFB = \angle ABF = \alpha$
- $\rightarrow \angle AFB = 90^\circ$ (отпр. на диаметре) $\Rightarrow \angle EFA = 90^\circ - \alpha = \angle AFB - \angle EFB$
 $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ = 180^\circ - \angle FEA - \angle EFA \Rightarrow$ ~~EF~~ - диаметр.
- $\rightarrow EF, BA$ - диаметр $EF \cap BA = K \Rightarrow K$ - центр Ω
- $\rightarrow KT \perp BC \Rightarrow T$ - ср. BC $\Rightarrow BT = TD + DC \Rightarrow BT = 12,5$
 $BT + TD = 17$
 $DC = 8$
 $TD = 4,5$
- $\rightarrow \triangle ETD \sim \triangle ACD$ (по 2 \angle)
 $\angle ADC = \angle EDT$ (верт.)
 $\angle ETD = \angle ACB = 90^\circ$
 (EK \perp BC) (отпр. на диаметре)
- $\Rightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{TD}{DC} = \frac{9}{16}$
- $\rightarrow ED \cdot DA = BD \cdot DC = 17 \cdot 8$ (см. точку D)
- $ED = \frac{17 \cdot 8}{DA}$
- $\frac{17 \cdot 8}{DA^2} = \frac{9}{16}$
- $DA^2 = \frac{16 \cdot 8 \cdot 17}{9}$
 $AD = \frac{8\sqrt{34}}{3}$
- $ED = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{TD}{ED} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \cos(90 - \alpha) = \cos \angle AFE$$

$$\angle AFE = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$$

\rightarrow по т. Пифаг в $\triangle AED$

$$AC^2 + 64 = \frac{64 \cdot 34}{9}$$

$$AC^2 = \frac{64 \cdot 25}{9}$$

$$AC = \frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3}$$

\rightarrow по т. Пифаг в $\triangle ACB$

$$\frac{64 \cdot 25}{9} + 25^2 = AB^2$$

$$25 \left(\frac{64 + 25 \cdot 9}{9} \right) = AB^2$$

$$25 \left(\frac{289}{9} \right) = AB^2$$

$$AB = \frac{5 \cdot 17}{3} = \frac{85}{3} = 2R_{\Omega}$$

$$R_{\Omega} = \frac{85}{6}$$

$\rightarrow \triangle ADO \sim \triangle AEK$ (по $\frac{1}{2}$ угла)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{R_{\Omega}}{R_w}$$

$$AE = \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2} \right) \sqrt{34} =$$

$$AD = \frac{8\sqrt{34}}{3}$$

$$\frac{16 \cdot 34}{8} \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{2} \right) \cdot 3 = \frac{8 + 4,5}{8} = \frac{25}{16}$$

$$\frac{25}{16} = \frac{85}{6R_w}$$

$$150R_w = 16 \cdot 85$$

$$R_w = \frac{16 \cdot 85 \cdot 17}{5 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{136}{15}$$

$$\rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot AE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{25\sqrt{34}}{6} \cdot \frac{85}{3} = \frac{25 \cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$$

Ответ: $R_{\Omega} = \frac{85}{6}$, $R_w = \frac{136}{15}$, $\angle AFE = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$, $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 ①

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

~~$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin(2\alpha + 2\beta)$$~~

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta -$$

$$- \sin 2\alpha \sin^2 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha) \cdot (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta) +$$

$$+ 2 \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$2 \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2 \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

~~$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$~~

$$4 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

$$2 \cos \alpha (2 \sin \alpha + \cos \alpha) = 0$$

$$\cos \alpha = 0, \text{ но тогда } \operatorname{tg} \alpha \nexists$$

$$2 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$$

$$2 \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

$$2 \sin \alpha (2 \cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$2 \cos \alpha + \sin \alpha = 0$$

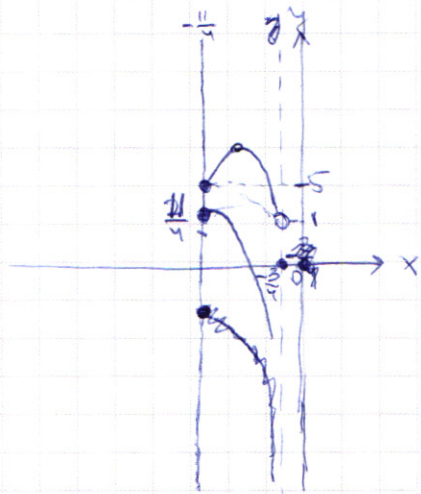
$$2 + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -2$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

⑥ $y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$$y = -8x^2 - 30x - 17$$



~~касательная~~

~~касательная к графику~~

$$y = kx + b$$

$$k = f'(-\frac{11}{4}) = \frac{-8}{(-4 \cdot \frac{11}{4} + 3)^2} = \frac{-8}{(-11+3)^2} = \frac{-8}{64}$$

$$y = -\frac{x}{8} + b$$

$$5 = -\frac{-11}{64} + b$$

$$b = \frac{309}{64}$$

$$y = -\frac{x}{8} + \frac{309}{64}$$

$$y = -\frac{x}{8} + \frac{165}{64}$$

$$y = \frac{8}{64} + \frac{165}{64} = \frac{173}{64}$$

\Rightarrow

$$\frac{11}{4} \leq a \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + b \leq 5$$

$$n < a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + b < 1$$

n — ~~точка~~ пересеч. $x = -\frac{3}{4}$ и касательной к $f(x) = \frac{2}{4x+3}$

точ. перес. Т. $(-\frac{11}{4}, 5)$

$$f'(x) = \frac{-8}{(4x+3)^2}$$

$$\text{кас} = kx + b$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = gx + t \text{ — макс. переж } \left(-\frac{11}{4}; 5\right) \quad g < 0$$

$$5 = \cancel{2} - \frac{11}{4}g + t \quad t = 5 + \frac{11}{4}g$$

$$gx + t = 3 + \frac{2}{4x+3} \quad \text{— корни}$$

$$\cancel{g} \frac{(gx+t)(4x+3) = -12x-11}{4x+3} = 0$$

$$4gx^2 + (3g+4t)x + 3t - 12x - 11 = 0$$

$$D = (3g+4t-12)^2 - 4g \cdot 4(3t-11) = 0$$

~~то~~

$$3g + 20 + 11g - 12$$

$$(14g+8)^2 - 16g\left(\frac{33}{4}g+4\right) = 0$$

$$196g^2 + 224g + 64 - 132g^2 - 64g = 0$$

$$64g^2 + 160g + 64 = 0$$

$$4g^2 + 10g + 4 = 0$$

$$\cancel{g^2 + 2.5g + 1} = 0$$

$$D = 100 - 64 = 36$$

~~то~~

$$g_1 = \frac{-10+6}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow t > 0 \Rightarrow \text{это переж, где } x \geq -\frac{3}{4}$$

$$g_2 = \frac{-16}{8} = -2 \Rightarrow t = -1,5$$

$$y = -2x - 1,5 \quad \cancel{2}$$

$$\text{чп } x = -\frac{3}{4} \quad y = 0 = n$$

$$\Rightarrow \frac{11}{4} \leq a\left(-\frac{11}{4}\right) + b \leq 5$$

$$0 < a\left(-\frac{3}{4}\right) + b < 1$$

$$\frac{11}{4} \leq -\frac{11a}{4} + b \leq 5$$

$$0 < -\frac{3a}{4} + b < 1$$

~~$$\frac{11}{4} < -3,5a + 2b < 6$$~~

~~$$\frac{11}{4} = -3,5a + 2b$$~~

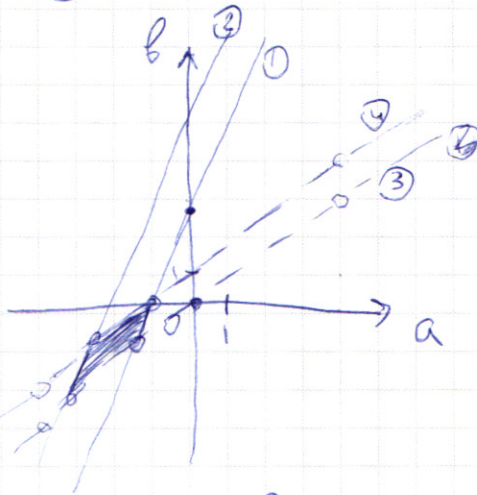
~~$$2b = \frac{11}{8} + \frac{7}{4}a$$~~

$$\frac{11}{4} = -\frac{11a}{4} + b \quad (2) \quad b = \frac{11}{4}a + 5$$

$$(1) \quad b = \frac{11a}{4} + \frac{11}{4}$$

$$(3) \quad b = \frac{3}{4}a$$

$$(4) \quad b = \frac{3a}{4} + 1$$



~~пересек~~ ^{т.} пересек

$$(1) \text{ и } (3)$$

$$(1) \text{ и } (4)$$

$$a = -\frac{11}{8}$$

$$a = -\frac{7}{8}$$

$$b = -\frac{33}{32}$$

$$b = -\frac{21}{32} + 1 = \frac{11}{32}$$

$$A(-\frac{11}{8}, -\frac{33}{32})$$

$$B(-\frac{7}{8}, \frac{11}{32})$$

$$(2) \text{ и } (3)$$

$$(2) \text{ и } (4)$$

$$a = -2,5$$

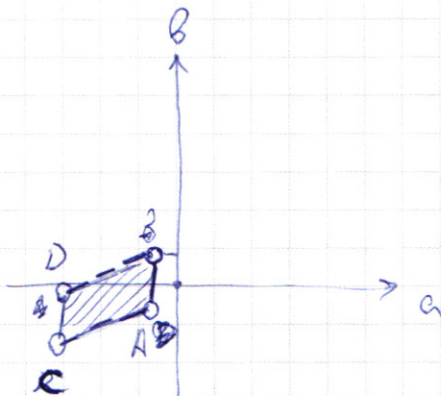
$$a = -2$$

$$b = -\frac{15}{8}$$

$$b = -0,5$$

$$C(-2,5, -\frac{15}{8})$$

$$D(-2, -0,5)$$



Отв: все т. лежащие ^{снаружи} ~~внутри~~ фигуры ABDC и т. лежащие на сторонах AB и CD, не лежащие на верш. A, B, C, D.

$$(3) \quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$$\exists x^2+18x = a > 0$$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13} \quad / : a$$

~~$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$$~~

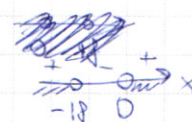
$$a + 5^{\log_{12}a} \leftarrow \text{мон } \uparrow$$

$$a^{\log_{12}13} \leftarrow \text{мон } \uparrow$$

$$x^2+18x > 0$$

$$\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$$

$$x(x+18) > 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ED \cdot AD = BD \cdot AD$
 $ED \cdot AD =$

$\frac{DE}{AD} = \frac{9}{16}$
 $\frac{9AD}{16} = 18DE$
 $\frac{9AD^2}{16} = 8 \cdot 17$

$180 - (90 + 2\alpha)$
 $90 - \alpha$
 $\angle O_2AD = \alpha \Rightarrow \angle O_2DA = \alpha$
 $\Rightarrow \angle FED = \angle O_2DA = \alpha$
 $\Rightarrow EF \cap AB = K$
 $\angle KEA = \alpha, \angle EAO_1 = \alpha$
 $\Rightarrow \angle KEA = \angle EAO_1$
 $\angle AEF = \alpha \Rightarrow \angle AEF - \text{впис.} \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$
 $\Rightarrow EF - \text{диам.} \Rightarrow K - \text{ц. } \Omega$

$x = \frac{\sqrt{17}}{18}$
 $\frac{AD}{DE} = \frac{18}{9/18}$
 $AD \cdot DE = 136$
 $16 \cdot 9x^2 = 136 \cdot 17$
 $x^2 = \frac{8 \cdot 17}{18 \cdot 9}$
 $AD \cdot DE = BD \cdot DC$
 $EK \cdot KF = AK \cdot BK$
 $\Rightarrow BK = KF$

$\triangle BKF \sim \triangle EAF$
 $\Rightarrow \angle KFB = \angle KBF = \alpha$
 $\angle AFK = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle AFB$
 $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$
 $\Rightarrow EF - \text{диам.}$
 $\Rightarrow K - \text{ц. } \Omega$

$25 \cdot 85$
 $125 \cdot 17$
 $1250 + 1000 - 125$
 2125

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) \neq \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 2\beta + \sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1)$$

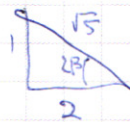
$$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$2\beta < 180^\circ$
 ~~$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$~~

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

~~\Leftrightarrow~~

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \quad (2\beta > 180^\circ)$$

$$2\sin 2\alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = +5\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

$$\sin^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

$$\sin \alpha = 0$$

$$\underline{\underline{\text{tg } \alpha = 0}}$$

$$\cos \alpha = -\sin \alpha$$

$$\text{т.к. } \text{tg } \alpha \exists \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 = -\text{tg } \alpha$$

$$\underline{\underline{\text{tg } \alpha = -1}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta \neq \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a \leq 0, b \leq 0$$

~~22b~~
~~22a~~

$$a' = -a \quad b' = -b$$

$$[a', b' = 0]$$

$$2b' - a' = \sqrt{a'b'}$$

$$a'^2 + 9b'^2 = 25$$

$$2 \frac{\sqrt{a'b'}}{2} =$$

$$2b' - a' - \sqrt{a'b'} = 0$$

$$\sqrt{2b'} - \sqrt{2b' \cdot a'}$$

$$\sqrt{2b'} - 2\sqrt{2b' \cdot a'} = 1$$

$$\left(\sqrt{2b'}\right)^2 - \sqrt{a'b'} + \left(\frac{\sqrt{a'b'}}{8}\right)^2 - a' = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2b' \cdot a'} = 1$$

$$2n = \frac{1}{4}$$

$$n = \frac{1}{8}$$

$$\left(\sqrt{2b'} - \frac{\sqrt{a'b'}}{8}\right)^2 = \frac{65a'}{64}$$

$$\sqrt{2b'} - \frac{\sqrt{a'b'}}{8} = \frac{\sqrt{65} \cdot \sqrt{a'b'}}{8}$$

$$\sqrt{2b'} = \frac{(\sqrt{65} + 1) \cdot \sqrt{a'b'}}{8}$$

$$b' = \frac{(\sqrt{65} + 1)^2 \cdot a'}{128}$$

$$+ b = \frac{+(\sqrt{65} + 1)^2 \cdot a}{128}$$

~~22a~~

$$a \left(1 - \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{64}\right)$$

$$64 - 65 - 2\sqrt{65} - 1$$

$$-2(\sqrt{65} + 1)$$

$$\frac{-2(\sqrt{65} + 1)}{64}$$

$$-a \left(\frac{\sqrt{65} + 1}{32}\right) =$$

$$= 2a$$

$$a^2 \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{2^{10}} = a^2 \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{128}$$

$$\frac{a^2}{8} = a^2 \frac{(\sqrt{65} + 1)^2}{128} = 0$$

$$a = 0$$

$$\frac{\sqrt{a'}}{8} - \sqrt{2b'} = \frac{\sqrt{65} \cdot \sqrt{a'}}{8}$$

$$-\sqrt{2b'} = \frac{(\sqrt{65} + 1) \sqrt{a'}}{8}$$

$$b' = a' = 0$$

не подк.

$$5 \log_2(x^2+18x) + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_2 13}$$

$$\exists x^2+18x = a$$

$$x^2+18x \geq 0$$

$$5 \log_2 a + a \geq a^{\log_2 13}$$

~~$$5 \log_2 a$$~~

~~$$a \neq 0 \Rightarrow 5 \log_2 a \cdot a^{-1} + 1 \geq a^{\log_2 13} \cdot a^{-1}$$~~

$$5 \log_2 a + a \geq a^{\log_2 13}$$

~~$$5 \log_2 a \geq a^{\log_2 13} - a$$~~

~~$$5 \log_2 a \geq a^{\log_2 13} - a$$~~

$$x^2+18x-a=0$$

~~$$D \geq 18^2+4a$$~~

~~$$5 \log_2 3 = 11 + 4a$$~~

~~$$a \leq 81$$~~

$$5 \log_2 a \geq a (a^{\log_2 13} - 1)$$

$$\exists a=12$$

$$5 \geq 12 \cdot \frac{1}{12}$$

~~$$5 \geq 1$$~~

$$5 \log_2 a + a^{\log_2 12} \geq a^{\log_2 13}$$

$$5 \log_2 a \geq a^{\log_2 13} - a^{\log_2 12}$$

$$a^{\log_2 13} - 1 < 0$$

~~$$a^{\log_2 13} < a$$~~

~~$$a^{\log_2 13} < 12 \cdot a^{\log_2 12}$$~~

$$a=1$$

$$5 \log_2 1 + 1$$

$$2 \geq 1^{\log_2 13}$$

верно

$$\exists a \neq 1$$

$$12^n = a \quad 12^k = 13$$

$$5 \log_2 a + a \geq a^{\log_2 13}$$

$$5 \log_2 a \geq a (a^{\log_2 13} - 1)$$

возв. в степень

~~$$12 \cdot 5 \geq 12 \cdot a^{\log_2 13} - 12 \cdot a^{\log_2 12}$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\sin(2\alpha+4\beta) \neq \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $2\sin 2\alpha \cos 2\beta + (1-2\sin^2 2\alpha) \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $2\sin 2\alpha \cos 4\beta + (1-2\sin^2 2\alpha) \sin 4\beta + 2\sin 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

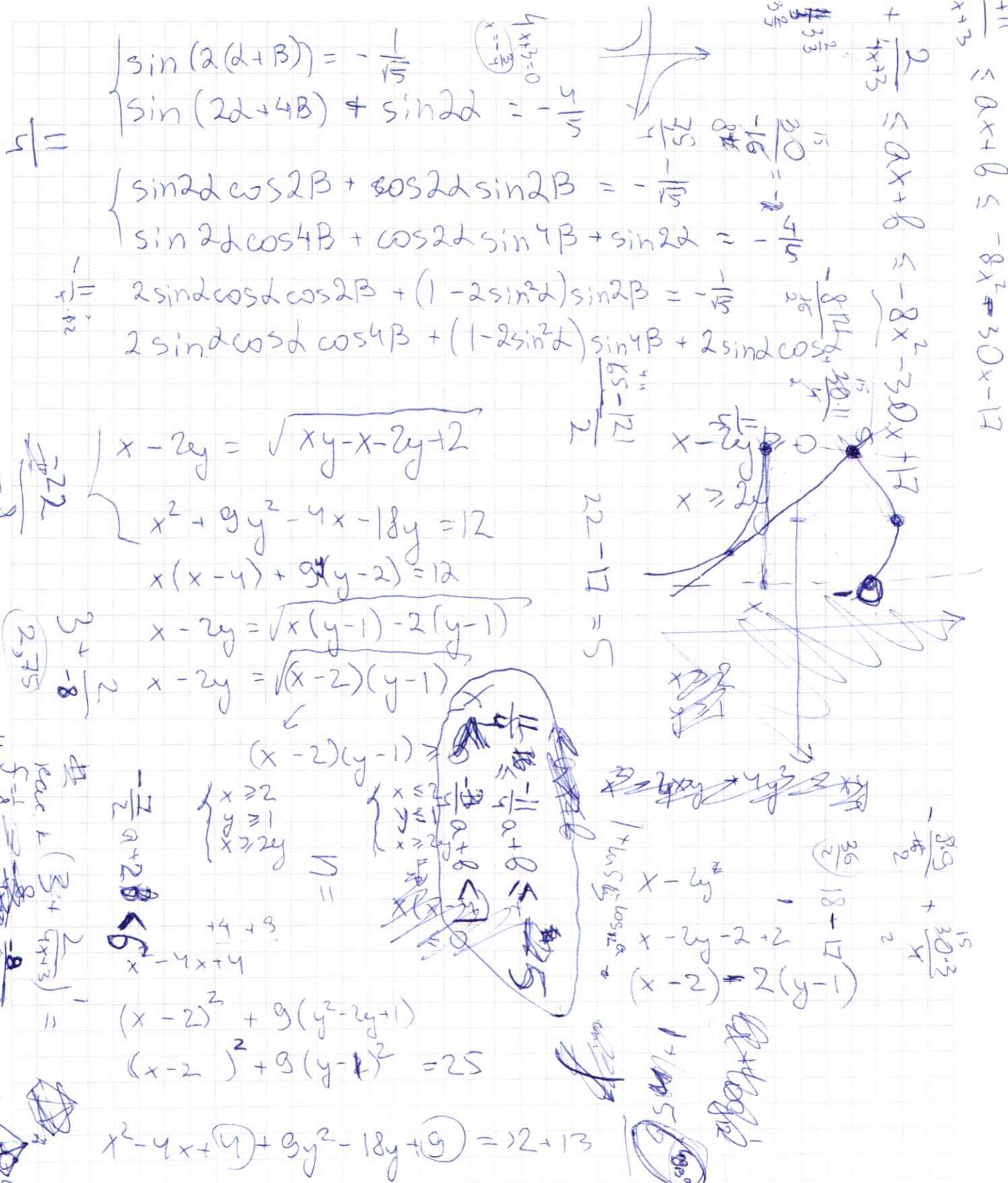
$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$
 $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$
 $x(x-4) + 9y(y-2) = 12$
 $x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$
 $x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)(y-1) \leq 1$
 $x \geq 2$
 $y \geq 1$
 $x \geq 2y$

$(x-2)^2 + 9(y-2/3)^2 = 25$
 $x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 12 + 13$

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq 4x+8 \leq -8x^2 - 30x + 17$
 $30x - 16 = -8x^2 - 30x + 17$
 $8x^2 + 66x - 31 = 0$
 $x = \frac{-66 \pm \sqrt{66^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-31)}}{2 \cdot 8}$
 $x = \frac{-66 \pm \sqrt{4356 + 992}}{16}$
 $x = \frac{-66 \pm \sqrt{5348}}{16}$

$22 - 17 = 5$
 $18 - 17 = 1$
 $18 - 17 = 1$



$$a = x - 2$$

$$b = y - 1$$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

~~анализ~~

~~анализ~~

~~анализ~~

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + 4b^2 &= ab \\ a^2 - 5ab + 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

~~анализ~~
 $\Rightarrow a - 2b$

$$a - \sqrt{ab} - 2b = 0 \quad -\frac{8b}{4}$$

$$\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{ab} + \frac{b}{4} = \frac{9b}{4}$$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{9b}{4} \quad \leftarrow a, b \geq 0$$

$$\left|\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right| = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2} = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{2} - \sqrt{a} = \frac{3\sqrt{b}}{2}$$

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{b}$$

$$-\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2 = \frac{9b}{4}$$

~~анализ~~

$$a = 4b$$

$$\begin{aligned} a^2 + (3b)^2 &= 5^2 & a = b = 0 \\ x = 2 & y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2 &= 4y - 4 \\ x &= 4y - 2 \end{aligned}$$

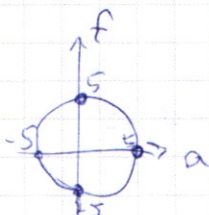
$$a^2 + f^2 = 5^2$$

$$0 = \sqrt{0}$$

$$4 + 9 - 8 - 18 = 12$$

$$13 - 26 \neq 12$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \text{не подх.}$$



$$4y - 2 - 2y + 2 =$$

$$2y = x = 4y - 2$$

$$\begin{aligned} 2b &= 2b \\ \text{верно} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - \frac{2}{3}f &= \sqrt{\frac{af}{3}} \\ 16y^2 - 16y + 4 + 9y^2 - 16y + 8 - 18y &= 12 \\ 25y^2 - 50y - 14 &= 0 \end{aligned}$$

$$4y - 2 - 2y = \sqrt{4y^2 - 2y - 4y^2} + 2 - 2y + 2$$

$$4y^2 - 8y + 4$$

$$2(y - 1) = \sqrt{4(y - 1)^2}$$

верно

$$y \geq 1$$

$$x \geq 2$$

$$\begin{aligned} D &= 25^2 \cdot 4 + 24 \cdot 4 \cdot 25 = \\ &= 1008 \cdot 49 \end{aligned}$$

$$y = \frac{50 + 70}{50} = \frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{38}{5}$$

$$y = \frac{50 - 70}{50} = -\frac{2}{5} \quad \text{не подх}$$

черновик чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)