МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$15+6=21$

$(3x-y)^2+6xy$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$(3x)^2-6xy+y^2+6xy-18x-12y-45=0$

$(3x-y)^2+6xy-6(3x-y)-6y-45=0$

$6y(x-2)-9(2x-5)$

$3+5+5+5+$

$+3$

$3+4+5+5+$

$21 \quad 33$

$45x^2+2y^2-13xy-18x-12y-45+6x+y-6=0$

$\cos 2\beta=+\frac{2}{\sqrt{17}}$

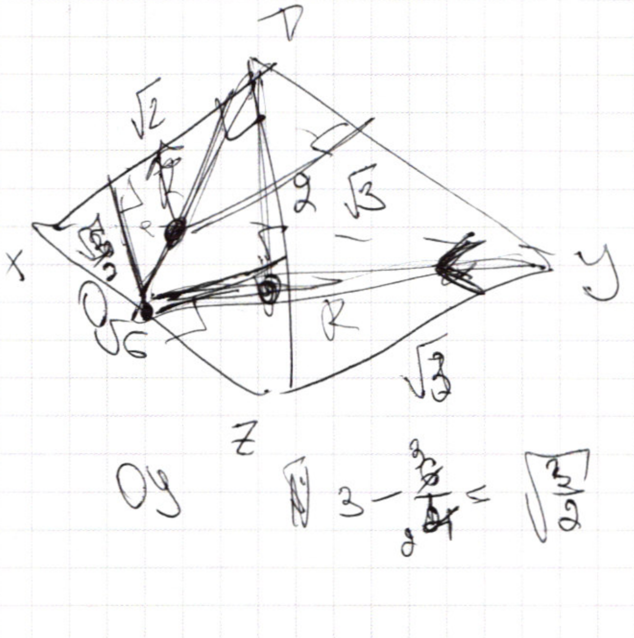
$\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

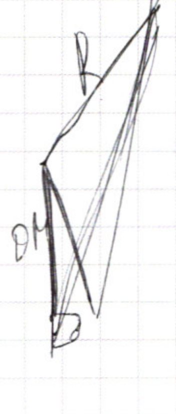
$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+4\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$

$OM=\sqrt{OO^2-}$

$TM=$





$Oy \quad \sqrt{3-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\sin\alpha\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)=\frac{5}{13}$ $\quad \sin\alpha>0$ $\quad AC=\frac{25}{13}\cdot\frac{12\cdot 13}{5}$

$4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=\frac{25}{169}$

$-4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha-\frac{25}{169}=0$

$\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\frac{25}{169\cdot 4}=0$

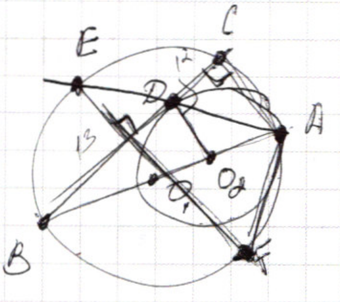
$D=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}=\left(\frac{12}{13}\right)^2$

$\sin^2\alpha=\frac{1+\frac{12}{13}}{2}=\frac{25}{26}$

$\frac{52}{13}$ $\quad 65$

$r_1-?$

$r_2-?$



$\angle AFE-?$

$S_{\triangle AFE}$

$CD=12$

$BD=13$

$12\cdot 13=156$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}=$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta\,(\underbrace{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha}_{\sin(2\alpha+2\beta)})=-\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$13\cdot 12=156$

$65:2=32{,}5$

$156:5=31{,}2$

$D=25x^2$

$y_1=\frac{13+5}{2}x=9x$

$y=4x$

$9x^2-18x+9-9+$

$+y^2-12y+36-36$

$\sin 2\alpha=$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{\sqrt3}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

$t=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\cos\alpha=$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$(1-t^2)^2=1-2t^2+t^4$

	3	2	3	5	5
-13	3	17	17·5		
-5	9	-13	13·5		

$9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36-2+6+5=0$

$3+2-6+5=0$

$2y^2-13xy+45x^2$

$D=13^2-4\cdot 2\cdot 45$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2(4-17)k$

$=2(-13)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

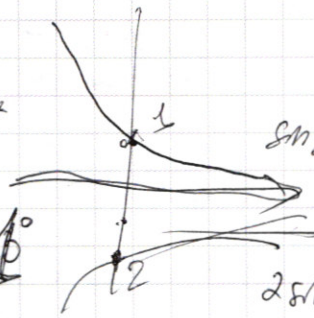
$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cancel{\sin 2\alpha \cos} \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



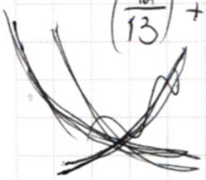
$\left(\frac{12}{5}\right)^k + 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^k$

$\left(\frac{12}{13}\right)^k + \left(\frac{5}{13}\right)^k \geq 1$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha =$ ($2\cos^2 2\beta$)

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$2\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha =$



$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-y-6x+6} = \sqrt{y(x-1)-6(x-1)} = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

1-

$9x(x-2)+y(y-12) = 45 + 36$ ($\frac{36}{45}$, 81)

$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$

-2^x

$\frac{D}{4} = 6^2 - (9x^2-18x-45) = 36-9x^2+18x+45 = 9x^2+18x+81 = 9(x^2+2x+9)$

$D < 169 - 4 \cdot 36x^2 = 25x^2$

$(y-6x)^2 = (y-6)(x-1)$

$$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2 = yx - y - 6x + 6 \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \end{cases}$$

$y_{1,2} = \frac{(13x \pm \ldots)}{2}$, $y = \log_5 5^y$, $t = 5^y$

$12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$ $\frac{18}{2}$

$y^2-13xy+36x^2+y+6x-6=0$

$12^y - 5^y - 13^y \geq 0$ $\frac{8}{2} < 4$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ $26x-x^2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2-26x| = -x^2+26x$

$26x - x^2 = t$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 |t|}$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 \frac{12}{5}$ $\log_5 \frac{13}{5}$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 0$

$t(t^{\log_5 12 - 1} - t^{\log_5 13 - 1} + 1) \geq 0$

$\frac{2t}{1-t^2} +$

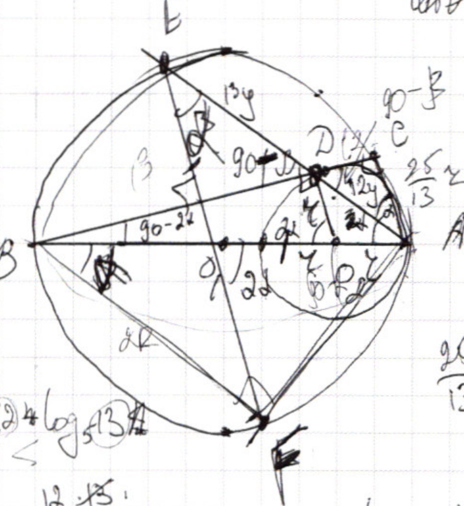
$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ / $1 - tg^2\alpha$

$r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3}{2}$

$\frac{CA}{r} = \frac{25}{13}$

$90-\beta \quad CA = \frac{25}{13}r$

$90 - \beta + 2 + 90$



$\frac{25}{13}r$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 25 \\ \hline 325 \\ 130 \\ \hline 1625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 25 \\ \hline 325 \\ 130 \\ \hline 1625 \end{array}$$

$\frac{25}{13}\cdot\frac{r}{12} = 25$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$\log_5 12 + \log_5 13$

$<$

$\frac{13}{2R} = \frac{12\cdot 13}{25 r}$

$\boxed{24R = 25r}$

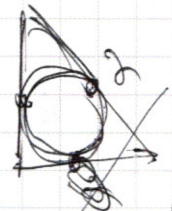
$tg(90-\alpha)$

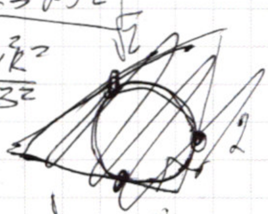
$k(\ln 12 + k\ln 5 = \ln 13$

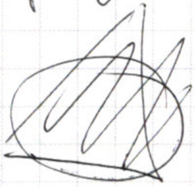
$k(\ln 12 - \ln 5 - \ln 13)$

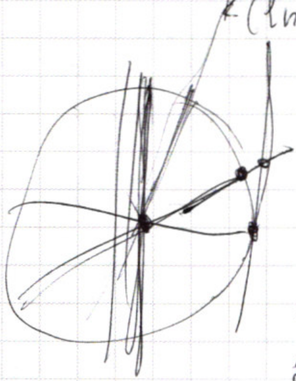
$4R^2 = 25^2 + \frac{25^2}{13^2}r^2 = 25^2 + \frac{24^2R^2}{13^2}$

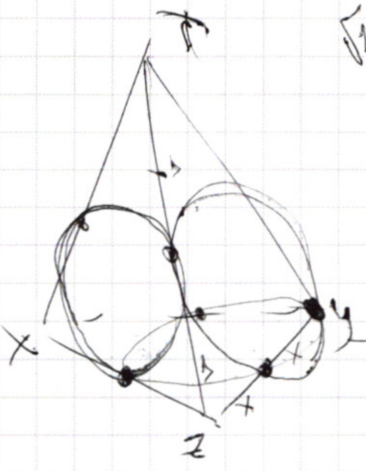
$\frac{13^2\cdot 4 - 24^2R^2}{13^2} = 25^2$











1

2

3

4

5

6

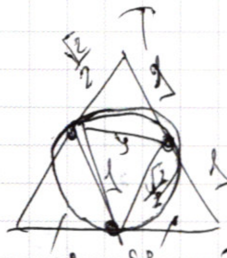
7

168

$169 > 4\cdot 42$

$26 > 13 + 2\sqrt{42}$

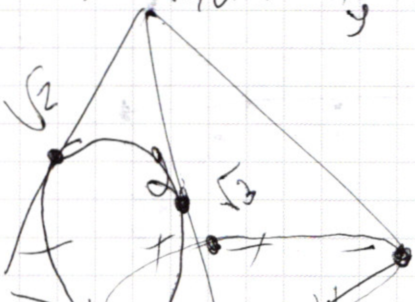
$13 > 2\sqrt{42}$



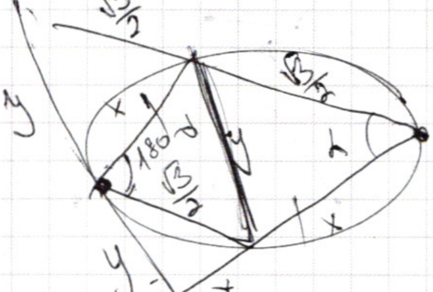
$1 = 2x\cdot x = 2x^2$

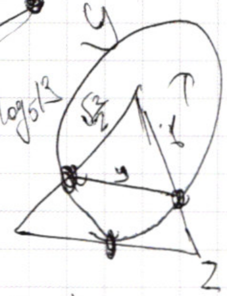
$1 = 2x^2$

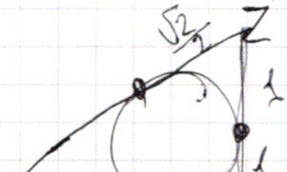
$xz - ?$



$\log_5 12 < \log_5 13$







$\log_5 12 - \log_5 13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$ $\quad y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$D=18^2-4\cdot 9(y^2-12y-45)=4\cdot 9^2-4\cdot 9(y^2-12y-45)=$

$=4\cdot 9(9-y^2+12y+45)=$

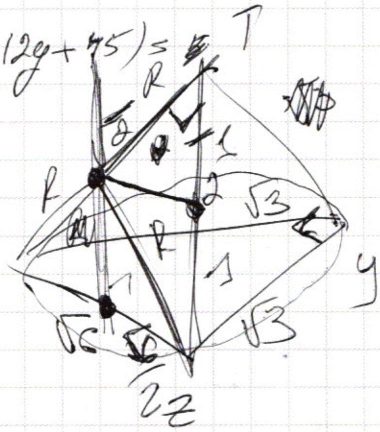
$$\begin{cases} 9x^2+y^2-18x-12y=45 \\ -y^2+13xy-36x^2=+6x+y-6 \end{cases}$$

$9x^2-36x^2+13xy-12y-18x=45+6x+y-6$

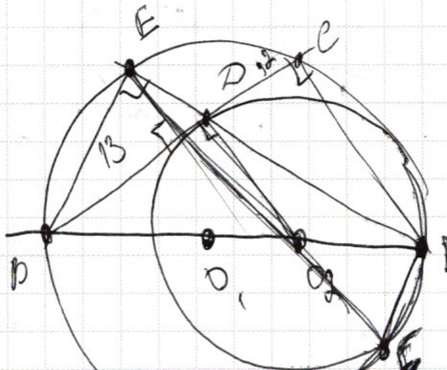
$\cancel{-27x^2+(13y-12y-18-6-y)x \quad 13xy=18x}$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$9x^2+y^2=3(6x-4y+9)$



$\boxed{R=\frac{\sqrt{6}}{2}}$



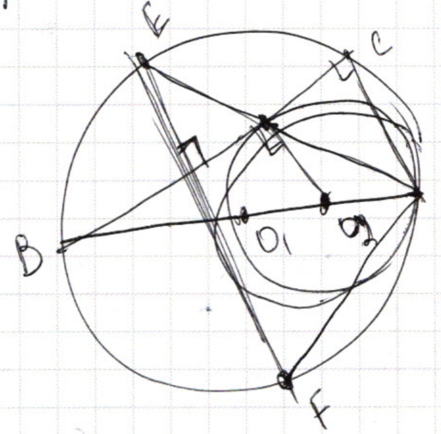
$BA=2r_1$

$O_2D=r_2$

$\frac{13}{r_2}=\frac{13+12}{\sqrt{4r_1^2-25^2}}$ $=25$

$\frac{13^2}{r_2^2}=\frac{25^2}{4r_1^2-25^2}$

$13^2\cdot 4r_1^2=13^2\cdot 25^2=r_2^2\,25^2$



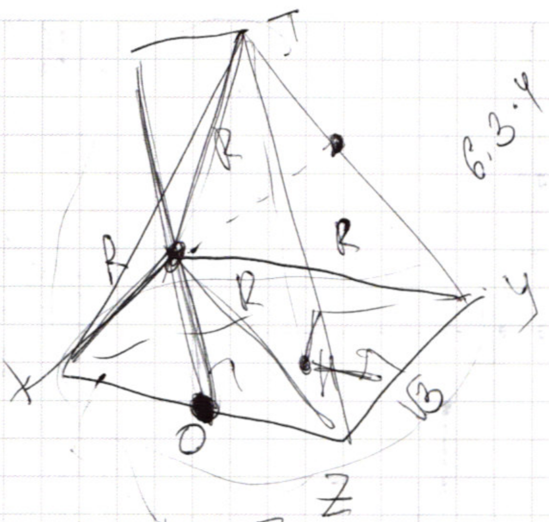
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

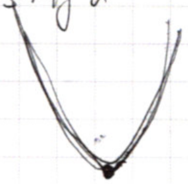
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

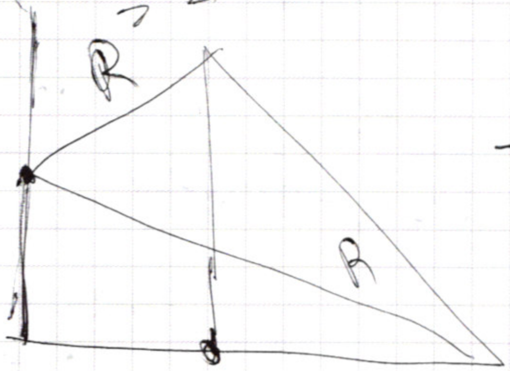


$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$





$-\frac{12}{12}$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 =$
$= 3\cdot 4\cdot 6 - 6\cdot 17 + 28 =$
$= 6\cdot 5 + 28 = -2$

$+\begin{array}{r}160\\64\\\hline 224\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}289\\224\\\hline 65\end{array}$

$\frac{56}{8}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$-\begin{array}{r}279\\224\\\hline 55\end{array}$

$\times\begin{array}{r}28\\8\\\hline 224\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}28\\8\\\hline 224\end{array}$

$-\begin{array}{r}409\\120\\\hline 279\end{array}$

$17^2 = (20-3)^2 =$
$= 400 - 20\cdot 6 + 9 =$
$= 409 - 120 =$
$= 289$

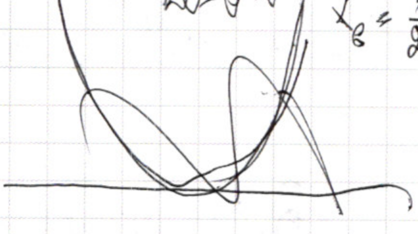
$\dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$-\begin{array}{r}51\\3\\\hline 21\end{array}\Big|\begin{array}{l}3\\17\end{array}$

$\begin{cases} ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 \\ \dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \end{cases}$

$18x^2 - x(51+a) + 28 - b \geq 0$

$8 - 6x - (ax+b)$



$x_в = \dfrac{51}{2\cdot 18} = \dfrac{17}{12}$

$y_в = \dfrac{18\cdot 17^2}{12\cdot 12} - \dfrac{17\cdot 3\cdot 17}{12} + 28 =$

$= \dfrac{-17^2}{8} + 28 = \dfrac{28\cdot 8 - 17^2}{8} = \dfrac{55}{8}$

$\left(\frac{2}{3};2\right)$ $\left(2;-2\right)$

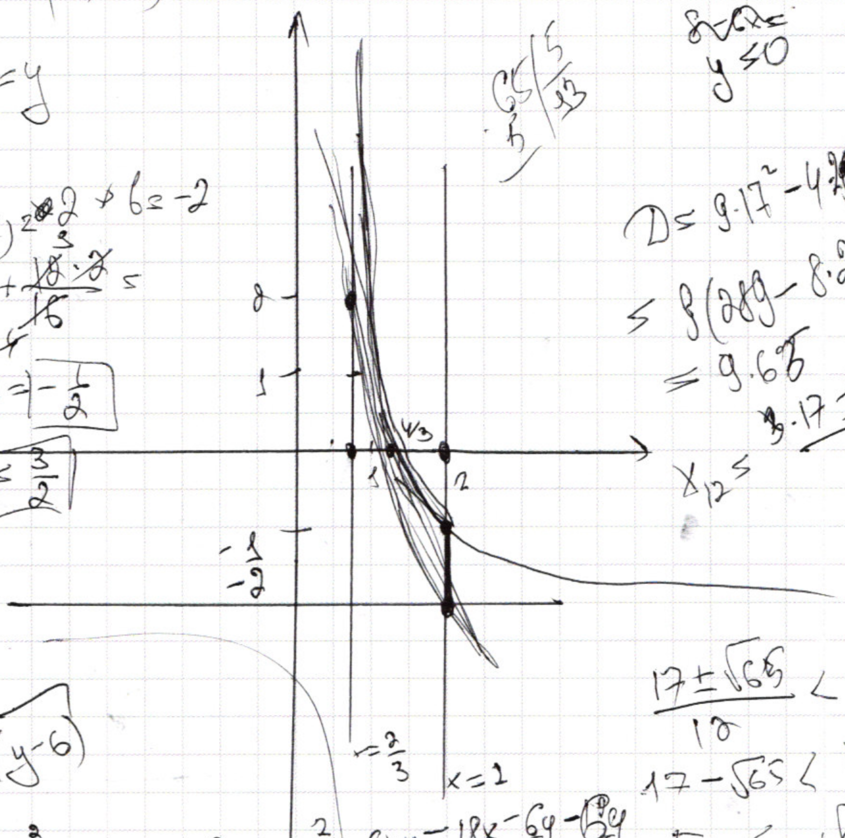
$-\frac{12}{(3x-2)^2}x+b=y$

$-\frac{12}{(6-2)^2}\cdot 2+b=-2$

$b=-2+\frac{12\cdot 2}{16}=$

$=\frac{3}{2}-2=\boxed{-\frac{1}{2}}$

$\boxed{a=\frac{3}{2}}$



$\frac{65}{5}\Big|\frac{5}{13}$

$8-6x=0$, $y=0$

$8-6x=0$

$x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$D=9\cdot 17^2-4\cdot 9\cdot 8\cdot 28=$

$=9(289-8\cdot 28)=$

$=9\cdot 65$

$x_{12}=\frac{3\cdot 17\pm 3\sqrt{65}}{18\cdot 2}$

$(x-1)=\frac{(y-6x)^2}{y-6}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$\frac{17\pm\sqrt{65}}{12}<1$

$17-\sqrt{65}<12$

$5<\sqrt{65}$

$(3x-y)^2+6xy-18x-6y-6y$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\frac{9(y-6x)^4}{(y-6)^2}+(y-6)^2=90$

$9(y-6x)^4+(y-6)^4=90(y-6)^2$

$a=\frac{-6(3x-2)-(8-6x)\cdot 3}{(3x-2)^2}=$

$=\frac{-18x+12+18x-24}{(3x-2)^2}=-\frac{12}{(3x-2)^2}$

$-2{,}4\cdot x+b=\frac{8-6x}{3x-2}$

$\left(-\frac{12}{5}x+b\right)(3x-2)=8-6x$

$a(3x-2)^2=-12$

$-\frac{36}{5}x^2+\frac{24}{5}x+3xb-2b-8+6x=0$

$9x^2\cdot a-12ax+4a-12=0$

$-\frac{36}{5}x^2+x\left(\frac{24}{5}+3b+6\right)-2b-8=0$

$\frac{D}{4}=36a^2-4a(4a-12)=$

$D=\left(\frac{54}{5}+3b\right)^2-4\cdot\frac{36}{5}(2b+8)=0$

$=20a^2+4\cdot 12a=$

$=20a^2+48a=0$

$\frac{a(9x^2-4\cdot 3x+4)+12}{(3x-2)^2}=0$

$a=0$ не подходит

$\boxed{a=-\frac{48}{20}=-\frac{4\cdot 12}{4\cdot 5}=-\frac{12}{5}}$

$9ax^2-12ax+4a+12=0$

$D=144a^2-36a(4a+12)$

$6(3x-2)$

$9x^2+y^2-2\cdot 3xy+6xy$

$(3x-y)^2+6xy-18x-12y+45=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \qquad tg\,\alpha - ?$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (**) \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} & (*) \end{cases}$$

$(*)$ $\quad \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 \Rightarrow \cos 4\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$ (1)

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

① $\sin 2\beta = \frac{+4}{\sqrt{17}}$

$(**)$ $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$ (2)

~~(1): $\sin 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{17} + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

~~(2): $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$~~

$\sqrt{17}\,\cancel{\sin(2\alpha+\varphi)}$

$\cancel{\varphi =}$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$; $\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

Пусть $tg\alpha = t$

$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = -1 \Rightarrow$

$$\cancel{\frac{2t(1+t^2)+4(1-t^2)^2+(1-t^4)}{(1-t^2)(1+t^2)} = 0}$$

$$\cancel{\begin{cases} 2t+2t^3+4-8t+4t^4+1-t^4=0 \\ t^2 \neq 1 \end{cases}}$$

$\cancel{3t^4+2t^3-6t+5=0}$

$2t + 4(1-t^2) + 1\cdot(1+t^2) = 0$

$-4t^2 + 2t + 4 + 1 + t^2 = 0$

$-3t^2 + 2t + 5 = 0$

$3t^2 - 2t - 5 = 0$

$D = 4 + 5\cdot 4\cdot 3 = 4\cdot 16 = 64 = 8^2$

$t_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{3} \\ -1 \end{array}\right.$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$ $\quad tg\alpha = -1$

② $\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{4(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$

$\frac{2t - 4 + 4t^2 + 1 + t^2}{1+tg^2\alpha} = 0$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 5\cdot 3 = 4\cdot 16 = 64$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{10} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = \frac{5}{3}$

$tg\alpha = -1$

$tg\alpha = \frac{3}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $26x-x^2=t$ $(t>0)$

$12^{\log_5 t}+t \geq 13^{\log_5 t}$

Пусть $\log_5 t = k \Leftrightarrow t=5^k$

$12^k+5^k \geq 13^k$

прологарифмируем: по осн. 5

~~$k\ln 12 + k\ln 5 \geq k\ln 13$~~

~~$k(\ln 12 - \ln 5 - \ln 13) \geq 0$~~

~~$k \geq \frac{1}{\ln\frac{12}{5\cdot 13}}$~~

$k\log_5 12 + k\log_5 5 \geq k\log_5 13$

$k(\log_5 12+\log_5 5-\log_5 13)\geq 0$

$k \geq \frac{1}{\log_5\frac{12\cdot 5}{13}}$

Обр. зам.

$\log_5 t \geq \frac{\log_5 5}{\log_5\frac{12\cdot 5}{13}}$ $\quad \Big| \cdot \log_5\left(\frac{12\cdot 5}{13}\right)$

$\log_5\left(\frac{12\cdot 5}{13}\right)\cdot\log_5 t \geq 1$

$\log_5 t\left(\log_5\frac{12}{13}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)\geq 0$

$\log_5 t \cdot \log_5\frac{12}{13} \geq 0$

Т.к. $\log_5\frac{12}{13}<0 \Rightarrow \log_5 t \leq 0$

$t \leq 1$

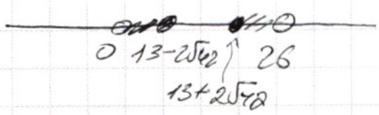
$t\in(0;1]$

Обратная замена

$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ 26x-x^2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-26)<0 \\ x^2-26x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in(-\infty;13-2\sqrt{42}]\cup[13+2\sqrt{42};+\infty) \end{cases} \Rightarrow$

* $D=26^2-4=4\cdot 13^2-4=4\cdot 12\cdot 14=4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 7=4^2\cdot 6\cdot 7$

$x_{1,2}=\frac{26\pm 4\sqrt{6\cdot 7}}{2}=13\pm 2\sqrt{42}$



$\Rightarrow x\in(0;13-2\sqrt{42}]\cup[13+2\sqrt{42};26)$

** $13>2\sqrt{42}$?
$169>168$

Ответ: $x\in(0;13-2\sqrt{42}]\cup[13+2\sqrt{42};26)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

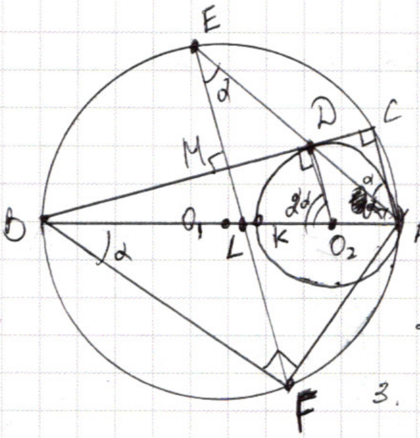
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $\Omega(O_1, R)$ $\omega(O_2; r)$

Дано: $BD = 13$ $CD = 12$

Найти R - ?
r - ?
$\angle AFE$ - ?
$S_{\triangle AEF}$ - ?



Решение:

1. Проведем O_2D, т.к. D - точка кас, то $O_2D \perp BC$, $O_2D = r$
2. $\triangle BCA$ п/у, т.к. AB - диаметр $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle ACB = 90°$
3. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 2 углам) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BD}{DO_2} = \frac{BC}{AC}$; $\frac{13}{r} = \frac{25}{AC} \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = \frac{25r}{13}$
4. $\angle DAB = \alpha \Rightarrow \smile DK = 2\alpha$ (впис угол) $\Rightarrow$ (пусть $AB \cap \omega = K$)
$\Rightarrow \angle DO_2K = 2\alpha \Rightarrow$ т.к. $DO_2 \parallel AC$ (перпенд одной прямой) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CAB = 2\alpha$, т.к. $\angle DAB = \alpha$, то $\angle DAC = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow AD$ - бис-са $\Rightarrow$ (по св-ву бис-сы) $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$; $\frac{13}{2R} = \frac{12 \cdot 13}{25r} \Rightarrow$
$\Rightarrow 24R = 25r$
$AC = \frac{24R}{13}$
5. т. Пифагора в $\triangle ABC$: $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$4R^2 = 25^2 + \frac{(24R)^2}{13^2}$$
$$\frac{4 \cdot 13^2 R^2 - 24^2 R^2}{13^2} = 25^2$$
$$(4 \cdot 13^2 - 4 \cdot 12^2) R^2 = 25^2 \cdot 13^2$$
$$4 \cdot (13-12)(13+12) R^2 = 25^2 \cdot 13^2$$
$$R^2 = \frac{25^{\cancel{2}} \cdot 13^2}{4 \cdot \cancel{25}}$$
$$R = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$$
$$r = \frac{24R}{25} = \frac{\overset{12}{\cancel{24}} \cdot 5 \cdot 13}{\cancel{2} \cdot \underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$$

6. Проведем BF, $\angle BFA = 90°$ (т.к. опир на диам)
7. $\angle CDA = 90 - \alpha = \angle EDM$ (вертик)
$\angle DEM = 90 - \angle EDM = \alpha$ (т.к. $\triangle EMD$ п/у)
8. $\angle AEF = \frac{1}{2} \smile AF = \angle ABF = \alpha$ (впис углы опир на одну дугу) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ в $\triangle BFA$: $\angle BAF = 90 - \alpha$
9. $EM \perp BC$, $DO_2 \perp BC \Rightarrow DO_2 \parallel EF \Rightarrow \angle DO_2K = \angle KLF = 2\alpha$

10. $\triangle LAF$: $\angle AFE = 180 - 2\alpha - 90 + \alpha = 90 - \alpha$

~~$\triangle ABC$: $\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13} = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$~~

$\triangle ADC$ (п/у) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{12 \cdot 5 \cdot \cancel{13}}{25 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{13}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

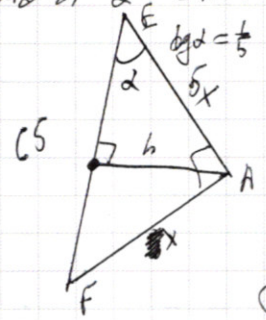
$\operatorname{tg}\angle AFE = \operatorname{tg}(90-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 5$

$\angle AFE = \operatorname{arcctg} 5$

11. $\triangle AFE$: $\angle EAF = 90 - \alpha + \alpha = 90^\circ$ => $\triangle AFE$ п/у => EF – диам окр Ω =>

=> $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot AF$ =

Выносной чертеж



$EA = 5x$, $FA = x$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{FA}{EA} = \frac{1}{5}$

$\frac{FA}{5x} = \frac{1}{5}$ => $FA = x$

= $\frac{1}{2} \cdot 5x \cdot x = \frac{5x^2}{2}$

т. Пиф. $65^2 = 25x^2 + x^2 = 26x^2 = 2 \cdot 13 x^2$

$25 \cdot 13^2$

$x^2 = \frac{25 \cdot 13^{\cancel{2}}}{2 \cdot \cancel{13}} = \frac{25 \cdot 13}{2}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{5}{2} \cdot \frac{25 \cdot 13}{2} = \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R = 32{,}5$, $r = 31{,}2$

$\angle AFE = \operatorname{arcctg} 5$

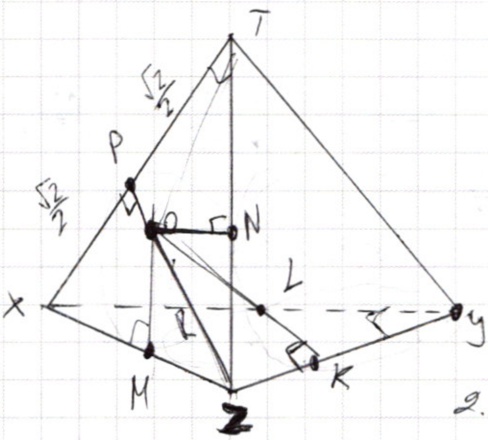
$S_{AEF} = \frac{1625}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

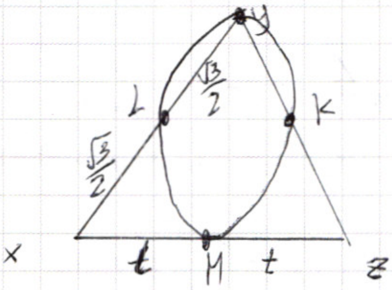


Дано: TXZY пир-да
$XY = \sqrt{3}$
$TX = \sqrt{2}$
$TZ = 2$
Найти
XZ – ?
$R_{опис}$ – ?

1. Пусть K, L, M, N, P ~~т~~ середины ZY, XY, XZ, TZ, TX соотв.
2. Через K, L, M, N, P проходит сфера по усл

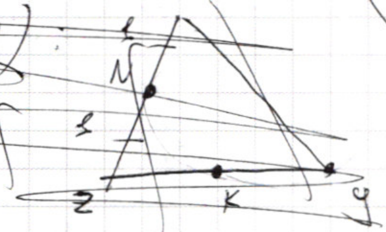
3. Рассм. (XZY)

Пусть $XZ = 2t$, $YZ = 2k$, $ZK = k$



~~$MZ = t$~~
~~$MZ^2 = KZ \cdot YZ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$~~
~~$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~ ~~$XZ = \sqrt{2}$~~
~~$ZN^2 = ZK \cdot 2ZK = 2ZK^2$~~
~~$ZK = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~
~~$ZY = \sqrt{2}$~~

~~4. Рассм (TZY)~~



4. XZ кас. к сфере

5. Теорема об отрезках касат и сек для XM и XY;

$t^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2}$
$t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$XZ = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

6. для: ZY и ZM: $t^2 = k \cdot 2k = 2k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2k^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{3}{4}$ $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$ZY = \sqrt{3}$

Ответ: $XZ = \sqrt{6}$

№6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} ax+b \geq 18x^2-51x+28 \\ \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \end{cases}$

выполнено для всех $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

Пусть $f(x) = 18x^2-51x+28$ ← квад. ф. гр. парабола

$t(x) = ax+b$ ← семейство прямых

$g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$ ← дробно лин. ф. гр. гипербола

Рассмотрим $f(x)$

$x_в = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{3\cdot 17}{2\cdot 3\cdot 6} = \frac{17}{12}$

$y_в = \cancel{18}\cdot\frac{17^2}{12\cdot 12} - \frac{3\cdot 17^2}{12} + 28 = 28 - \frac{17^2}{8} = \frac{28\cdot 8 - 17^2}{8} = \frac{224-289}{8} =$

$= -\frac{65}{8}$

$f(2) = 18\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 17 + 28 = 6\cdot(12-17) + 28 = 28 - 5\cdot 6 = -2$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{18\cdot 4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 17\cdot 2 + 28 = -26 + 28 = 2$

Рассмотрим $g(x)$

$g(2) = \frac{8-12}{6-2} = -\frac{4}{4} = -1$

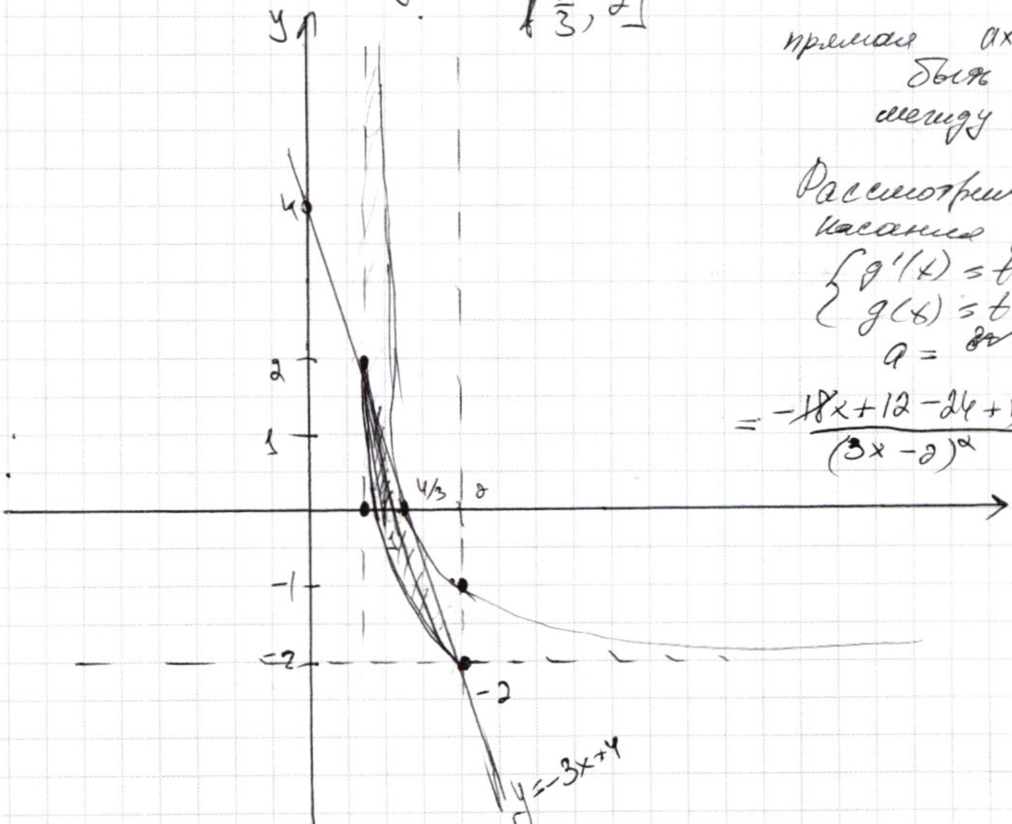
$g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$g(\frac{2}{3}) = \frac{8-4}{2-2}$ $\varnothing$ $x = \frac{2}{3}$ ассимптота

$g(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4-4+8}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$y = -2$ ассимптота

Построим $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[\frac{2}{3}; 2]$



прямая $ax+b$ должна быть заключена между графиком $f(x)$ и $g(x)$

Рассмотрим случай касания $g(x)$ и $t(x)$

$\begin{cases} g'(x) = t'(x) \\ g(x) = t(x) \end{cases}$

$a = \frac{-6(3x-2)-(8-6x)\cdot 3}{(3x-2)^2} =$

$= \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$

Продолжение на след листе

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение

$~~a(3x-2)^2=-12~~$

$~~9x^2a-12ax+4a+12=0~~$

$~~\frac{D}{4}=36a^2-9a(4a+12)=36a^2-36a^2-9\cdot 12a=0~~$

$$\begin{cases} a=\dfrac{-12}{(3x-2)^2} \\ \dfrac{-12}{(3x-2)^2}\cdot x+b=\dfrac{8-6x}{3x-2} \end{cases}$$

$$b=\frac{(8-6x)(3x-2)+12}{(3x-2)^2}=\frac{24x-16-18x^2+12x+12}{(3x-2)^2}=\frac{36x-18x^2-4}{(3x-2)^2}$$

$$\begin{cases} b(3x-2)^2-(3x-2)(8-6x)-12=0 \\ 3x-2\neq 0 \end{cases}$$ для нахождения b $D=0$ т.к касание

$9x^2b-12bx+4b+18x^2-36x+4=0$

$9x^2(b+2)-12x(b+3)+4(b+3)=0$

$\frac{D}{4}=36(b+3)^2-9(b+2)\cdot 4(b+1)=36(b^2+6b+9-b^2-3b-2)=0$

$~~3b+7=0~~$
$~~b=-\frac{7}{3}~~$

Найдем прямую, которая проходит через крайние точки $(\frac{2}{3};2)$; $(2;-2)$

$y=ax+b$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a+b=2 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a-2-2a=2 \\ b=-2-2a \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}a=4 \\ b=-2-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-2+6=4 \end{cases}$

$y=-3x+4$ крайняя прямая

если ее начать крутить (изменять a) то она начнет вылезать из области если менять b то тоже

Ответ: $(-3;4)$

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6x\geq 0 \\ y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \quad (**) \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \quad (*) \end{cases}$

$(*)$ $9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$9(x^2-2x+1)+(y-6)^2-36-9=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$(**)$ $(y-6x)^2=(x-1)(y-6) \quad |\cdot 18$

$+\begin{cases} 18(y-6x)^2=18(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

$(9(x-1)+(y-6))^2=90+18(y-6x)^2$

$(9x-9+y-6)^2=18\left(5+(y-6x)^2\right)$

$(9x+y-15)^2=18\left(5+(y-6x)^2\right)$

№7 продолжение

R описанного шара:

найдем где расположен центр шара

1. в основ. (XYZ) $\triangle XYZ$ п/у (по т обр. т Пиф) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O_1 центр опис окр $\in XZ$, $XO_1=\frac{XZ}{2}$

~~в бок стороне~~

2. (XTZ): $\triangle XTZ$ п/у (по т. обр. т Пиф) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O_2 – центр опис окр $\in XZ$ $\Rightarrow$ $O_2X=\frac{XZ}{2}$

из (1) и (2) $\Rightarrow$ $O_1=O_2=M$ где ~~M центр опис шара~~

~~$R_{min}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (из $\triangle XYZ$)~~

проведем $MO \perp (XYZ)$ и построим OK (перп к TZ

$OZ=R=OX=OT=OY$

OK высота мед в $\triangle OZY$ $OK=\sqrt{R^2-\frac{3}{2}}$

$\triangle OXZ$: $OM=\sqrt{R^2-\frac{3\cdot 6}{4}}$

R_{min} выполняется когда $TY\perp(XYZ)$