МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

Ограничения: $\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Замена: $2y-1=a$
$x-6=b$

Выразим $x-12y$ через a и b:

$x-12y=\alpha a+\beta\cdot b$

$x-12y=\alpha(2y-1)+\beta(x-6)$

$1\cdot x-12y=\beta\cdot x+\alpha\cdot 2y-\alpha-6\beta$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при равных степенях равны (соответств.)

$\Rightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ 2\alpha=-12 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=-6 \end{cases}$

перепишем систему в получен. обозначениях:

$$\begin{cases} (1)\ b-6a=\sqrt{ab} \\ (2)\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ (*)\ b\geq 6a \end{cases}$ Замена: $\frac{b}{a}=t$ $\Rightarrow$ $t^2-13t+36=0$

$D=25$

$t=\frac{13\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l} 9 \\ 4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \text{ п.к. из } (*) \end{array}\right.$

подставим $b=9a$ в (2): $81a^2+9a^2=90 \Leftrightarrow 90a^2=90 \Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l} 1;\ b=9 \\ -1;\ b=-9 \end{array}\right.$

$a=-1; b=-9$ - посторонние корни из $(*)$

Обратная замена:

$\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$

Проверка: $15-12=\sqrt{30-12-15+6}$ +

$225+36-12\cdot15-36=45$ +

Ответ: (15; 1)

Задача N 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cdot(+\frac{1}{\sqrt5})\cdot\cos 2\beta = +\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = \left[\begin{array}{l}\frac{2}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$

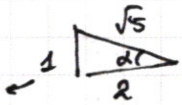
① Рассмотрим случай, когда $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

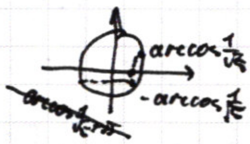
$\sin(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5}) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt5} = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5})+2\pi n\\ 2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi+\arcsin(\frac{1}{\sqrt5})+2\pi n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 2\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n\\ \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = -1\\ tg\,\alpha = \frac{1}{2}\end{array}\right.$



② Рассмотрим случай, когда $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$



$\sin(2\alpha - \arccos\frac{1}{\sqrt5}) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha-\arccos\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt5})+2\pi n\\ 2\alpha-\arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi+\arcsin(\frac{1}{\sqrt5})+2\pi n\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2\alpha = 2\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 2\alpha = \pi+\frac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt5}-\frac{\pi}{4}+\pi n\\ \alpha = \frac{3\pi}{4}+\pi n \Rightarrow tg\,\alpha = 1\end{array}\right.$

$tg(\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\frac{\pi}{4}) = \frac{tg(\arccos\frac{1}{\sqrt5})-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\arccos\frac{1}{\sqrt5}\cdot tg\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

Ответ: $-1; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

Пусть $f(x) = -32x^2+36x-3$

$g(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

Исследуем функции $f(x)$ и $g(x)$ и построим их графики на пл-ти хоу

$f(x)$ - парабола. $x_в = \frac{-36}{-2\cdot 32} = \frac{9}{16}$ $y_в = \frac{57}{8}$ $f(\frac{1}{4}) = -32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 =$

$= -2+9-3 = 4$

$f(1) = 1$

$g(x)$ - монотонно убывающая функция. Докажем это с помощью производной.

$$g'(x) = \frac{16(4x-5)-16(x-1)\cdot 4}{(4x-5)^2} = \frac{16(-1)}{(4x-5)^2} < 0$$

$$g(\frac{1}{4}) = \frac{16\cdot\frac{1}{4}-16}{\frac{1}{4}\cdot 4-5} = \frac{12}{4} = 3$$

$g(1) = 0$

Построим графики (см. следующ. стр.)

1. $ax+b$ - линейная функция. По графику крайнее полож. прямой, при котором $ax+b \le f(x)$ наблюдается при прохождении через точки $A(\frac{1}{4};4)$ и $B(1;1)$

$$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{4}+b=4 \\ a+b=1 \end{cases} \quad \frac{a}{4}+1-a=4 \quad -\frac{3}{4}a=3 \Rightarrow \boxed{a=-4} \Rightarrow b=5$$

Проверим, сколько пересечений у $-4x+5$ и g

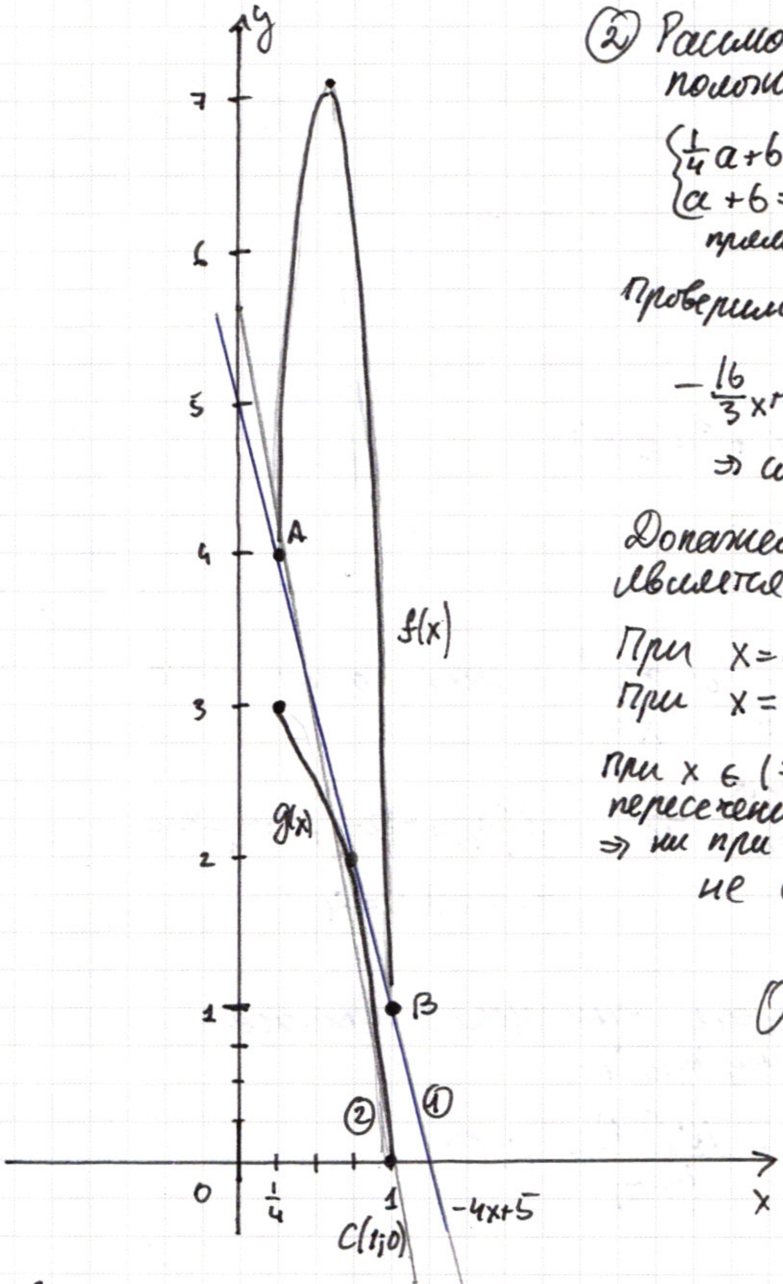
$16(x-1) = (4x-5)(4x-5)(-1)$

$16x^2-40x+25+16x-16=0$

$16x^2-24x+9=0 \Rightarrow (4x-3)^2=0$ При $x=\frac{3}{4}$ g и $-4x+5$ имеют 1 реш-е

$\Rightarrow$ $-4x+5$ явл. касательн, при остальн. x $(-4x+5)$ ~~всегда~~ больше $g(x)$

$\Rightarrow$ данный случай удовлетворяет нер-ву



② Рассмотрим ещё одно крайнее положение (проходящ. через A и C)

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a+b=4 \\ a+b=0 \end{cases} \quad -\frac{3}{4}a=4 \Rightarrow a=-\frac{16}{3}, \quad b=\frac{16}{3}$$

прямая $-\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}$

Проверим: при $x=\frac{3}{4}$ $g(x)=2$

$$-\frac{16}{3}x+\frac{16}{3} = \frac{-12+16}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow ax+b<g$$

$\Rightarrow$ случай не подходит

Докажем ещё раз, что ① (прямая $-4x+5$) является касательной к $g(x)$

При $x=1$ ① $> g(x)$

При $x=\frac{1}{4}$ ① $> g(x)$

При $x \in (\frac{1}{4}; 1)$ имеется ровно 1 точка пересечения

$\Rightarrow$ ни при каких $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $g(x) >$ ① не выполняется

Ответ: $a=-4$
$b=5$

Заметим, что если $ax+b$ проходит через точку $(\frac{1}{4}; t)$, где $t>4$, не для всех x $f(x) \geq ax+b$

Аналогично если $ax+b$ проходит через $(1; t)$, где $t>1$ не для всех x $f(x) > ax+b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Ограничение: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x(10-x)>0$ $-\ \ +\ \ -$ 0 10

Из огранич. логарифма следует, что $|x^2-10x|$ всегда открывается с противоположным знаком, поэтому можем убрать знак модуля, изменив знак.

Замена: $10x-x^2=t$, $t>0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

Исследуем функцию $f(t) = 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

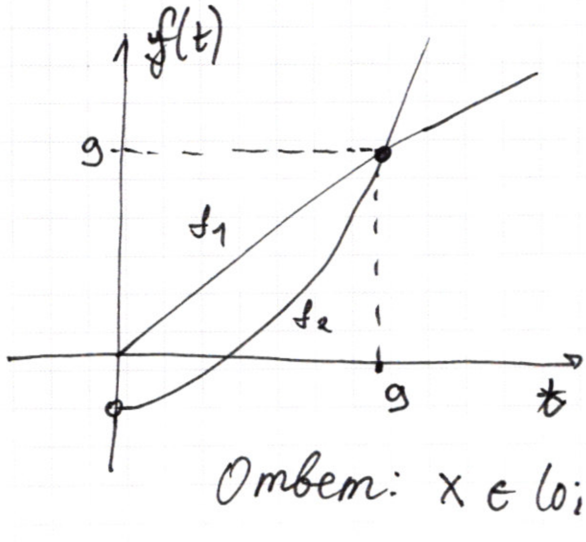
$f'(t) = 5^{\log_3 t}\cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{t\cdot \ln 3} - 4^{\log_3 t}\cdot \ln 4 \cdot \frac{1}{t\ln 3} =$

$= \frac{1}{t\ln 3}\left(5^{\log_3 t}\ln 5 - 4^{\log_3 t}\cdot \ln 4\right)$ При $t>0$ (огр.) $f \nearrow$

Заметим, что скорости возрастания показательн. функции больше скорости возраст. ~~log.~~ линейной функции.

=Построим графики: $f_1 = t$

$f_2 = 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$



При $t<9$ $f_1>f_2$

При $t=9$ $f_1=f_2$

При $t>9$ $f_2>f_1$

$\Rightarrow 0<t\leq 9$

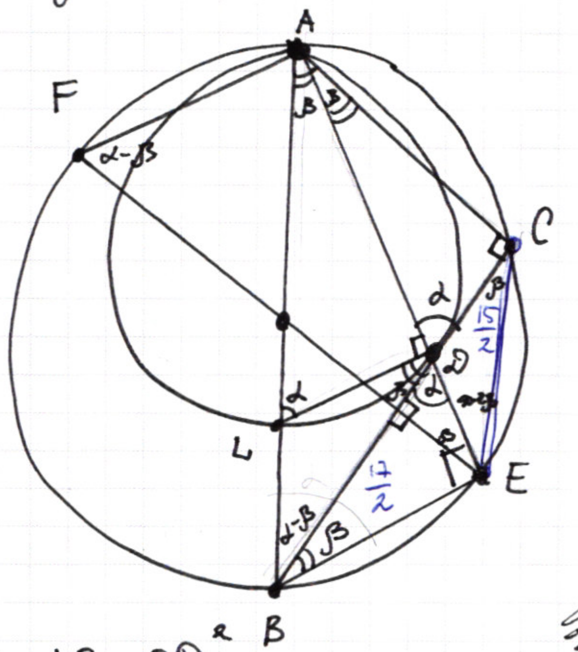
$10x - x^2 \leq 9$

$x^2-10x+9 \geq 0$ $+\ \ -\ \ +$ 0 1 9 10 x

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 5



Дано: $CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

Найти: $\angle AFE$?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

R, r - ?

R - радиус Ω

r - радиус ω

1) $BD \cdot CD = AD \cdot ED$

$\frac{15 \cdot 17}{4} = AD \cdot ED$

$\triangle ACD \sim \triangle BED$

$\Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow BD \cdot CD = AD \cdot DE$

~~$\frac{17}{2} \cdot \frac{15}{2} = AD \cdot$~~

$BL \cdot AB = BD^2$

$(2R - 2r) \cdot 2R = BD^2$

$4R^2 - 4Rr - \frac{289}{4} = 0$

$\triangle BLD$ и $\triangle BDA$ подобные

$\frac{BD}{AB} = \frac{BL}{BD} \Rightarrow BD^2 = 2R(2R - 2r)$

$t^{\log_3}$ $5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

$5^{\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{2}$ 1 ....

$t + 4 \log_3 t = 5^{\log_3 t}$

$t +$ $t^{\log_3 5} \cdot t^{\log_3 4} - t^1 = 0$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t} = \log_5 4$

$\log_5 4 \cdot \log_3 t \cdot \frac{5}{4} = \log_5^2 4$

$\log_5 4 \left(\log_5 4 - \log_3 t \cdot \frac{5}{4} \right) = 0$

$\log_5 4^{\frac{4}{5}} = \log$

$$\begin{cases} BD \cdot CD = DE \cdot AD \\ BE^2 + (AD + DE)^2 = AB^2 \\ BE = \frac{285}{4} - DE^2 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

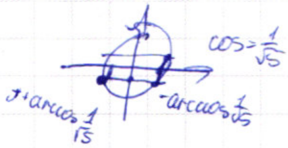
(заполняется секретарём)

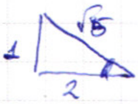
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin(2α+2arccos~~

$\sin\left(2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha+$



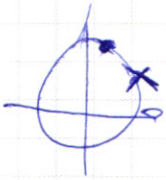


$tg=\frac{1}{2}$

$2\alpha+\cancel{\alpha}=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\cancel{\arccos\frac{1}{\sqrt5}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n$

$\frac{1}{\sqrt5}\vee\frac{1}{\sqrt2}$

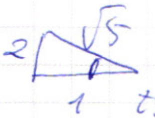
$\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi n$



$\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$

$2\alpha=2\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\frac{\pi}{4}+2\pi n$



$tg=2$

$2\alpha=\pi+\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $\quad 2\alpha=\frac{3\pi}{2}+\pi$ $\quad \alpha=$

$tg\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\alpha-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\alpha\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{}$

☑ черновик ☐ чистовик

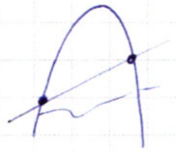
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \qquad \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$ax+b \le -32x^2+36x-3$



$ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5}$

$f = \frac{16x-16}{4x-5} \qquad x \ne \frac{5}{4}$

наклон.: $k\lim = 0 \quad \frac{fx}{x}$

$b = f(x) - kx = 4$

$\frac{16(5-1)}{4\cdot5-5} = \frac{16\cdot4}{15}$

$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1}$

$f'(x) = \frac{16(4x-5) - 16(x-1)\cdot4}{(4x-5)^2} < 0 = 4x-5-4x+4=0$

$\frac{16\cdot2}{7} = \frac{32}{7} > 4 \qquad \frac{16\cdot3}{11} > 4 \qquad \frac{-16}{-5} = \frac{16}{5} < 4$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16\cdot\frac{1}{4}-16}{4\cdot\frac{1}{4}-5} = \frac{4-16}{1-5} = \frac{12}{4} = 3$

$f(1) = 0$

$-32x^2+36x-36$

$-32+36-3=1$

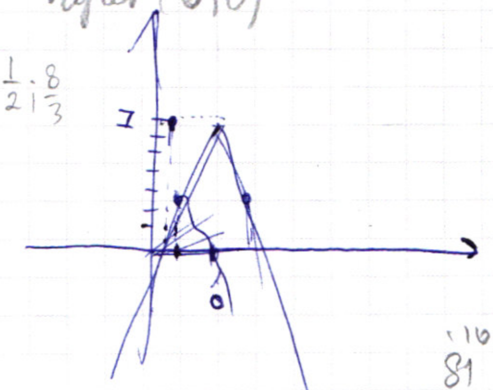
$-64x+36=0$

$x = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} \qquad \frac{+36}{2\cdot32} = \frac{9}{16}$

$\frac{-32\cdot81}{16\cdot16} + \frac{36\cdot9}{16} - 3$

$\frac{18\cdot9}{8} - \frac{9\cdot9}{8} - 3 = \frac{9\cdot9-24}{8} = \frac{57}{8}$

пучок $(0;b)$



$ax+b$ пучок $(0;b)$ $\qquad \frac{12-16}{-2} = 8-16$

$\frac{16x-16}{4x-5} \qquad 16(4x-5-4x+1) < 0$

$-32x^2+36x-3$

$\frac{+36}{2\cdot32} = \frac{9}{16} \qquad \frac{9}{8}(18-9)-3$

$\frac{-32\cdot1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 \qquad \frac{4-16}{1-5} = \frac{12}{4} = 3$

$\frac{81-24}{8}$

$\frac{-32\cdot81}{16\cdot16} + \frac{36\cdot9}{16} - 3 \qquad -\frac{81}{8} + \frac{18\cdot9}{8} - 3 = \frac{57}{8}$

$-2+9-3=4 \qquad -32+36-3=1$

$-2+9-3$

черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

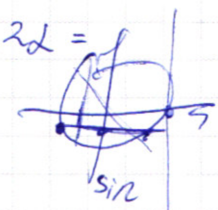
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

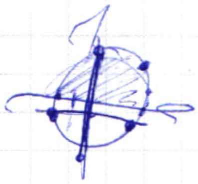
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$





$= \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$

$\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt2}{2}\cos 2\alpha\right) = -1$

$\sqrt2\ (\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4}) = -1$

$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt2}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ 2\alpha+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right.$ $\quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad 2\alpha = -\pi+2\pi n \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n \\ \alpha = -\frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right.$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha$ не сущ-ет

$\cancel{\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt2}{2}}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{2\alpha-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\ 2\alpha-\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}+2\pi n \end{array}\right.$ $\quad 2\alpha = 2\pi n \quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi n \\ \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n \end{array}\right.$ $\quad 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$ V

$\sin 2\alpha + \alpha\cdot\cos 2\alpha = -1$ $\quad \arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi n$

$+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi n$

$2\alpha + \frac{\pi}{2} = 2\pi n$ $\qquad 2\alpha = -\frac{\pi}{2}+\pi+\underline{2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}+2\pi n$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi n$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt5}}{2} - \frac{\arccos\frac{1}{\sqrt5}}{2} + 2\pi n$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$16x-16=(4x-5)\left(\frac{-16}{3}\cancel{x}+\frac{16}{3}\right)$

$3(x-1)=(4x-5)(-\cancel{x}+1)$

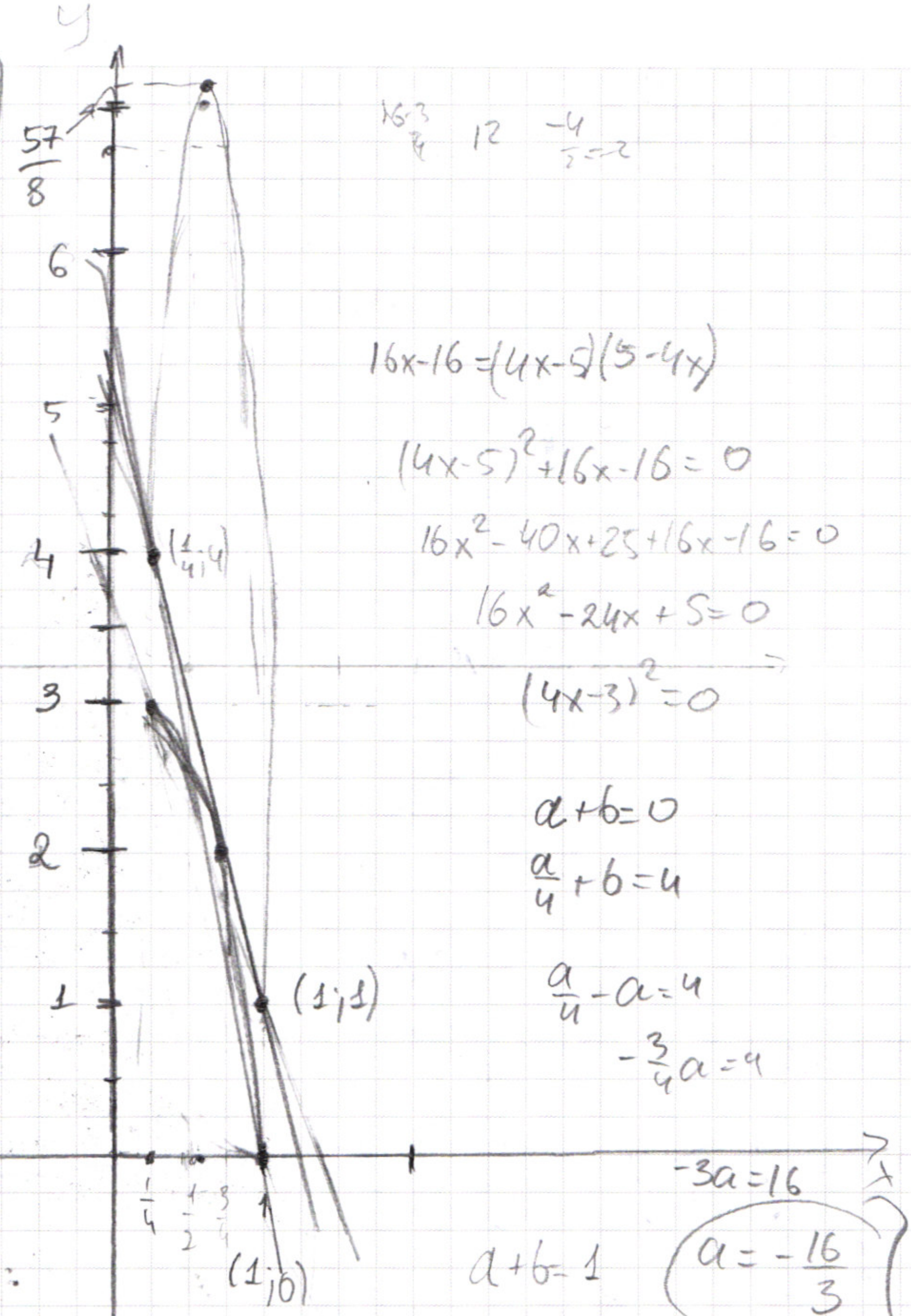
~~$3x-3=-4x$~~

$\cancel{3}(x-1)(3+4x-5)$

$(x-1)(4x-8)=0$

$(x-1)(4(x-2))=0$

$x=1$



$\frac{16\cdot 3}{4}$ 12 $\frac{-4}{2}=-2$

$16x-16=(4x-5)(5-4x)$

$(4x-5)^2+16x-16=0$

$16x^2-40x+25+16x-16=0$

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0$

$a+b=0$

$\frac{a}{4}+b=4$

$\frac{a}{4}-a=4$

$-\frac{3}{4}a=4$

$-3a=16$

$a=-\frac{16}{3}$

$b=\frac{16}{3}$

$a+b=1$

$\frac{a}{4}+b=4$

$\frac{a}{4}+1-a=4$

$\cancel{3}=\ -3=\frac{3a}{4}$

$a=-4$

$b=5$

$-4x+5$

$-4\cdot\frac{3}{4}+5=$

$BD^2=40$

$\frac{16x-16}{4x-5}$

$\frac{48(4x-5)^{\cancel{2}}-\cancel{8(4x-5)}}{(4x-5)^3}=0$

$x=\frac{5}{4}$

$48\cdot 4x-48\cdot 5-8=20$

$\frac{16}{2}=\frac{2}{\frac{1}{8}}$

$=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$=\frac{8}{5}=\frac{5}{8}$

$=\cos 30°$

$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1}=\frac{16t}{4t-1}$

$ax+b$

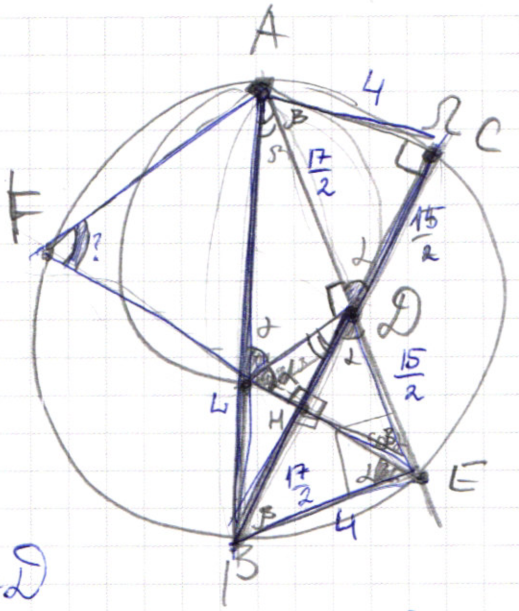
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle AEF$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$BD \cdot CD = AD \cdot ED = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$BD^2 = BL \cdot AB$

$\frac{17^2}{4} = BL \cdot AB$

$BL \cdot AB = BD^2$

$(2R - 2r)(2R) = BD^2$

$4R^2 - 4Rr - BD^2 = 0$

$4R^2 - 4Rr - \frac{17^2}{4} = 0$

$16R^2 - 16Rr - 285 = 0$

$D =$

$2R = \sqrt{272}$

$R = \frac{\sqrt{272}}{2}$

$272 - \cancel{4}^2 \cdot \frac{\sqrt{272}}{\cancel{2}} \cdot r - \frac{289}{4} = 0$

$\frac{799}{4} = 2\sqrt{272} \cdot r$

$\frac{R}{r}$

$\frac{15}{17} = \frac{AD}{DE}$ $\quad 15DE = 17AD$

$DE = \frac{17}{15} AD$

$\frac{15 \cdot 17}{4} = AD \cdot DE$

$\frac{\cancel{15} \cdot 17}{4} = AD \cdot \frac{\cancel{15}}{17} AD$

$AD = \frac{17}{2}$

$DE = \frac{289 - 225}{64}$ $\quad \frac{64}{4} = 16$

$16^2 + 4^2 = 256 + 16 = 272$

$272 : 2 = 136$

$1088 - 289 = 799$

$256 + 16 = 272$

$r = \frac{799}{8\sqrt{272}}$

$4 \cdot 17 = 68$; $17 \cdot 17 = 289$

$272 \cdot 4 = 1088$; $1088 - 289 = 799$

$\frac{\angle BD}{AB} = \frac{BL}{BD}$ $\quad AB \cdot BL$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x+|10x-x^2|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: Ог: $10x-x^2>0$ $\quad x(10-x)>0$ $\quad$ 0 10

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $\quad 10x-x^2=t$

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$ $\quad t+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}$

$t+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3(t+t^{\log_3 4})\geq \log_3 5\cdot\log_3 t$

$\log_3(t+4^{\log_3 t})\geq \log_3 t\cdot\log_3 5$

$5^0-4^0=1-1$

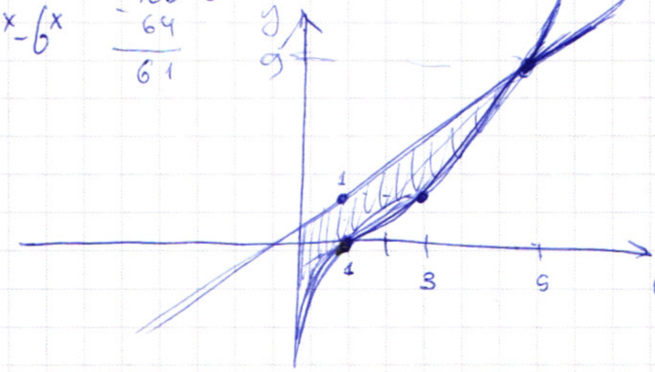
$\log_3(t+t^{\log_3 4})\geq \log_3 t$

$t\geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$ $\quad t\geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$

$t^1\geq t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$

$5^2-4^2=25-16=9$

$t\left(t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1}-1\right)\leq 0$ $\quad a^x-b^x$ $\quad 125-64$, -64, 61



$t\left(t^{\log_3\frac{5}{3}}-t^{\log_3\frac{4}{3}}-1\right)$

$f=5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$ $\quad a^x=a^x\ln a$ $\quad (\log_3 t)'=\frac{1}{t\cdot\ln 3}$

$f'=5^{\log_3 t}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{t\ln 3}$ $\quad t\in(0;9]$

$t\geq$

$2\alpha+2\arccos\frac{1}{\sqrt5}=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

$10x-x^2\leq 9$ $\quad t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha$

x^3-

$x^2-10x+9\leq 0$ $\quad e \quad t^a-t^b$

$x=\left[\begin{matrix}1\\9\end{matrix}\right.$ $\quad$ 1 5

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \left(\frac12\right)^3-\left(\frac12\right)^2=$

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$2\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$2\cdot\left(+\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cancel{\cos(2\alpha+2\beta)}\ \cos 2\beta=+\frac{2}{5}$ $\quad |\sin 2\beta|=\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta=\frac{\sqrt5}{5}=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow \sin 2\beta=\sqrt{1-\frac15}=\sqrt{\frac45}=\frac{2}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha - ?$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(1) $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

(2) ~~$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$~~ +

$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90$

$x^2-12x+36$ +

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x(2y-1)+6(1-2y)$

$(2y-1)(x-6)$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$ -3

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$\begin{cases} 2y-1=a \\ x-6=b \end{cases}$

$3=\sqrt{30-12-15+6}$

$225+\cancel{36}-12\cdot15-\cancel{36}=45$

$15\cdot3$

$x-12y=\alpha a+\beta b$

$x-12y=\alpha(2y-1)+\beta(x-6)$ $x(2y-1)-6(2y-1)$

$x-12y=\alpha\cdot 2y-\alpha+\beta\cdot x-6\beta$

$x-12y=\beta x+\alpha\cdot 2y-\alpha-6\beta$

$\beta=1$

$2\alpha=-12 \Rightarrow \alpha=-6$

$x-12y=-6a+b$

(1) $\begin{cases} -6a+b=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$ (2)

(1) $b\geq 6a$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

(1) $\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ \boxed{b^2+9a^2=90} \end{cases}$ (2)

(1) $\frac{b}{a}=t$

$t^2-13t+36=0$

$36\cdot4=144$

$D=169-144=25$

$t=\frac{13\pm5}{2}=\left[\begin{matrix}9\\ \frac{8}{2}=4\end{matrix}\right.$

$\left[\begin{matrix}\frac{b}{a}=9 \\ \frac{b}{a}=4\end{matrix}\right.$ $b=9a$

$b=4a$ п.к, т.к. b

$81a^2+9a^2=90$

$90a^2=90$

$\boxed{a=\pm1}$

$\boxed{b=\pm9}$

$2y-1=$ $\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$

$\begin{cases} 2y-1=-1 \\ x-6=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$ п.к.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)