МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$ (формула сложения ~~синусов~~ синусов)

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\left.\begin{aligned}&\sin^2(2\alpha+2\beta)+\cos^2(2\alpha+2\beta)=1\\&\sin^2(2\alpha+2\beta)+\cos^2(2\beta) = \cancel{8}\,\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2(2\alpha+2\beta)=\cos^2(2\beta)$

т.е. $(\cos(2\alpha+2\beta)-\cos 2\beta)(\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\beta))=0$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)-\cos(2\beta)=0 \Rightarrow -2\sin\alpha\,\sin(\alpha+2\beta)=0$

1.1) $\sin\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0 \Rightarrow$ первый ответ.

1.2) $\sin(\alpha+2\beta)=0$

$\sin\alpha\cos(2\beta)+\cos\alpha\sin(2\beta)=0$

$\cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\Rightarrow$ 2 подслучая

$\Rightarrow$ 1.2.1) $\sin\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=0$ $\quad \cos\alpha\neq0$ $\quad :\cos\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$

$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$

1.2.2) $\sin\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$

при $\cos\alpha=0 \Rightarrow \sin\alpha=0 \rightarrow \varnothing$

2) $\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\beta)=0$ т.е.

$2\cdot\cos(\alpha+2\beta)\cdot\cos\alpha=0$ $\quad \cos\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha$ не сущ.

$\Rightarrow \cos(\alpha+2\beta)=0$

$\cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = 0$

2.1) $\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$

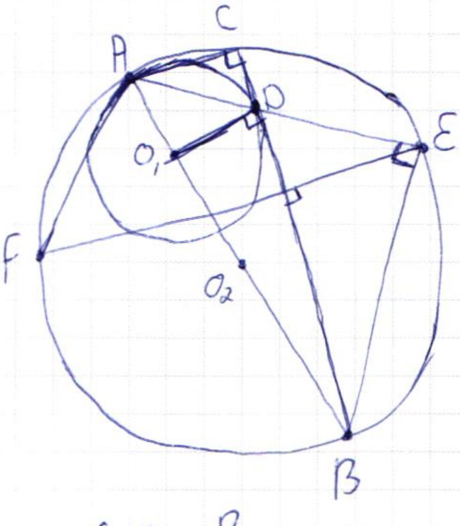
$tg\,\alpha = 4$

2.2) $\cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$

$\Rightarrow tg\,\alpha = -4$

Ответ: $tg\,\alpha = \{0;\ 4;\ -4;\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\}$

№4



Т.к. Ω, ω касаются в точке A то AB содержит диаметр ω. Пусть O_1 и O_2 центры окружностей ω и Ω соответственно и r и R их радиусы

$O_1O_2 = R - r$

$\angle ACB = \angle AEB = 90°$ т.к. они опираются на диаметр

$\Rightarrow AC \parallel O_1D$ из паралельности следует:

$\frac{BD}{DC} = \frac{BO_1}{AO_1} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{2R-r}{r} \Rightarrow 10R - 5r = 13r \Rightarrow R = 1{,}8r$

$O_1B = O_1O_2 + O_2B = 2{,}6r$ из Теоремы Пифагора выходит что:

$BD^2 + O_1D^2 = O_1B^2$ т.е. $\frac{169}{4} + r^2 = \frac{169}{25}r^2$

$\cancel{\frac{144}{25}r^2 = \frac{169}{25}}$ $\frac{144}{25}r^2 = \frac{169}{4}$ $r \cdot \frac{12}{5} = \frac{13}{2}$ $r = \frac{65}{24}$ $R = \frac{39}{8}$

$\cancel{r = \frac{13}{12}}$ $\cancel{R = \frac{39}{20}}$ $\angle BAE = \angle O_1DA$ т.к. $O_1D = O_1A$

$\angle O_1DA = \angle DAC$ т.к. $O_1D \parallel AC$ $\Rightarrow \angle O_1AD = \angle DAC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

т.е. $CE = BE$ т.к. на них опираются одинаковые углы т.е перпендикуляр из E на BC будет падать на середину т.к. CEB - равнобедренный и будет проходить через середину AB из-за параллельности $\Rightarrow EO_2F$ - лежат на одной прямой $\Rightarrow EF$ диаметр Ω

$\frac{BC}{AB} = \cos\angle CBA = \frac{9}{\frac{39}{4}} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$

$\cos\angle CBA = \sin\angle O_1AC = \frac{12}{13}$

$\cos\angle O_1AC = \frac{5}{13}$

$\cos\frac{\angle O_1AC}{2} = \sqrt{\frac{\frac{5}{13}+1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{13}}$

$\sin ABE = \cos\frac{\angle O_1AC}{2} = \sqrt{\frac{8}{13}}$

$\Rightarrow \sin ABE < 90 \Rightarrow \sin ABE = \arcsin\sqrt{\frac{8}{13}}$

$\angle ABE = \angle AFE$ т.к. они опираются на одну дугу

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{8}{13}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2}AE\cdot EF\sin FEA = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin ABE\cdot 2\cdot R\cdot\sin BAE$ (т.к. EO_2F на одной прямой то $\angle O_2EA = \angle O_2AE$)

$S_{AFE} = 2R^2\sin ABE\sin BAE = 2\cdot\frac{39^2}{8^2}\cdot\sqrt{\frac{8}{13}}\cdot\sqrt{\frac{5}{13}} = \frac{13\cdot 9\sqrt{40}}{32} = \frac{117\sqrt{10}}{16}$

Ответ: радиусы: $\frac{65}{24}$ и $\frac{39}{8}$ $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{8}{13}}$ и $S_{AFE} = \frac{117\sqrt{10}}{16}$

N 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times 4 \end{vmatrix} -$$

$$15y^2-45xy+30x+25y+10=0$$

$$3y^2-9xy+6x+5y+2=0$$

$$\cancel{3y^2+5y+2=3(y-1)\left(y-\tfrac{2}{3}\right)}$$

$$6x-9xy=-9x\left(y-\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 3y^2-9xy+6x+5y+2=3(y-1)\left(y-\tfrac{2}{3}\right)-9x\left(y-\tfrac{2}{3}\right)=$$

$$=3\left(y-\tfrac{2}{3}\right)(y-1-3x)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{y=\tfrac{2}{3}} \text{ или } y=3x+1$$

N 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$\log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2+6x>0$$

$$\Rightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$$3=4^{\log_4 3} \Rightarrow (x^2+6x)^{\log_4 3}=\left(4^{\log_4(x^2+6x)}\right)^{\log_4 3}$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$\log_4(x^2+6x)=a \Rightarrow x^2+6x=4^a \Rightarrow 3^a+4^a \geq 5^a$$

при $a=2$ равенство т.к. слево и справо это показательные функции то в какой то момент большая из них будет возрастать быстрее т.е. при $a>2$ $5^{-a}>4^a+3^a$

$\Rightarrow a\leq 2 \Rightarrow x^2+6x\leq 16$ но $x^2+6x>0 \Rightarrow x>0$

$x^2+6x-16\leq 0$ $D=100$ $(x-2)(x+8)\leq 0 \Rightarrow x\leq 2$ $x\geq -8$ или $x<-6$

$\Rightarrow$ ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

из I уравнения $\cancel{9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2}$

$\cancel{9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0}$

$3xy-2x-3y+2=3y(x-1)-2(x-1)=(3y-2)(x-1)$

$(3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3y-2=a \quad x-1=b \qquad y=\frac{a+2}{3}$

$a-2b=\sqrt{ab} \qquad a^2-4ab+b^2=ab \qquad a^2-5ab+4b^2=0$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

$3b^2+3\left(\frac{a+2}{3}\right)^2-\frac{4(a+2)}{3}=7 \;\Big|\cdot 3$

$9b^2+a^2+4a+4-4a-8=21$

$9b^2+a^2=25$

$\cancel{9b^2+5ab=25}$

$a^2+4b^2=5ab$

$5b^2=25-5ab$

$b^2+ab=5$

$a=\frac{5-b^2}{b} \quad b\neq0$

$9b^2+\left(\frac{25-b^2}{b}\right)^2=25$

$9b^2+\frac{25-10b^2+b^4}{b^2}=25 \quad |\times b^2$

$10b^4-35b^2+25=0$

$b^2=b_1$

$10b_1^2-35b_1+25=0$

~~$2b_1^2-\ldots+125=0$~~

$2b_1^2-7b_1+5=0$

$D=49-40=9$

$b_1=\frac{7+3}{4}=2{,}5 \qquad b=\pm\sqrt{2{,}5}$

$b_2=\frac{7-3}{4}=1 \qquad b=\pm 1$

1) $b=\sqrt{2{,}5} \Rightarrow a=\sqrt{2{,}5}$

но $a-2b<0$ но должно быть ≥ 0 т.к. $a-2b=\sqrt{ab}$

2) $b=-\sqrt{2{,}5} \Rightarrow a=-\sqrt{2{,}5}$ ✓ $x=-\sqrt{2{,}5}+1$ $y=\frac{-\sqrt{2{,}5}+2}{3}$

3) $b=1 \Rightarrow a=4$ ✓ $\Rightarrow y=x=2$

4) $b=-1$ $a=-4$ $a-2b<0$ $\varnothing$

Ответ: $\left(-\sqrt{2{,}5}+1; \frac{-\sqrt{2{,}5}+2}{3}\right)$ и $(2;2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(1)+f(a)=f(a) \Rightarrow f(1)=0$

$f(p)=\lfloor \frac{p}{4} \rfloor \Rightarrow f(2)=0;\ f(3)=0;\ f(5)=1;\ f(7)=1;\ f(11)=2;\ f(13)=3;\ f(17)=4$

$f(19)=4;\ f(23)=5;$ $\quad f(16)=0 \quad f(24)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0 \quad f(10)=f(2)+f(5)=1 \quad f(18)=0 \quad f(25)=2$

$f(4)=f(2)+f(2)=0 \quad f(12)=f(2)+f(6)=0 \quad f(20)=1 \quad f(26)=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=0 \quad f(14)=f(2)+f(7)=1 \quad f(21)=1 \quad f(27)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0 \quad f(15)=f(3)+f(5)=1 \quad f(22)=2$

$\left\{\frac{x}{y}\right\}$ принимает значения: $\frac{3}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{3}{27}$

$\frac{4}{3}; \frac{4}{4}; \ldots \frac{4}{27}$

$\vdots$

$\frac{27}{3}; \frac{27}{4}; \ldots \frac{27}{27}$

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ т.к. если $f(x)<f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

для $x=3$ такие сущ. y для которых $f(y)>0$ их 15 от 3 до 27

для $x=4$

Я нашел $f(x)$ $\forall x \leq 27$ $\quad x \geq 3$ $\quad \exists\ 7\ x$ для которых $f(x)=1$

3 $f(x)$ равных 2-ум 2 из них равны 3;

2-е равны 4 и 1 равен 5 10 из них равны 0

для $f(x)=0$ $\exists\ 10\ x$ и $\exists\ 25-10=15$ y таких что $f(x)<f(y)$

$10 \cdot 15 = 150$

$f(x)=1$ $\exists\ 7$ таких x $\exists\ 8$ таких y что $f(x)<f(y) \Rightarrow 7 \cdot 8 = 56$

$f(x)=2$ $\exists\ 3$ таких $x \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$

$f(x)=3$ $\exists\ 2$ таких для них есть 3 y так что $f(x)<f(y) \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6$

для $f(x)=4$ есть 2 таких x и для них только 1 y такой что $f(y)>f(x)$ => 2 способа

для $f(x)=5$ $\nexists$ y таких что $f(y)>f(x)$ и $3\le y\le 27$

=> Всего способов будет $2+6+15+56+150=228$

Ответ: 228 пар $(x;y)$

N6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30 = 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$$

на промежутке $x\in[1;3]$ парабола $8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$ имеет макс значение в точке 1 => $x\to1$

=> ~~$a+b\ge4$~~ $a+b\ge4$

$\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$ - min когда $2x-2$ - max => $x=3$ т.е. $2+\frac{1}{4}$

=> ~~...~~ $0\le 3a+b\le\frac{9}{4}$

$$\frac{4x-3}{2x-2}=8x^2-34x+30$$

$$4x-3=16x^3-16x^2-68x^2+68x+60x-60$$

$$16x^3-84x^2+124x-57=0$$

если это уравнение имеет 2 корня на промежутке $x\in[1;3]$

=> мы получим корни x_1 и x_2 для которых

$$\left.\begin{aligned} ax_1+b=c_1 \\ ax_2+b=c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{мы можем найти } a \text{ и } b$$

или же график линии $ax+b$ находится между параболой и гиперболой на промежутке $x\in[1;3]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$25-24=1$

$\frac{5+1}{6}=1$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$ $3(y-1)(y-\frac{2}{3})+6x(1-\frac{5}{2}y)$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$5x^2-20x-15y+15xy=10$

$5x^2-20x-15y+15xy-10=0$

$\cancel{(x-2)^2+15xy-15y-30}$

$15y(x-1)+5(x^2-4x-2)$

$16+8=24$

$5x^2-10x+5$

$5(x-1)^2-10x-15-15y+15xy=0$

$(x-1)^2-2x-3-3y-3xy=0$

$15y^2-45xy+30x+25y=-10$

$3y^2-15yx+6x+5y=-2$

$3y(y-5x+1)+6x+2y+2=0$

$2\sin\frac{\beta-2}{2}\cos\frac{180-\alpha-\beta}{2}$

$x^2-x(4-3y)-3y-2=0$ $-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$D=16-16y+9y^2+8+12y$ $\sin\alpha-\sin\beta$

$9y^2-4y+24$

$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\sin 45+\sin 45$

$x^2-4x-3y+3xy-2=0$

$(x-2)^2-3y+3xy-6=0$

$\sin\alpha+\sin\beta$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$xy=y+2$

$\sin(\alpha+2\beta)\sin\alpha=0$ $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$

$=-\frac{8}{17}$

$(\cos(2\beta)-\cos(2\alpha+2\beta))$

$(\cos(2\alpha)+\cos(2\alpha+2\beta))$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$

$\cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)+\cos^2(2\alpha+2\beta)=1$

$\cos^2(2\beta)=\cos^2(2\alpha+2\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f: \mathbb{Q}^+$

$f(p)=\lfloor \frac{p}{4} \rfloor$ $\quad f(3)=0$

$f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x)$

$f(3)=0$

$-3xy+6x+5y+7$

$f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$3y(y-3x)$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x \geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$4^{\log_4 3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$5x^2-20x-15y-10+15xy=0$

$a^{\log_4 3}+a \geq a^{\log_4 5}$ $\qquad \log_4(x^2+6x)$

$x^2-4x-3y-2+3xy=0$

$a^{\log_4 \frac{4}{3}}+1 \geq a^{\log_4 \frac{5}{3}}$ $\qquad b=\log_4 a$

$(3xy+2x-3y+2)$

$a^{\log_4 \frac{4}{3}}(a^{\log_4 \frac{5}{4}}-1)$

x^2-2x-4

$9y^2+4x^2-12xy$

$9y^2+5x^2-2x-4-12xy=0$

$a=4^b$

$3^b+4^b \geq 5^b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

3 4 5 5

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

7 33

$9y^2+4x^2-6xy=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2+2x+3y-9xy=2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$6y^2+x^2+8x+7y-9xy=-2$

$\cancel{12x^2}$

$12y^2+7x^2-4x-y-9xy=6$

$24y^2+14x^2-8x-2y-18xy=6$

$9y^2+9x^2-18xy$

$15y^2+5x^2-8x-2y=12$

$6y^2+x^2+8x+7y-9xy+2=0$

$12y^2+2x^2+16x+14y-18xy+4=0$

$x-y$

$9y^2-6xy+x^2$

$3y^2+6x^2-4x-y=6$

$3y^2-4y-4=0$

$D=16+48=64$

$\frac{4+8}{6}=2$

$\frac{4-8}{6}=-\frac{1}{3}$

$12-4-6+2$

2

$36+64$ 100 $\frac{-6+10}{2}=2$ $\frac{-6-10}{2}=-8$

$18y^2+8x^2+4x+6y-18xy=3x^2+3y^2-6x-4y$

$15y^2+5x^2+10x+10y-18xy=0$

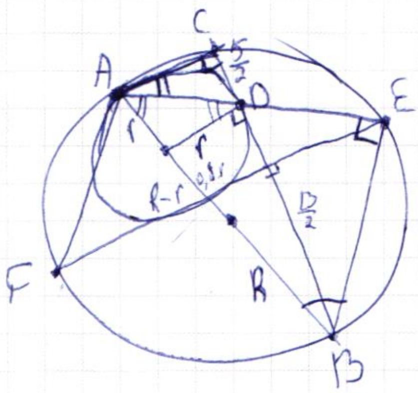
$6y^2+10x+10y+9(x-y)^2=4x^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$(y-1)(3y-2)$

$25-24=1$ $\cancel{\frac{3y-2}{}}$

$\sin\alpha+\sin\beta$ $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{-5+1}{6}=-\frac{2}{3}$

$\frac{-5-1}{6}=-1$ $\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}$ $-9x\left(y-\frac{2}{3}\right)+3(y-1)\left(y-\frac{2}{3}\right)$ $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{5+1}{6}=1$

$3\left(y-\frac{2}{3}\right)(y-1-3x)$

$25-24=1$

$\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ $2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\frac{2R-r}{r}=\frac{13}{5}$

$15y^2-45xy+30x+25y+10=0$ 16 $\sqrt{\frac{8}{13}}=\cancel{28}$

$3y^2-9xy+6x+5y+2=0$

$10R-5r=13r$

$\sqrt{\frac{8}{13}}$

$R=1{,}8r$

$2{,}6r$ r

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$r^2+\frac{169}{4}=\frac{169}{25}r^2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$\frac{144}{25}r^2=\frac{169}{4}$

$5x^2-20x+15xy-15y-10=0$

$\frac{12}{5}r=\frac{13}{2}$

$x^2-4x+3xy-3y-2=0$

$r=\frac{65}{24}$

$3x(x+y)$ $\cancel{3y^2+x^2-2x+2y-12xy=0}$

$x(x+3y)-2(x+3y)-2x-2-3y$

$\cancel{3x(x+y-1)-x-3y-2=0}$

$(x-1)(x+3y)-3x-2=0$

$x(x+3y)$

$x(x+3y-2)-2x-3y-2$

$(x-2)(x+3y)-2x-2+3y$

$\cancel{2x^2-8x-6y-4+12xy=0}$

$(x-1)(x+3y)-3x-2$

$x^2-4x-3y-2+6xy=0$

$(x-1)(x+3y-3)=1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16 + \frac{12}{7}$ 84 $x = y+1$

N2

$3y(x-1)-$

225

$4x^2+2x+3y-2+9y^2$

100

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$\sqrt{(3y-1)(x-1)}$

$(3y-2x-2)^2$

$\frac{4+10}{6}=\frac{7}{3}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}=3y-2x$

$\frac{4-10}{6}$ $3(x+1)^2+3y^2-4y-7=0$

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3y-2-2x+2$

228

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$(-3y+2x+2)^2$

$3y-2=a$ 150

$(3y-2x+2)^2$

$y=\frac{a+2}{3}$

$x-1=b$ 23

56

78

$9y^2-12xy-12y+8x+4+4x^2$

$-12xy-12y+8x+4$

$y=\frac{a+2}{3}$

$3b^2+$

~~$-3xy+3y-2x$~~ -2

$15y+3xy-6x-6$

$a-2b=ab$

$15y-6x-6-3xy$

$\left(3y-\frac{5}{2}x+1\right)$

$a^2+9b^2=25$

$a^2+4b^2=5ab$

$\frac{a^2-25}{3}+3b^2=$

3(

3+2+2+1

$9y^2-15xy-6y+5x+\frac{25}{4}x^2+1$

$3y-7$

10-0

7-1

2+2+1

2-3

$-3-\frac{9}{4}x^2-3x+9y$

$(a-5)\left(\frac{a+5}{3}\right)$

3-2

$9y^2-15xy+\frac{25}{4}x^2$

$3y-2=\sqrt{3}$

2-4

1-5

$3(y+1)\left(y-\frac{7}{3}\right)$

$5b^2+5ab=25$

$3y^2$

$b^2+ab=5$

$3(y-3)(y+1)$

$a=\frac{5-b^2}{b}$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2 \mid x-2$

$4x-\frac{15}{8}y+10$

$3y^2-4y-7=0$

$-8x$

$D=16+84=100$

$-15xy+10x+9y^2+3y-2$

$\frac{4+10}{6}=\frac{7}{3}$ -1

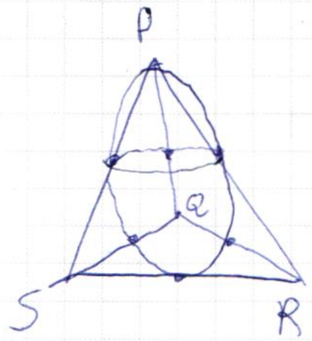
$30y+10x+9y^2+3y-2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



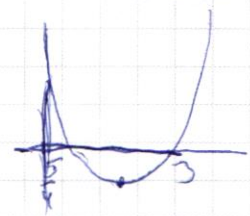
$289-240=49$

$2(4x^2-17x+15)$

17
17
119
17
289

$8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$

$a\cdot x+b\geq 4$



2 (

$\frac{17+7}{8}=3$

$\frac{17-7}{8}=\frac{5}{4}$

34
3
102

72

2

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)