МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\Downarrow$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$. Есть 2 варианта: $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

либо $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$.

I $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$.

Пусть $\sin 2\alpha = a$; $\cos 2\alpha = b$:

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$a = -1-2b$

$1 + 4b^2 + 4b + b^2 = 1$

$b(5b+4) = 0$

$b = 0$

$\cos 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = -1$

$\Downarrow$

$2\alpha = \pi + 2\pi n$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$tg\,\alpha$ невозможен.

$5b + 4 = 0$

$b = -\frac{4}{5}$.

$\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

$tg\,2\alpha = -\frac{3}{4}$.

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$tg\,\alpha = x$:

$-\frac{3}{4} = \frac{2x}{1-x^2}$

$\Downarrow$

$-3 + 3x^2 - 8x = 0$

Корни:

$x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$.

$\boxed{tg\,\alpha = -\frac{1}{3};\ 3}$

II

$\sin 2\alpha = a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = b$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \cos\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$a = 2b - 1$

$4b^2 - 4b + 1 + b^2 = 1$

$b(5b - 4) = 0$

$b = 0$ разбирали $\Rightarrow 5b - 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = \frac{4}{5}}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow tg 2\alpha = \frac{3}{4}$.

$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2x}{1 - x^2}$

$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 2x$

$-3x^2 - 8x + 3 = 0$

Корни $x = \frac{1}{3}$; $x = -3$; $tg\alpha = \frac{1}{3}; -3$

Если возможны только случаи I или II, то корней у $tg\alpha = 2$, ~~если невозможно~~ $< 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ возможны оба случая $\Rightarrow$ корни $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 3; -3.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; -3; 3.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x^2-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$; $y-1=b$:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+4b-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}, \; ab\geq 0.$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad ab\geq 0.$$

$a=4b$

$ab\geq 0$ верно

$\Downarrow$

$16b^2+9b^2=25.$

$b=\pm 1.$

$a=\pm 4.$

1) $\begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1. \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

2) $x-2=4$

$y-1=+1$

$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

$a=b.$

$10b^2=25.$

$2b^2=5.$

$b^2=\frac{5}{2}$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

1) $\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$\begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

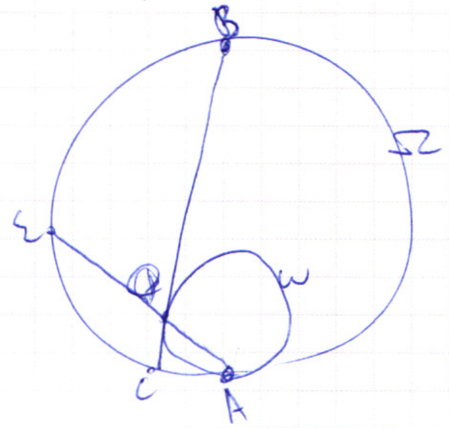
2) $x-2=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y-1=\sqrt{\frac{5}{2}}$

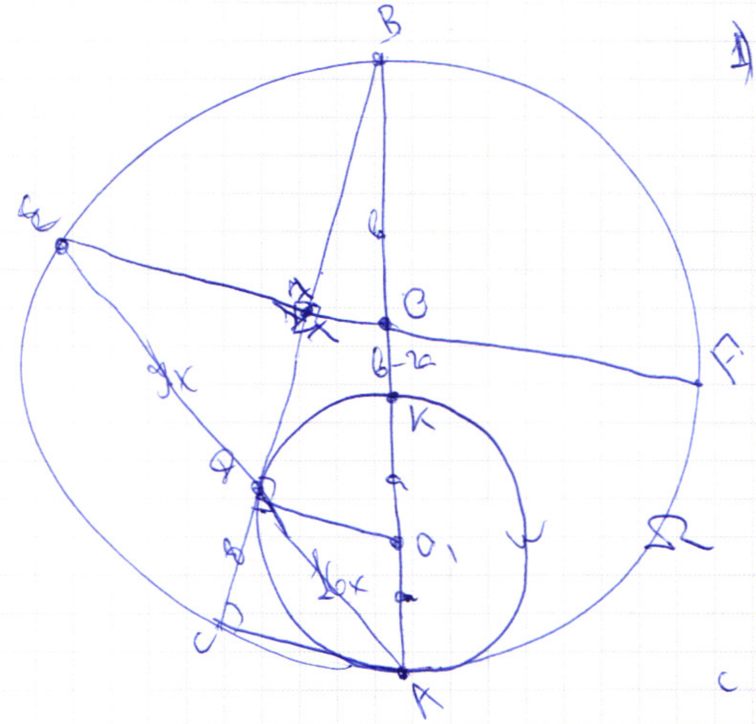
$\begin{cases} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

Ответ: $x=-2; y=0$ | $x=6; y=2$ | $x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}; y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$ | $x=2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; y=1+\sqrt{\frac{5}{2}}.$

Есть факт, что:



$\smile CE = \smile EB$ (меньшие)



1) $\smile CE = \smile EB$; $EF \perp CB$

$\Rightarrow$ $O \in EF$.

~~2) ...~~

2) Пусть $EF \cap CB = T$,

$AB \cap \omega = K$. $AO_1 = a$,

$OB = b \Rightarrow OK = |b - 2a|$.

3) Сделаем гомотетию с центром в т. A. $\omega \to \Omega$

$\Rightarrow K \to B$, $D \to E \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{AD}{AE}$.

$CD \perp BD$ (касательная); $AC \perp BC$ (AB – диаметр) $\Rightarrow$

$O_1D \parallel AC \Rightarrow \frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow \frac{2b-a}{2b} = \frac{17}{25} \Rightarrow 50b - 25a = 34b$

$\Rightarrow 16b = 25a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{16}{25}$.

Тогда $\frac{a}{b} = \frac{AD}{AE} = \frac{16}{25}$. Пусть $AD = 16x \Rightarrow DE = 9x$.

$\deg D_{\Omega} = CD \cdot DB = AD \cdot ED = 8 \cdot 17 = 9 \cdot 16 \cdot x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8 \cdot 17}{9 \cdot 16}} =$

$= \sqrt{\frac{17}{18}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\deg B_\omega = \quad 17^2 = (2b-2a)\,2b$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (b-a)b \;;\; \frac{a}{b} = \frac{16}{25} \Rightarrow a = b\cdot\frac{16}{25}$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{16}{25}b\right)b = \frac{9}{25}b^2$

$\frac{17}{2} = \frac{3}{5}b$

$b = \frac{85}{6}\;;\; a = \frac{136}{15}$

$\sin(\angle A\mathcal{E}F) = \frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{E}\mathcal{D}} = \frac{25/2 - 8}{9\sqrt{\frac{17}{18}}} = \frac{9/2}{9\sqrt{\frac{17}{18}}} = \frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{9}{34}}$

$\angle A\mathcal{E}T = \arcsin\sqrt{\frac{9}{34}}$

$S_{AET} = S_{ECF}\;(AC \parallel \mathcal{E}F) = \frac{CT\cdot \mathcal{E}F}{2} = \frac{25}{2}\cdot\frac{85}{6} = \frac{2125}{12}$

$\cos(\angle AF\mathcal{E}) = \sin(\angle A\mathcal{E}F) = \sqrt{\frac{9}{34}}$

Ответ: $r_\omega = \frac{136}{15},\; r_\Omega = \frac{85}{6},\; \angle AF\mathcal{E} = \arccos\left(\sqrt{\frac{9}{34}}\right)\; S_{AF\mathcal{E}} = \frac{2125}{12}$

№3 Пусть $x^2 - 18x = m$. Тогда $\exists\; 5^{\log_{12}(x^2+18)} \Rightarrow$ ~~...~~

ОДЗ: $x^2+18 \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$m \geq 0$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$m \geq m^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}m}$.

$m^{\log_{12}13} \leq m + 5^{\log_{12}m}$

~~Заметим, что $5^{\log_{12}m}$ возрастает быстрее, чем $m^{\log_{12}13}$ (от переменной m) => $m^{\log_{12}13}$ возрастает медленнее, чем $m+5^{\log_{12}m}$. В точке 0 $m^{\log_{12}13}=0$, $m+5^{\log_{12}m}=5$.~~

~~=> н-во выполняется.~~

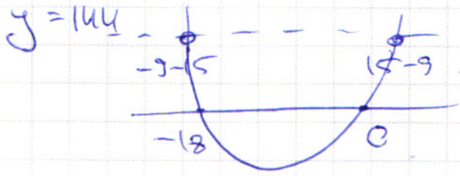
$m^{\log_{12}13}$ возрастает быстрее, чем $m+5^{\log_{12}m}$

=> равенство максимум в 1 точке (т.к. в точке 0 нер-во выполняется).

При $m=12^2$: $m^{\log_{12}13} = 13^2$; $m+5^{\log_{12}m} = 12^2+5^2$

=> равенство => $m \in [0; 12^2]$.

$x^2+18x \in [0; 12^2]$



$x^2+18x-144=0$

Корни $\frac{-18 \pm 30}{2} = -9 \pm 15$.

Итого: $x \in [-25; -18] \cup [0; 6]$.

№6 Всегда должно выполняться:

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2-30x+17$

Если $x = -\frac{11}{4}$,

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{-8x^2-30x-17 = -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{165}{2}-17 = -\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17 = 22-17=5}$

№5

Пусть $x = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ (так можно представить $\forall x$, $\alpha_1\ldots \in \mathbb{Z}$; $p_1\ldots \in \mathbb{N}$.)

$f(1) = 0\cdot f(1) + f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(x\cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x).$

$x\in\mathbb{N}$: $f(x) = \underbrace{f(p_1)+f(p_1)\ldots}_{\alpha_1} + \ldots = \alpha_1\cdot\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_n\cdot\left[\frac{p_n}{4}\right].$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = -f(x) + f(y) < 0$

$f(y) < f(x)$

~~$f(1)=0$ | $f(2)=2$ | $f(3)=3$ | $f(4)=4$ | $f(5)=1$ | $f(6)=5$ | $f(7)=3$ | $f(8)=6$ | $f(9)=6$ | $f(10)=3$ | $f(11)=3$ | $f(12)=7$ | $f(13)=1$ | $f(14)=5$ | $f(15)=4$ | $f(16)=8$ | $f(17)=1$ | $f(18)=8$ | $f(19)=3$ | $f(20)=5$ | $f(21)=6$ | $f(22)=$~~

~~$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=3$; $f(11)=2$; $f(12)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=3$; $f(15)=4$; $f(16)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=$~~

Посмотрим, сколько пар таких, что $f(x)=f(y)=1$:

$\forall p \ \left(\frac{p}{q}\right)=0: \ X = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24.$

$f(x)=2$; ~~x~~ ...

Итого пар $C_{24}^{2} - C_{24}^{11} - \dots$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a+2b=-1$ $a=-1-2b$

$a^2+b^2=1$

$1+4b^2+4b+b^2=1$

$5b^2+4b=0$

$b(5b+4)=0$

$3\cdot 7$
$3+3$
$2\cdot 2\cdot 5$
$2+2+1$

$b=0$

$\cos 2\alpha=0$

$\sin 2\alpha=-1$

$2\alpha=\pi+2\pi n$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$3\,3\,2$
6

$b=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$

$tg 2\alpha=-\frac{3}{4}$

$tg\alpha=-\frac{1}{3}$

$tg\alpha=3$

$2\cdot 2$

$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$2\cdot 11$
$2+$

$-\frac{3}{4}=\frac{2x}{1-x^2}$

$-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x^2=2x$

$-3+3x^2=8x$

$3x^2-8x-3=0$

$D=64+36=100$

$x_1=\frac{8-10}{6}$ $x=\frac{8+10}{6}$

$x_1=-\frac{1}{3}$ $x=3$

$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=2x$

$-3x^2-8x+3=0$

$D=64+36=100$

$x_1=\frac{8-10}{-6}=\frac{1}{3}$ $x=\frac{8+10}{-6}=-3$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2+2+2+2$

$2\cdot 4=8$

$\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cdot 7$ $3\cdot 5$
$2+3$ $3+1$

$a-2b=-1$

$a^2+b^2=1$

$a=2b-1$

$4b^2-4b+1+b^2=1$

$5b^2-4b=1$

$b(5b-4)=0$

$b=\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$

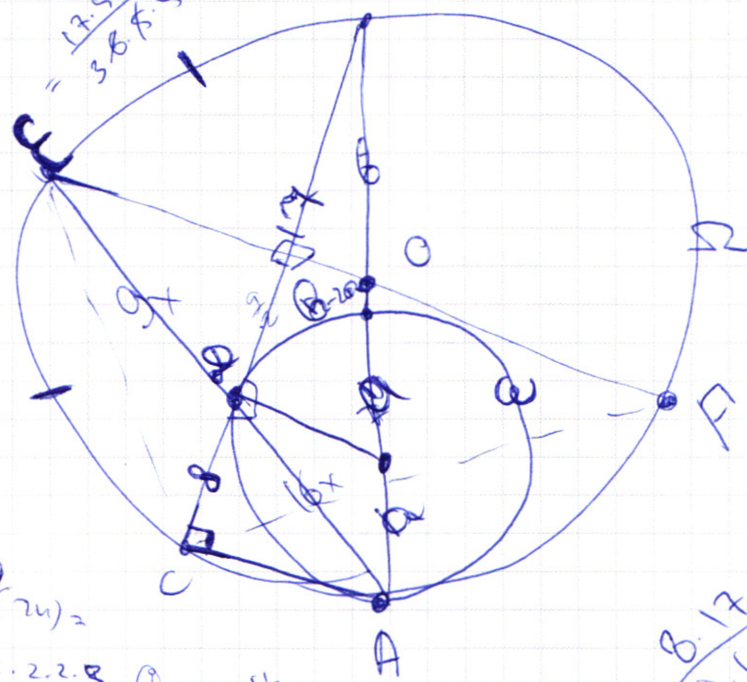
$tg 2\alpha=\frac{3}{4}$

$\frac{85}{6} \cdot \frac{16}{25}$

$\frac{17 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5}$

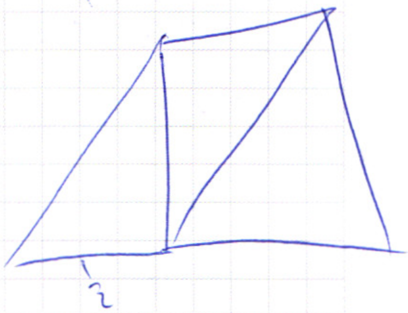
$\frac{17 \cdot 8}{136}$

$\frac{a}{b} = \frac{16}{25}$



$17^2 = (2b-2a)(2b)$

$\frac{17^2}{4} = (b-a)b$



$f(24) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$2+2+2+3$
86

$\frac{8 \cdot 17}{9 \cdot 16}$

$9\sqrt{\frac{17 \cdot 8}{16}} = 9x$

$\frac{25}{2} \cdot 2b$

$\frac{25}{2b} = \frac{17}{2b-a}$

$50b - 25a = 34b$

$16b = 25a$

$\frac{25b}{2}$

$\frac{17 \cdot 8}{26 \cdot 5}$

$\sqrt{\frac{17}{18}} = x$

$\frac{17 \cdot 6}{85}$

$f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] \dots$

$f(x)$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] - \alpha_2\left[\frac{p_3}{4}\right]$

$18^2 + 4 \cdot 12 \cdot 12$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f(x) + f(y) < 0$

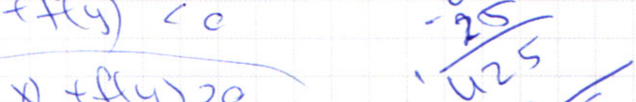
$f(x) + f(y) > 0$

$3 \cdot 3 \cdot 2$
$3 \cdot 3 \cdot 2$
$+ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$
$3 \cdot 2 \cdot 2$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$85 \cdot 25 = 425 + 170 = 2125$



$-18 \pm$

$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3(9+16)$
25

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad tg\, 2x$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\sin 2\alpha(\cos 2\beta - \sin 2\beta)$ $2\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta$

$\sin(\alpha - 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{4}{\sqrt{5}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{5}}\cos^2\beta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin^2\beta + 2\cdot\frac{1}{}$ $\qquad \frac{a}{b}$

$a + 2b = -1.$

$\cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot ctg 2\alpha + 1 = -\frac{4}{5\sin 2\alpha}$ $\qquad a^2 -$

$\sin^2(\cancel{2\alpha} + 2\beta) - \sin(2\alpha + 4\beta) - \sin 2\alpha = \sin^2(\cancel{2\alpha} + 2\beta) + \cos^2(2\alpha + 2\beta)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$ $\qquad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$ $\qquad \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$ $\qquad + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}.$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$12 \to 13$

$2 \cdot 3 \cdot 3$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2$

$3^2(y-1)^2$

$m^{\log_{12}13} - m \le 5^{\log_{12} m}$

$\frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$x(y-1) - 2(y-1)$

$x - 2 = t$

$y - 1 = m$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$31 \cdot 31$

93

961

89

361

460

$t + 9m^2 = 25$

$\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\log_{12} m$

$t - 2m = \sqrt{tm}$

$\sqrt{tm}$

$t^2 + 4m^2 - \cancel{4mt} = 5tm$

$tm \ge 0$

$12 = 13 - 5^1$

$t^2 - tm - 4tm + 4m^2 = 0$

$-8 \cdot \frac{15^2}{8^2} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17$

$t(t-m) - 4m(t-m) = 0$

$-\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - \frac{136}{8}$

$(t-4m)(t-m) = 0$

$t = 4m$

$t = m$

$\frac{89}{8}$

$x^2 + 18x = (x^2 + 18x)^{\log_{12} 13}$

$m + 9m^2 = 25$

$4m + 9m^2 = 25$

$9m^2 + m - 25 = 0$

$-5^{\log_{12} x^2 + 18x}$

$D = 1 + 100 = 101$

m^1

$9m^2 + 4m - 25 = 0$

$D - 16 + 900$

$m = \frac{-1 \pm \sqrt{101}}{18}$

$m = m^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12} m}$

$m - m^{\log}$

$4m + 9m^2 = 25$

$3 + \frac{2}{4x - 3}$

$m\left(1 - m^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)$

$15 \cdot 15$

175

225

$3 + \frac{2}{-\frac{15}{2}}$

$m\left(m^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right) = 5^{\log_{12} m}$

$12^{\log_{12} x^2 + 18} = (x^2 + 18)^{\log_{12} 13}$

$= 3 + \frac{2}{-\frac{9}{2}}$

$= \frac{23}{9} = 3 - \frac{4}{9}$

$1 = 1^{\log_{12}13} - 1$

$15 \cdot 30$

450

$17 \cdot 8$

136

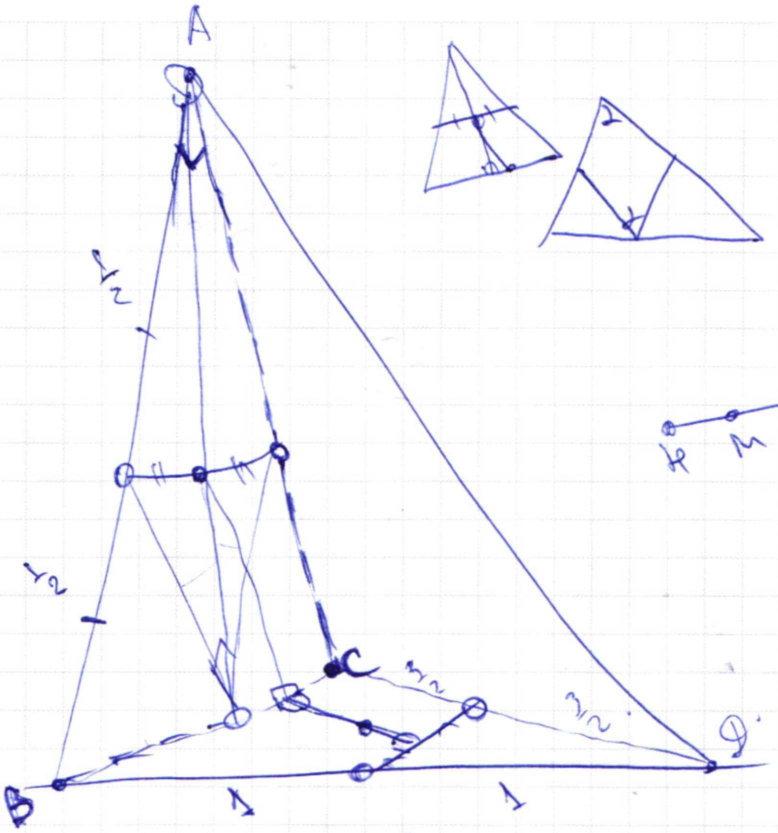
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

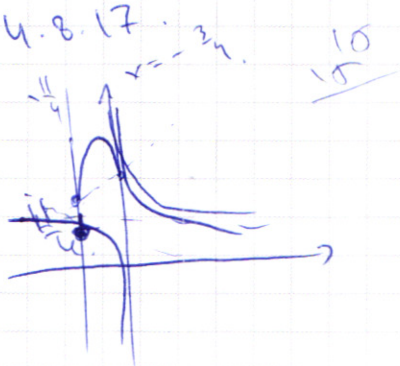
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$900 - 4\cdot 8\cdot 17$

$17 \cdot 32 = 544$

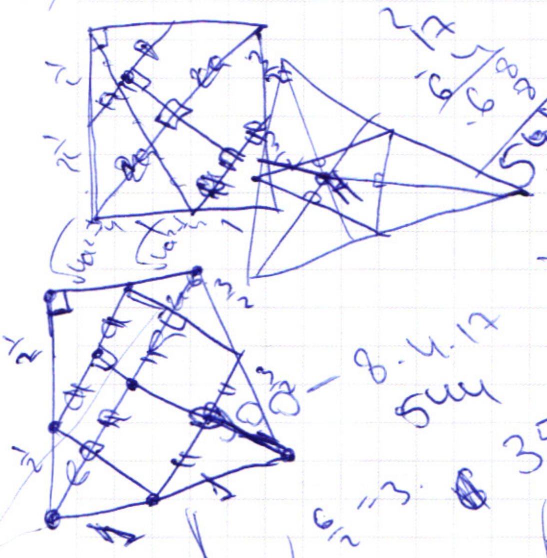
356

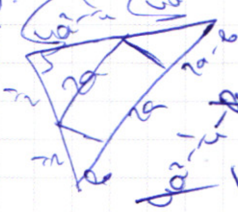
$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{15}{30}\cdot\frac{11}{4}-17$

$-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17$

$\frac{44}{2}-17$

$3+\frac{2}{3-11} = 3+\frac{2}{-8} = \frac{12}{4}-\frac{1}{4} = \frac{11}{4}$





$\frac{12x+9+2}{4x+3}$

$3+\frac{2}{4x+3}$

$900 - 8\cdot 4\cdot 17$

544

356

$\frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$-\frac{22}{8} - \frac{6}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+11}{-8} \le -8\cdot\frac{121}{216}+30\cdot\frac{11}{4}-17$$

$\frac{33}{32}$ $\frac{4}{8}$

$16\cdot 2$

$$\frac{-33+11}{-8}$$

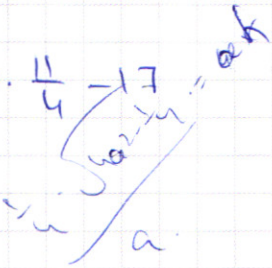
$\frac{-22}{-8}$ $\frac{11}{4}$

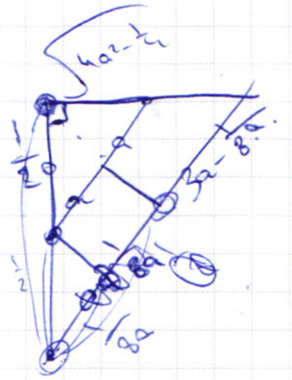
$m>0$

$$\frac{11}{4} \le -\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-11$$

12

$$11\cdot\frac{5}{4} \le \frac{44}{2}$$



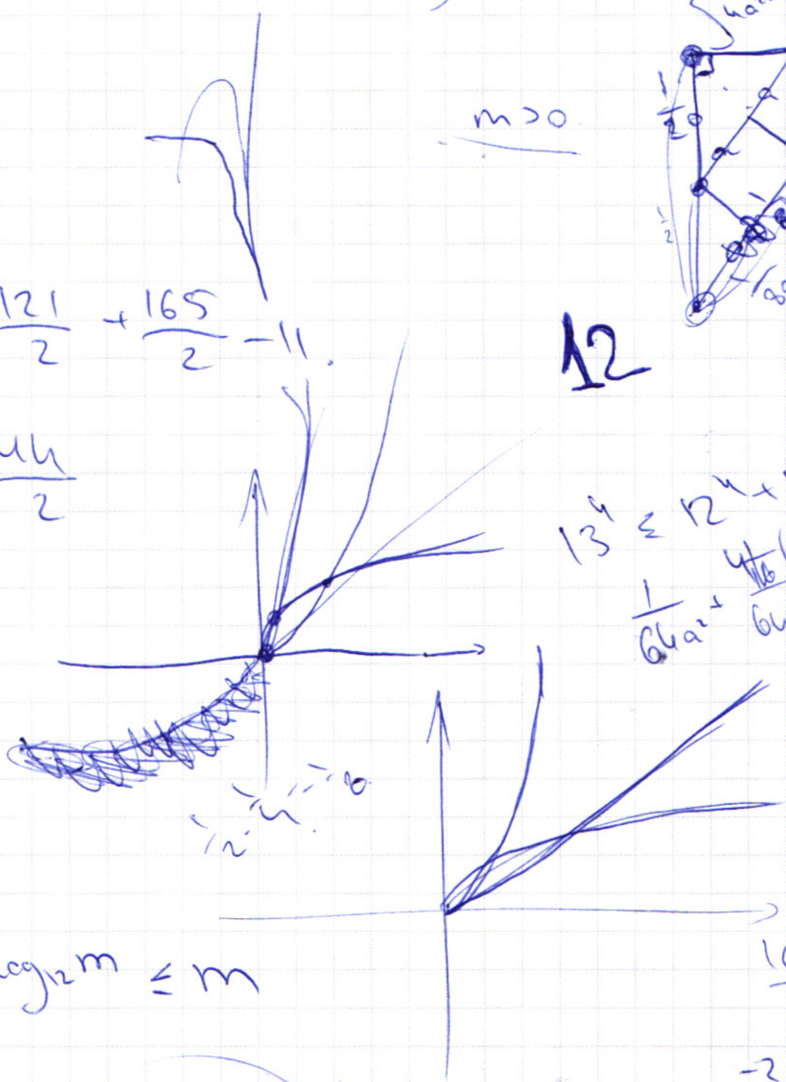


$13^4 \le 12^4+5^4$

$\frac{1}{64a^2}+\frac{4(4a^2-\frac{1}{4})}{64a^2}=\frac{1}{4}$

$\frac{16a^2}{64a^2}=\frac{1}{4}$

$\frac{3\cdot 11}{4}=33$



$169=144+25$

$$m^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}m} \le m$$

$$m^{\log_{12}13} \le m+5^{\log_{12}m}$$

$\frac{1}{12}$ $\left(12^{\log_{12}13}\right)^{-2}$

$\frac{1}{13^2} \le \frac{1}{12^2}+\frac{1}{5^2}$

$m=12^2$

$\frac{1}{12}$

$\left(12^{\log_{12}13}\right)^{-1}$

$13^2=12^2+5^2$

$1 \le 1+5$

$\frac{1}{13} \le \frac{1}{12}+\frac{1}{5}$