МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 8

№5. Т.к. $\forall x \in \mathbb{Q}$ и $x>0$ $f(ab)=f(a)+f(b)$, $f(k)=f(k\cdot 1)=f(k)+f(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1)=0$. $f(1)=f(k\cdot \frac{1}{k})=f(k)+f(\frac{1}{k})=0 \Rightarrow f(k)=-f(\frac{1}{k})$
(для всех рациональных положительных k), т.к. и $\frac{1}{k}$ тогда рациональное и положительное). $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-$
$-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$. То есть нам нужно найти количество пар натуральных $(x;y)$ таких, что $3\le x\le 27$ и $3\le y\le 27$, и $f(x)<f(y)$.

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$

$f(3)=[\frac{3}{4}]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$

$f(8)=f(2)+f(2)+f(2)=0$

$f(9)=f(3\cdot 3)=0=f(3)+f(3)=f(9)$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=[\frac{11}{4}]=2$

$f(12)=\cancel{f(3\cdot 4)=0}=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=[\frac{13}{4}]=3$

$f(14)=\cancel{f(2\cdot 7)=1}\ f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(4\cdot 4)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

$f(18)=f(9\cdot 2)=f(9)+f(2)=0$

$f(19)=[\frac{19}{4}]=4$

$f(20)=f(4\cdot 5)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3\cdot 7)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11\cdot 2)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=[\frac{23}{4}]=5$

$f(24)=f(8\cdot 3)=f(8)+f(3)=0$

$f(25)=f(5\cdot 5)=f(5)+f(5)=$
$=2$.

$f(26)=f(13\cdot 2)=f(13)+f(2)=$
$=3$

$f(27)=f(9\cdot 3)=f(9)+$
$+f(3)=0$.

Вариант 3

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$.

~~$3\log^4(x^2+6x$~~ $3^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-(x^2+6x)$

Пусть $x^2+6x=t>0$ (т.к. $\exists \log_4 t$, $\Rightarrow t>0$, иначе не имеет смысла) $\Rightarrow |t|=t$

$3^{\log_4 t} \geqslant t^{\log_4 5}-t$.

$t^{\log_4 5}=5^{\log_4 t}$; $t=4^{\log_4 t}$; Пусть $p=\log_4 t$.

~~$3^{\log_4}$~~ $3^p \geqslant 5^p-4^p$.

$3^p+4^p \geqslant 5^p$. Разделим левую и правую часть на $5^p>0$ (мы можем это сделать, т.к. $5^p>0 \Rightarrow$ можно делить ($\neq 0$) и знак неравенства не изменится).

$\left(\frac{3}{5}\right)^p+\left(\frac{4}{5}\right)^p \geqslant 1$. $\left(\frac{3}{5}\right)^p \downarrow$ $p\in\mathbb{R}$, т.к. $\frac{3}{5}<1$. Аналогично $\left(\frac{4}{5}\right)^p \downarrow$ $p\in\mathbb{R} \Rightarrow$ $\left(\frac{3}{5}\right)^p+\left(\frac{4}{5}\right)^p \downarrow$ $p\in\mathbb{R}$. 3^2, $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p\leqslant 2$. $\log_4 t\leqslant 2 \Rightarrow t\in(0;16]$.

$x^2+6x\in(0;16]$. $\begin{cases} 0<x^2+6x & x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x^2+6x-16\leqslant 0 \end{cases}$

$x^2+6x-16\leqslant 0$.

$D=36+64=10^2>0$

$x_1=\frac{-6-10}{2}=-8$

$x_2=\frac{-6+10}{2}=2$. $x\in[-8;2]$

$x\in\left[(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)\right]\cap[-8;2]=[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант 3.

Таким образом, $f(t)=0$: $t=3;4;6;8;9;12;16;18;24;27$ — 10.
$f(t)=1$: $t=5;7;10;14;15;20;21;$ — 7.
$f(t)=2$: $t=11;22;25$ — 3
$f(t)=3$: $t=13;26$ — 2
$f(t)=4$: $t=17;19$ — 2
$f(t)=5$: $t=23$ — 1

Ясно, что любая пара $(x;y)$, где $f(x)<f(y)$ нам подходит;
$(x,y\in[3;27]\cap\mathbb{N})$. Значит всего пар: $10\cdot(7+3+2+2+1)+7(3+2+2+1)+3\cdot$
$\cdot(2+2+1)+2\cdot(2+1)+2\cdot1=10\cdot15+7\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=150+56+15+6+2=$
$=206+23=\underline{229}$

Ответ: 229 пар.

Вариант 3.

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \overset{②}{\geqslant} ax+b \overset{①}{\geqslant} 8x^2-34x+30.$

$①\ f(x)=8x^2-(34+a)x+(30-b) \leqslant 0$ на $x \in (1;3]$.

~~Необходимо и~~ т.к. $8x^2-(34+a)x+30-b$ — парабола, ветви которой направлены вверх, у неё есть только 1 непрерывный промежуток, на котором она $\leq 0 \Rightarrow$ необходимо и достаточно выполнения условий $\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases}$ (т.к. если $f(1)>0$, то найдётся $x_0 \in (1;3]$ такой, что $f(x_0)>0$, т.к. $f(x)$ непр.).

$f(1) = 8-34-a+30-b = 4-(a+b) \leq 0$; $4 \leq a+b$

$f(3) = 72-102-3a+30-b = -3a-b \leq 0$; $3a+b \geqslant 0$.

② . На $x \in (1;3]$ $2x-2>0 \Rightarrow$ можем домножить на него левую и правую часть неравенства ②.

Получим: $4x-3 \geqslant 2ax^2+2bx-2ax-2b$

$g(x) = 2ax^2+(2b-2a-4)x+(3-2b) \leqslant 0$

Аналогично с неравенством ①, необходимым и достаточным условием будет $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g(3) \leq 0 \end{cases}$, если $a \geqslant 0$.

$g(1) = 2a+2b-2a-4+3-2b = -1 < 0$.

$g(3) = 18a+6b-6a-12+3-2b = 12a+4b-9 \leq 0$.

$3a+b \leq \frac{9}{4}$. Но из 1-го, $a+b \geqslant 4$.

Получается $a+b \geqslant 4 > \frac{9}{4} \geqslant 3a+b \Rightarrow 2a \leq -\frac{7}{4} \Rightarrow a<0$ (!!!).

Значит осталось рассмотреть случай $a<0$. Тогда необходимо условие. $x_0 = \frac{2a+4-2b}{4a} = \frac{a+2-b}{2a} \notin (1;3]$ (если $f(x_0)>0$) $\big[\ a+2-b = 2-(a+b)+2a$; $(a+b) \geqslant 4$; $2a<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a+2-b<0$.

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\left[\begin{array}{l} \frac{a+2-b}{2a} \le 1. \quad a+2-b \geq 2a \cdot (2a<0) \\ \frac{a+2-b}{2a} > 3 \quad a+2-b < 6a : (2a<0) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2-b \geq a. \\ 2-b < 5a : \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b \le 2-a : \\ b > 2-5a : \end{array}\right.$

Итак, имеем: $\left\{\begin{array}{l} b \geq 4-a, \\ \frac{9}{4}-3a \geq b \\ b \geq -3a \\ \left[\begin{array}{l} b \le 2-a. \\ b > 2-5a. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Есть ещё вариант, когда $D_{доп} \le 0$.

$\frac{D}{4} = \cancel{4b^2+4a^2+16-8b+8a}$

$b^2+a^2+4-2ab-4b+4a - \cancel{8a}\ 2a(3-2b) = b^2+a^2+4+2ab-$
$-4b-2a \le 0.$

$b^2+a^2+2ab+4-4b-2a = (a+b)^2-4(a+b)+2a+4 = (a+b)^2-5(a+b)+4+2a.$

$+3a+b. = \left((a+b)-4\right)\left((a+b)-1\right)+3a+b$

$D=0$ при $a+b=4$; $3a+b=0$; $a=-2$; $b=6$.

Итак: $\left\{\begin{array}{l} b \geq 4-a \\ \frac{9}{4}-3a \geq b \\ b \geq -3a \\ \left[\begin{array}{l} b \le 2-a \\ b > 2-5a \\ a=-2;\ b=6. \end{array}\right. \end{array}\right.$

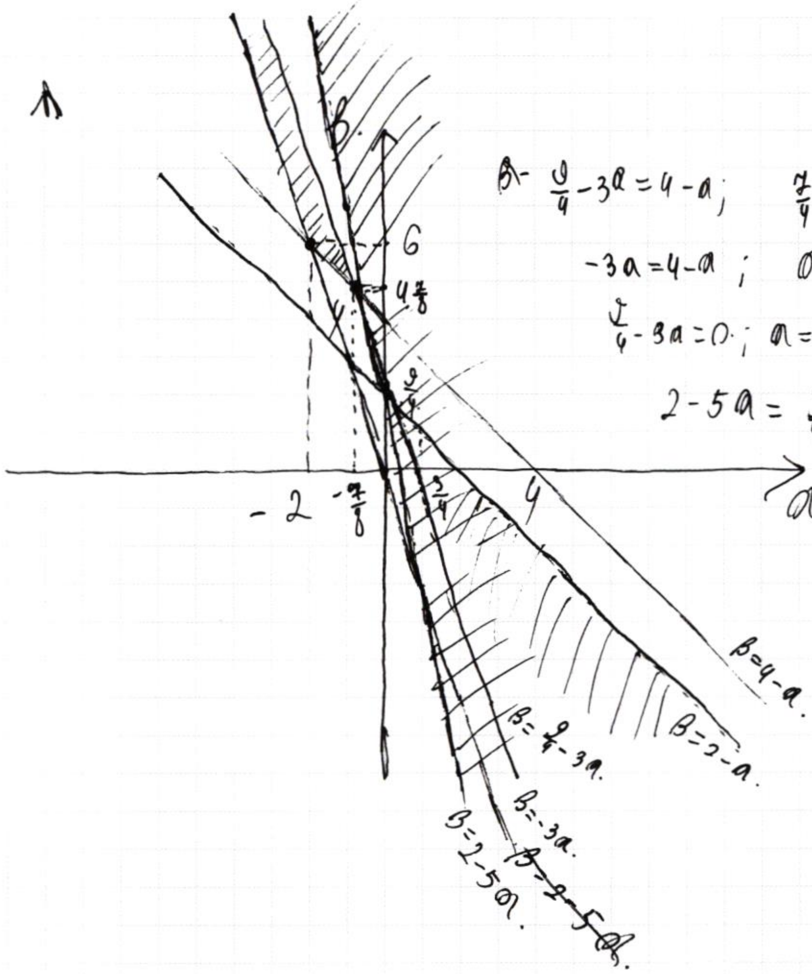
Изобразим все пары $(a;b)$ на графике $b=f(a)$.

$b = \cancel{f(a)}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1



$β$- $\frac{7}{4}-3a=4-a$; $\frac{7}{4}+2a=0$; $a=-\frac{7}{8}$; $β=4\frac{7}{8}$.

$-3a=4-a$; $a=-2$; $β=6$.

$\frac{7}{4}-3a=0$; $a=\frac{3}{4}$

$2-5a=\frac{7}{4}-3a$. $\frac{1}{4}+2a=0$; $a=-\frac{1}{8}$

Мы видим, что нам нужно пересечение.

$$\begin{cases} β \geq 4-a \\ β \geq -3a \\ β \leq \frac{7}{4}-3a \end{cases} \quad (X)$$

и

$$\left[\begin{array}{ll} β\leq 2-a & (1) \\ β > 2-5a. & (2) \\ a=-2; β=6 & (3) \end{array}\right.$$

$X \cap 1$ – ~~невозможно~~ $\varnothing$, т.к. ~~$(β \geq 4-a)\cap(β\leq 2-a)=\varnothing$~~

$β\in(-\infty; 2-a)\cap(4-a;+\infty)=\varnothing$.

$X\cap 2 - \varnothing$, т.к. $β\in(-\infty; \frac{7}{4}-3a]\cap(2-5a;+\infty)$
(линейные k)

$2-5a=\frac{7}{4}-3a$: $a=-\frac{1}{8}$; $-3<0$, $-5<0 \Rightarrow$ нам может подойти только $a>-\frac{1}{8}$ (как, к тому же, видно из рисунка). Но на этом участке $β\leq 2-5a$ и $β\geq 4-a$ не пересекаются, т.к. $2-5a=4-a$; $a=-\frac{1}{2}$. И линейные $k<0 \Rightarrow$ нам нужно $a\leq -\frac{1}{2}$. $(-\infty;-\frac{1}{2}]\cap(-\frac{1}{8};+\infty)=\varnothing$.

$X\cap 3 =$ $a=-2$; $β=6$. Пр-ка: $\begin{cases} 6\geq 4-(-2)=6 \\ 6\geq -3(-2)=6 \\ 6\leq \frac{7}{4}-3(-2)=8\frac{1}{4}. \end{cases}$

Значит это единственная пара чисел $(a;β)$. Ответ: $(-2;6)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

2. $$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}=\sqrt{3xy-2x-3y+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-3x-2y}=\sqrt{\frac{3}{2}(x+y)^2-5(x+y)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(4x-3)$

$(4x-3)-2ax^2-2bx+2ax+2b=\cancel{ax^2+ax-bx+2b}$

$\frac{(4x-3)}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30 \quad f(1)=$

ax^2+bx+c

$x_0=-\frac{b}{2a}$

$y_0=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=$

$=-\frac{b^2}{4a}+c=$

$=\frac{-b^2+4ac}{4a}=$

$=-\frac{D}{4a}$

$0\geq 8x^2-(34+a)x+(30-b) \quad f(1)=8-34-a+30-b=$

$=4-(a+b)\leq 0$

$(34+a)^2-30\cdot 32+32b$

$f(3)=72-102-3a+$

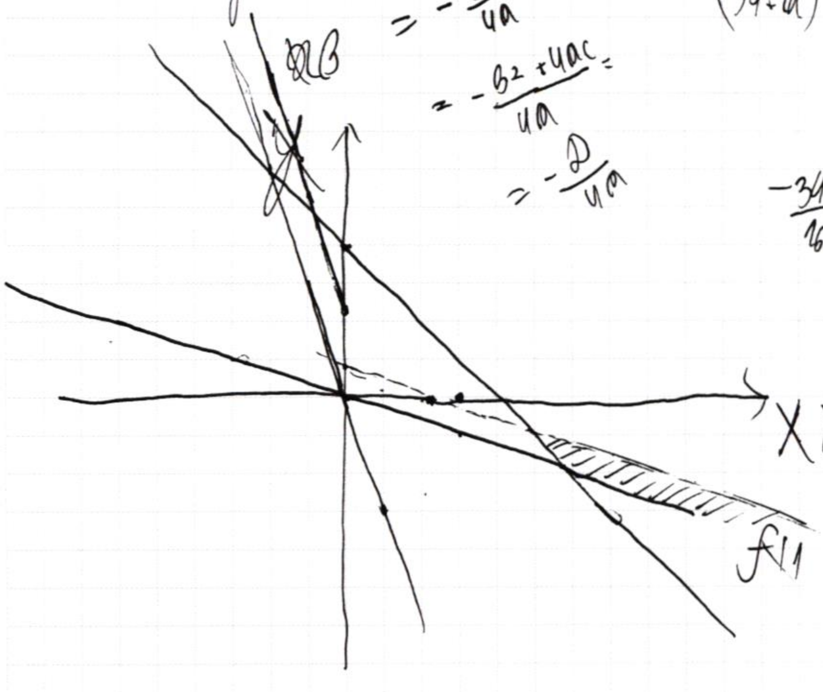
$+30-b=$

$=-(3a+b)\leq 0$

$a+b\geq 4 \quad 3a+b\geq 0$

$-\frac{34^2}{16}+\frac{30\cdot 16}{16}=$

$-1020(-136)=-1156+480=-\frac{676}{16}=$



$=-42,25$

$-2ax^2+(2a-2b+4)x+2b-3=$

$=0.\geq 0.$

$-2a+2a-2b+4+2b-3=$

$=1.$

$-18a+6a-6b+12+2b-3=$

$=-12a-4b+9\geq 0$

$9\geq 4(3a+b)$

$\frac{9}{4}\geq 3a+b\geq 0$

$a+b\geq 4.$

$8-\frac{b}{3}\geq a\geq -\frac{b}{3}.$

$3a\geq -b$

$a\geq 4-b.$

$b\geq 4-a;$

$b\geq -3a$

$\frac{9}{4}-3a\geq b$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\cdot4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = ?$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) =}$

$\sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin2\alpha.$

$150+36+15+6+2 = 206+15+8 = 206+23 = \boxed{229}$

6. $\forall x>0$ $\quad x\in\mathbb{Q}$ $\quad \cancel{f(1)=0}$, $f(2)=0, f(3)=0, f(5)=1; f(8)=1,$

$f(11)=2.$

$10\cdot15+2\cdot8+3\cdot5+$
$+2\cdot3+2\cdot1$

$f(2\cdot1)=f(2)+f(1)$

$f(1)=f(n)+f(\frac{1}{n})=0$

0: 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24;
27. — 10

$f(1)=0.$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0.$

$f($

$f(\frac{1}{n})=-f(n)$

1: 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21; — 7

$f(x)-f(y)<0$

2: 11; 22; 25; — 3

$f(x)<f(y)$

3. 13; 26; — 2

4: 17; 19. — 2

5. 23: — 1

~~6.~~

$f(3)$

(3;14)

(3;5); (3;7); (3;10); (3;11); (3;13); (3;15);
(3;17); (3;19); ~~(3;21)~~; (3;20); (3;21); (3;22);
(3;23); (3;25); (3;26)
(5;11); (5;13); (5;17); (5;19); (5;22); (5;23); (5;25);
(5;26); ~~7;11~~

3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$\exists\ x^2=a\geqslant 0$

$6x=b$

$3^{\log_4(a+b)}+b\geqslant |a+b|^{\log_4 5}-a.$

$\cancel{\log_4'}$ $a+b=t$ $\cancel{x-a}$ $>0.$

$3^{\log_4 t}\geqslant |t|^{\log_4 5}-t.$

$\dfrac{t^{\log_4\frac{5}{16}}}{t^{\log_4\frac{3}{16}}}=t^{\log_4\frac{5}{16}-\log_4\frac{3}{16}}=$

$=t^{\log_4\frac{5}{3}}$

$1\geqslant t^{\log_4\frac{5}{4}}-t^{\log_4\frac{3}{4}}$

$\log_4\frac{5}{4}\ t^{\log_4\frac{5}{16}}-\log_4\frac{3}{4}\cdot t^{\log_4\frac{3}{16}}.$

$\log_4(x^2+6x)=\dfrac{\log_3(x^2+6x)}{\log_3 4}=\log_3(x^2+6x)\cdot\log_4 3.$

$3^{\log_3(x^2+6x)\cdot\log_4 3}=(x^2+6x)^{\log_4 3}$

t $\quad t^{\log_4 3}\geqslant t^{\log_4 5}-t.$ $\quad t^{\log_4\frac{3}{4}}+1\geqslant t^{\log_4\frac{5}{4}}$

$\log_4 3\ t^{\log_4\frac{3}{4}}$ $\quad t^{\log_4 3}+t\geqslant t^{\log_4 5}.$

$\log_4 5\ t^{\log_4\frac{5}{4}}-1$ $\quad t\geqslant t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}=t(t^{\log_4\frac{5}{4}}-t^{\log_4\frac{3}{4}})$

$\log_4 3\ln t\geqslant \ln(\ \ln(t^{\log_4 5}-t)=$

$\log_4 3\ln t\geqslant \ln t+\ln(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$3^{\log_4 t}\geqslant 5^{\log_4 t}-t.$

$3^p\geqslant 5^p-4^p$

$3^p+4^p\geqslant 5^p$

$\left(\frac{3}{5}\right)^p+\left(\frac{4}{5}\right)^p\geqslant 1.$

$p\leqslant 2.$ $\quad\log_4 t\leqslant 2$ $\quad t\leqslant 16$

$\cancel{p\in(0;2]}$ R

$x(x+6)>0$

$x\in[-8;2]$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x\in(0,16]$

$x^2+6x>0$ $\quad 36+64=100$

$x^2+6x-16\leqslant 0$ $\quad \frac{-6-10}{2}=-8$

$\frac{-6+10}{2}=2$

$t\in(0,16]$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)