МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad tg\alpha - ?$$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\Rightarrow$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{4}{5}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha\pm2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow 2\sin2\alpha \pm \cos2\alpha + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha - 1 + 4\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \\ 1 - 2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \end{array}\right., \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ - } tg\alpha \text{ не определён} \\ \cos\alpha = -2\sin\alpha, \Rightarrow tg\alpha = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{array}\right. \\ \sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \Rightarrow tg\alpha = \boxed{0} \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha, \Rightarrow tg\alpha = \boxed{-2} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$.

②

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

Пусть $a = x-2$; $b = y-1$. Тогда:

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2 = 25 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2b \\ a^2-4ab+4b^2 = ab \end{cases}, \Rightarrow a^2-5ab+4b^2 = (a-4b)(a-b) = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right.$$

$a = 4b$: $16b^2+9b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 1$, $\Rightarrow b = \pm1$, $a = \pm4$

$a = b$: $10a^2 = 25$, $\Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = b$

Под условие $a \geq 2b$ подходят $(a;b) = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), (4;1)$, $\Rightarrow (x;y) = \boxed{\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, $\boxed{(6;2)}$.

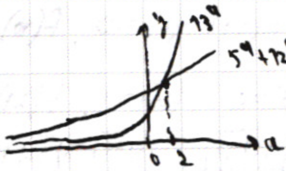
Ответ: $(x;y) = \left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right), (6;2)$.

③

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

По ОДЗ $x^2+18x > 0$, $\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$. Также $x^2+18x = 12^{\log_{12}x^2+18x}$. Пусть $a = \log_{12}(x^2+18x)$. Тогда:

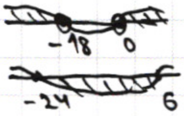
$$5^a + 12^a \geq (12^a)^{\log_{12}13} = (12^{\log_{12}13})^a = 13^a$$



Заметим, что равенство достигается только при $a = 2$, $\Rightarrow$ $a \leq 2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{12}(x^2+18x) \le 2$

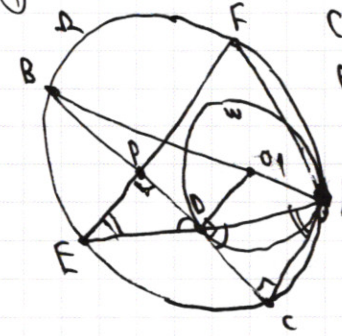
$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \le 144 \end{cases}$, $\Rightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x+24)(x-6)\le 0 \end{cases}$



, $\Rightarrow \boxed{x \in [-24;-18) \cup (0;6]}$

Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$.

(4)



$CD=8$

$BD=17$

$R, r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$

$\angle ACB=90°$ как смотрящий на диаметр AB, $\Rightarrow AC \parallel O_1D \parallel EF$, где O_1 – центр ω. Пусть R и r – радиусы Ω и ω соответственно. Тогда из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle O_1BD$ ($\angle BDO_1=\angle BCA=90°$, $\angle ABC$ общий):

$\frac{AC}{r}=\frac{2R}{2R-r}=\frac{8+17}{17}$, $\Rightarrow \begin{cases} 34R=50R-25r, \Rightarrow 25r=16R \\ AC=\frac{25}{17}r \end{cases}$

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $(2R)^2=(8+17)^2+AC^2$, $\Rightarrow 4\cdot\left(\frac{25}{16}r\right)^2=25^2+\left(\frac{25}{17}r\right)^2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{64}r^2=1+\frac{1}{289}r^2$, $\Rightarrow r=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{64}-\frac{1}{289}}}=\frac{8\cdot17}{15}=\boxed{\frac{136}{15}}$, $R=\frac{25}{16}r=\boxed{\frac{85}{6}}$, $AC=\frac{25}{17}r=\frac{40}{3}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т-ме Пифагора для $\triangle ADC$: $AD=\sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2+8^2}=\frac{8}{3}\sqrt{34}$. По теореме о пересекающихся хордах: $BD\cdot CD=AD\cdot ED$, $\Rightarrow ED=\frac{8\cdot17}{\frac{8}{3}\sqrt{34}}=3\sqrt{\frac{17}{2}}$, $\Rightarrow AE=ED+AD=\frac{25}{6}\sqrt{34}$. По теореме синусов для $\triangle AFE$: $2R=\frac{AE}{\sin\angle AFE}$, $\Rightarrow \sin\angle AFE=\frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{2\cdot\frac{85}{6}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos\angle AFE=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE=\boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)}$. Пусть $P=BC\cap EF$. Тогда $\triangle ADC \sim \triangle EDP$ ($\angle DCA=\angle DPE=90°$, $\angle ADC=\angle EDP$ как вертикальные), $\Rightarrow \sin\angle AEF=\sin\angle DAC=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{\sqrt{34}}=\cos\angle AFE$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF=90°$, $\Rightarrow S_{AFE}=\frac{1}{2}AE^2\cdot\operatorname{tg}\angle AEF=\frac{1}{2}\cdot\frac{625\cdot34}{36}\cdot\frac{3}{5}=\frac{125\cdot17}{12}=\boxed{\frac{2125}{12}}$

Ответ: $R=\frac{85}{6}$, $r=\frac{136}{15}$, $\angle AFE=\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$, $S_{AFE}=\frac{2125}{12}$.

(5)

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad 1\le x,y\le 24$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(a)=f(a\cdot1)=f(1)+f(a)$, $\Rightarrow f(1)=0$. $f(1)=f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=0$, $\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=$ $=-f(y)$, $\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$, $\Rightarrow f(y)>f(x)$. Посчитаем $f(1), f(2), \dots, f(24)$: $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, $\Rightarrow f(2)=f(3)=0$, $f(5)=f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=f(19)=4$, $f(23)=5$. Тогда $f(4)=f(2)+f(2)=0$, $f(9)=2f(3)=0$, $f(16)=2f(4)=0$, $f(6)=f(2)+f(3)=0$, $f(8)=f(4)+f(2)=0$, $f(10)=f(5)+f(2)=1$, $f(12)=f(2)+f(6)=0$, $f(14)=$ $=f(2)+f(7)=1$, $f(15)=1$, $f(18)=0$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(24)=0$. Итого:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(a)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть при 11 значениях $f=0$, при 7 – $f=1$, при 2 $f=2$, при 1 $f=3$, при 2 $f=4$, при 1 $f=5$. Тогда:

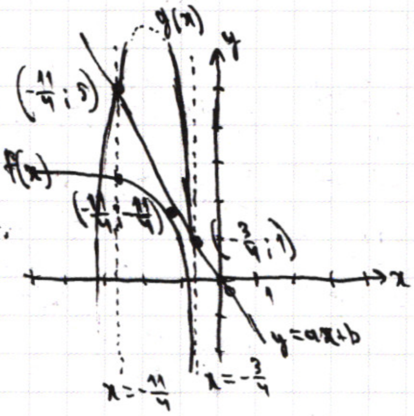
$f(y)=5$: $f(x)\le 4 \Rightarrow$ 23 значения $x \Rightarrow$ 23 пары
$f(y)=4$: $f(x)\le 3 \Rightarrow$ 21 значения $x \Rightarrow 2\cdot 21$ пар
$f(y)=3$: $f(x)\le 2 \Rightarrow$ 20 значений $x \Rightarrow$ 20 пар
$f(y)=2$: $f(x)\le 1 \Rightarrow$ 18 значений $x \Rightarrow 18\cdot 2$ пар
$f(y)=1$: $f(x)=0 \Rightarrow$ 11 значений $x \Rightarrow 11\cdot 7$ пар

Итого $23+42+20+36+77=\boxed{198}$ пар

Ответ: 198 пар.

6

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \\ x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \end{cases} \qquad (a,b)-?$$



Пусть $f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}$, $g(x)=-8x^2-30x-17$.

Тогда $g\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=5$

$g\left(-\frac{3}{4}\right)=-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17=1$

$f\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{11-\frac{11}{4}\cdot 12}{3-\frac{11}{4}\cdot 4}=\frac{11}{4}$

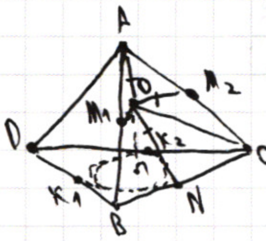
Чтобы выполнялось условие, прямая $ax+b$ не должна проходить выше точек $\left(-\frac{11}{4};5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4};1\right)$, но при этом лежать выше гиперболы $f(x)$. Проведём прямую $ax+b$ через 2 эти точки: $\begin{cases} 5=-\frac{11}{4}a+b \\ 1=-\frac{3}{4}a+b \end{cases} \Rightarrow 4=-2a \Rightarrow \begin{matrix} a=-2 \\ b=-\frac{1}{2} \end{matrix}$

Посмотрим, есть ли у прямой $-2x-\frac{1}{2}$ пересечения с $f(x)$:

$\frac{12x+11}{4x+3}=-2x-\frac{1}{2} \Rightarrow 24x+22=-(16x^2+16x+3) \Rightarrow 16x^2+40x+25=(4x+5)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть 1 пересечение, т.е. $-2x-\frac{1}{2}$ является касательной к $f(x)$. А раз $-2x-\frac{1}{2}$ проходит через точки $\left(-\frac{11}{4};5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4};1\right)$, то она единственная прямая, удовлетворяющая условию $\Rightarrow (a;b)=\boxed{\left(-2;-\frac{1}{2}\right)}$ **Ответ**: $(a;b)=\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

(7)



$AB=1$
$BD=2$
$CD=3$
$BC-?$
$R_{min}-?$

Пусть M_1, M_2, N, K_1, K_2 – середины сторон AB, AC, BC, BD, CD соответственно. Тогда степени точек относительно данной сферы Ω равны:

$$\begin{cases} BK_1^2 = BN^2 = BM_1 \cdot BA = \deg(B,\Omega) \\ CK_2^2 = CN^2 = CM_2 \cdot AC = \deg(C,\Omega) \\ DK_1^2 = DK_2^2 = AD^2 = \deg(D,\Omega) \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow BN = \sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot 1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = BK_1 \\ &\Rightarrow CN = CK_2 = CD - DK_2 \\ &\Rightarrow DK_2 = DK_1 = BD - BK_1 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow CN = CD - BD + BN = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$BC = BN + CN = \boxed{1+\sqrt{2}}$, $AD = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $AC = \sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $BC = 1+\sqrt{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta \\ \underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha}_{} = -\frac45 = \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cos2\beta + \underbrace{\cos(2\alpha+2\beta)}_{}\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac45 \end{cases}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} = \sin\alpha\cos\beta$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac45$$

$$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt5} = \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha$$

$$\pm\cos2\alpha + 2\sin2\alpha = -1$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha - 1 + 4\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k \ (tg\alpha \text{ не опр.}) \\ \cancel{\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k \ (tg\alpha = -1)} \end{array}\right. \quad tg\alpha = -\frac12 \\ -2\cos^2\alpha + 1 + 4\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cancel{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0} \end{array}\right.$$

$$\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \ \underline{tg\alpha = 0} \\ \cancel{tg\alpha = -1} \\ \underline{tg\alpha = -2} \end{array}\right.$$

$\boxed{-2; -\frac12; 0}$

2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \Rightarrow x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \Rightarrow (x-2)^2 + \underbrace{(3y-3)^2}_{9(y-1)^2} = 25 \end{cases}$$

$a = x-2,\ b = y-1$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2b \geq 0 \Rightarrow a \geq 2b \\ a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \end{cases} \Rightarrow a^2 - 5ab + 4b^2 = (a-4b)(a-b) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 4b \end{array}\right.$$

$a \geq 2b$

$$\left[\begin{array}{l} 10a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac52} = b \\ 25b^2 = 25 \Rightarrow b = \pm1,\ a = \pm4 \end{array}\right.$$

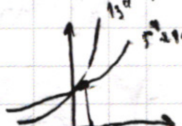
$\sqrt{\frac52} < 2\sqrt{\frac52}$; $-\sqrt{\frac52} > -2\sqrt{\frac52}$

$4 > 2$; $-4 < -2$

$$(a;b) = \left(-\sqrt{\frac52}; -\sqrt{\frac52}\right); (4;1) \Rightarrow (x;y) = \boxed{\left(2-\sqrt{\frac52}; 1-\sqrt{\frac52}\right); (6;2)}$$

3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$



$a = \log_{12}(x^2+18x)$

$$5^a + 12^a \geq (12^a)^{\log_{12}13} = 13^a$$

$a \leq 2$

$$0 < x^2 + 18x \leq \underset{6\cdot24}{144} \Rightarrow \begin{cases} x(x+18) > 0 \\ (x+24)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$

-18 0

-24 6

$\boxed{x \in [-24; -18) \cup (0; 6]}$

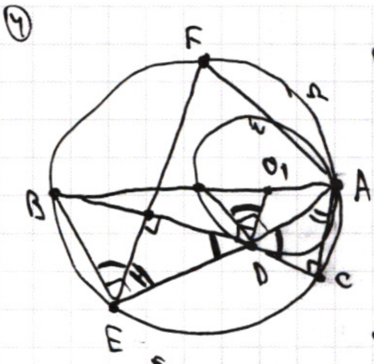
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

④



$CD = 8$ $\quad AC \parallel O_1D \parallel EF$

$BD = 17$ $\quad \triangle ABC \sim \triangle O_1BD$:

$R, r, \angle AFE, S_{AFE} - ?$ $\quad \frac{AC}{r} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{17} \Rightarrow 34R = 50R - 25r \Rightarrow 25r = 16R$

~~BD · CD = 8·17 = ED · AD~~ $\quad AC = \frac{25}{17} r$

~~△BDE ∼ △BDA ...~~ $\quad BC^2 + AC^2 = (2R)^2 = 4 \cdot \frac{25^2}{16^2} r^2$, $BC^2 = 25^2$, $AC^2 = \frac{25^2}{17^2} r^2$

$25^2 = 25^2 r^2 \left(\frac{1}{8^2} - \frac{1}{17^2}\right) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{8^2} - \frac{1}{17^2}}} = \frac{8 \cdot 17}{\sqrt{17^2 - 8^2}} = \frac{8 \cdot 17}{\sqrt{289 - 64}} = \frac{8 \cdot 17}{15} = \boxed{\frac{136}{15}}$

$AC = \frac{25}{17} \cdot \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{40}{3} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{1600}{9} + 64} = \frac{8}{3}\sqrt{25+9} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$= \cancel{\sqrt{\frac{1600+576}{3}}} = \cancel{\ldots}$ $\quad ED = \frac{BD \cdot CD}{AD} = \frac{17 \cdot 8}{\frac{8}{3}\sqrt{34}} = 3\sqrt{\frac{17}{2}}$ $\quad R = \frac{25}{16} \cdot \frac{8 \cdot 17}{15} = \boxed{\frac{85}{6}}$

$AE = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{17}{2}} + 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{25}{3}\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$

$\frac{AE}{\sin \angle AFE} = 2R \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{2 \cdot \frac{85}{6}}\right) = \boxed{\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)}$ $\quad \cos \angle AFE = \frac{3}{\sqrt{34}} = \sin \angle AEF = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\angle EAF = 90°$

~~$\frac{AF}{\sin \angle AEF} = 2R \Rightarrow AF = \frac{85}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = 5\sqrt{\ldots}$~~

~~$\frac{CD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{34}}$~~ $\quad$ ~~$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$~~

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE^2 \cdot \operatorname{tg} \angle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{625}{36} \cdot \frac{34 \cdot 5}{12 \cdot 3} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \boxed{\frac{2125}{12}}$, $\operatorname{tg}\angle AEF = \frac{5}{3}$

⑤

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad 1 \le x, y \le 24$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$: $f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(y) > f(x)$ $\quad f(2), f(3) = 0$, $f(5), f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17), f(19) = 4$

~~$f(4) = 2f(2) = 0$~~ $\quad f(a^2) = 2f(a)$ $\quad f(23) = 5$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(8) = f(4) + f(2) = 0$, $f(10) = f(5) + f(2) = 1$, $f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(14) = 1$, $f(15) = 1$, $f(18) = 0$, $f(20) = 1$, $f(21) = 1$, $f(22) = 2$, $f(24) = 0$

0 – 11 $\quad f(y) = 5$: 23 способа
1 – 7 $\quad f(y) = 4$: 21·2
2 – 2 $\quad f(y) = 3$: 20
3 – 1 $\quad f(y) = 2$: 18·2
4 – 2 $\quad f(y) = 1$: 11·7
5 – 1

$23 + 42 + 20 + 36 + 77 = 100 + 62 + 36 = \boxed{198}$

⑥

$\underbrace{\frac{12x+11}{4x+3}}_{3 + \frac{2}{4x+3}} \le ax + b \le \underbrace{-8x^2 - 30x - 17}$, $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$x = -1$: $30 - 17 - 8 = 5$

$x = -2$: $60 - 17 - 32 = 11$

~~$\frac{12x+11}{4x+3} = ax + b$~~ $\quad x = -\frac{11}{4}$, $y = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 =$

~~$12x + 11 = 4ax^2 + (4b + 3a)x + 3b$~~ $\quad = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = \frac{44}{2} - 17 = 5$

~~$4ax^2 + (4b + 3a - 12)x + 3b - 11 = 0$~~ $\quad x = -\frac{3}{4}$: $-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

~~$D = (4b + 3a - 12)^2 - 16a(3b - 11)$~~ $= -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

~~$= 16b^2 + 9a^2 + 144 + 12ab - 3(a \ldots) - 48b - 48ab + 176a =$~~

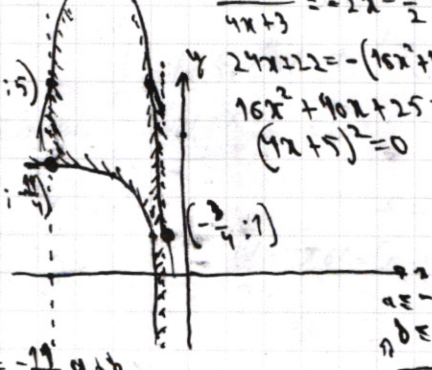
~~$= 16b^2 + 9a^2 + 144 - 36ab + 140a - 48b = 0$~~

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$

$24x + 22 = -(16x^2 + 16x + 3)$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x + 5)^2 = 0$



$a \le -2$

$b \le -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases} \Rightarrow 4 = -2a \Rightarrow \boxed{a = -2}$, $\boxed{b = -\frac{1}{2}}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

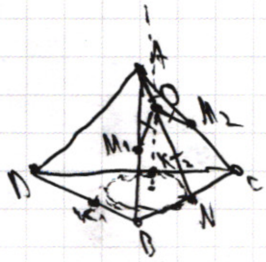
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AB=1$

$BD=2$

$CD=3$

$BC-?$

$R_{min}-?$

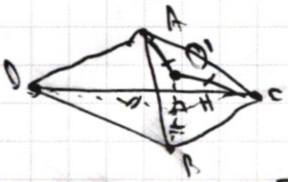
$BM_1\cdot BA = BN^2 \Rightarrow BN = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$CM_2\cdot CA = CN^2$, $\frac{AC^2}{2} = CN^2$

$CN = KC = CD - DK_2 = 3-(BD-BK_1) = 3-(2-BN) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$BC = BN+CN = \boxed{1+\sqrt{2}}$ $AD = 2-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $AC = \sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$= \sqrt{2}\ \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = 2+\frac{3}{\sqrt{2}}$



$AB=1$, $AD=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $AC=2+\frac{3}{\sqrt{2}}$

$BD=2$, $CD=3$, $BC=1+\sqrt{2}$

$2r = \frac{BC}{\sin\angle CDB}$; $\cos\angle CDB = \frac{4+9-3-2\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{10-2\sqrt{2}}{12} = \frac{5-\sqrt{2}}{6}$

$r = \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{9+10\sqrt{2}}}{3}} = 3\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{9+10\sqrt{2}}}$ $\sin\angle CDB = \frac{\sqrt{36-27+10\sqrt{2}}}{6} = \frac{\sqrt{9+10\sqrt{2}}}{6}$

~~$h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{27+18\sqrt{2}}{9+10\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{-18+\dots}{9+10\sqrt{2}}}$~~

~~$R^2 = r^2 + (h-R)^2 \dots \frac{27+36\sqrt{2}}{9+10\sqrt{2}} + \frac{16\sqrt{2}-18}{9+10\sqrt{2}}$~~

~~$R = \dots \sqrt{\frac{16\sqrt{2}-18}{9+10\sqrt{2}}}$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)