МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (2) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (1) \end{cases}$$

Р/м (1):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

Но из (2) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ =>

$$\Rightarrow \cancel{2}\cdot\left(\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos \cancel{2}\beta = \cancel{-}\frac{\cancel{2}}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \quad \cancel{\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}} \quad \Rightarrow$$

~~1-й случай:~~ $\cancel{\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}}$

$\cancel{(2):\ \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta}$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5} && 1\text{ сл} \\ &2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5} && 2\text{ сл} \end{aligned}\right.$$

1 сл: $\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ &2\alpha+\arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n \end{aligned}\right. ; \quad \left[\begin{aligned} &2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ &2\alpha = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ &\alpha_2 = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi n,\ n\in Z \end{aligned}\right.$$

2 сл: $\sin\left(2\alpha - \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha-\arccos\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi l \\ &2\alpha-\arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi m \end{aligned}\right. ; \quad \left[\begin{aligned} &\alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi l \\ &\alpha_4 = \frac{3\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z \end{aligned}\right.$$

$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{tg}(\alpha_2) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)$

$\operatorname{tg}(\alpha_3) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)$

$\operatorname{tg}(\alpha_4) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 = \operatorname{tg}(\alpha_1)$

Везде период $=\pi$, и он совп. с периодом тангенса, поэтому для кажд. α единств. значение

Ответ: -1; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5}-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) + \cancel{6} - 12y + 6 - 6 = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 36\left(\frac{(2y-1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = 45 + 36 \end{cases}$$

Пусть $x - 6 = a$, $2y - 1 = b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 36\left(\frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = 81 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} & (1) \\ a^2 + 9b^2 = 90 & (2) \end{cases}$$

(1):

$$\begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ ab = a^2 - 12ab + 36b^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ (a-4b)(a-9b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right. \end{cases}$$

1 сл: $a = 4b$

(2): $16b^2 + 9b^2 = 90$; $b^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$; $b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

~~Проверим, что $a - 6b \geq 0$~~

~~$\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow$ данное реш-е не подх.~~

~~2 сл: $a = 9b$~~

~~(2): $81b^2 + 9b^2 = 90$~~

Проверим, что $a - 6b \geq 0$:

$4b - 6b \geq 0$; $b \leq 0 \Rightarrow$ реш-е только $\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5} ; -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$ (a; b)

2 сл: $a = 9b$

(2): $81b^2 + 9b^2 = 90$; $b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 9$

Проверим, что $a - 6b \geq 0$:

$9b - 6b \geq 0$; $b \geq 0 \Rightarrow$ реш-е только $(9 ; 1)$ (a; b)

Вернемся к исходным:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 6 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 2y - 1 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \begin{cases} x = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{30 - 12\sqrt{10}}{5} ; \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}\right)$; $(15 ; 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$; $x^2 - 10x < 0$; $x \in (0; 10)$

Заметим, что $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$ согласно ОДЗ

$10x - x^2 + \cancel{|x^2 - 10x|}^{(10x-x^2)} {}^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $10x - x^2 = a$

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$ (1)

Заметим, что ф-и справа и слева монотонно возрастающие на промежутке $[0; 10)$. Тогда нетрудно заметить, что рав-во достигается при $\log_3 a = 2$, и тогда нер (1) равносильно $\log_3 a \geq 2$

$\log_3 a - \log_3 9 \geq 0$; $(3-1)(a-9) \geq 0$; $a \geq 9$ $(\log_a f - \log_a g \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f-g) \vee 0)$

Тогда вернемся к исх. перем:

$10x - x^2 \geq 9$; $x^2 - 10x + 9 \leq 0$; $(x-1)(x-9) \leq 0$; $x \in [1; 9]$
(удовл. ОДЗ)

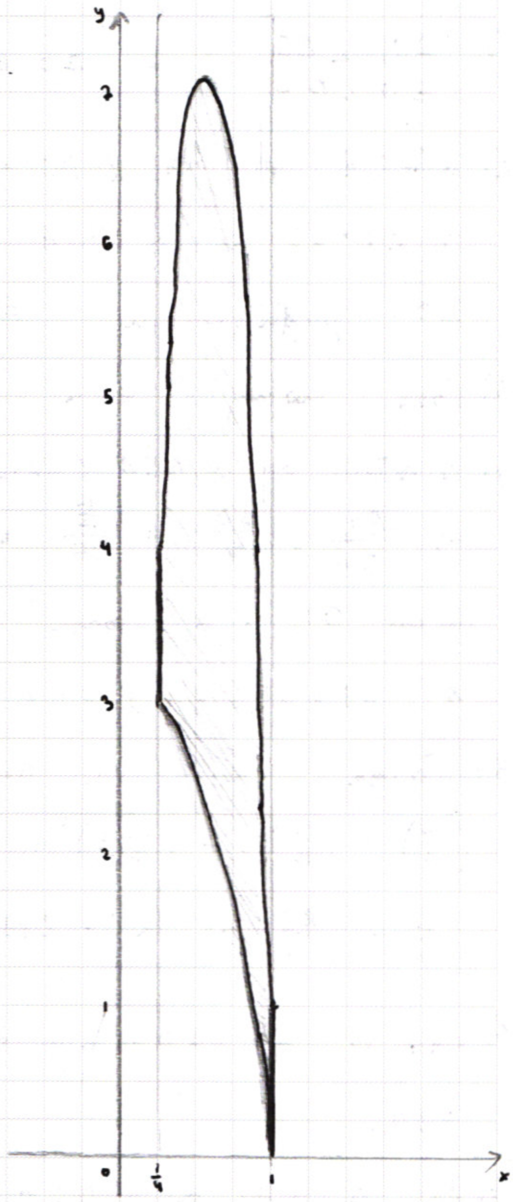
Ответ: $x \in [1; 9]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$$

Изобразим мн-во точек, удовл. левому и прав. нер-ву в коорд. пл-ти xOy (при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$)



Пусть $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$f(\frac{1}{4}) = 3$

$f(1) = 0$

$g(\frac{1}{4}) = 4$

$g(1) = 1$

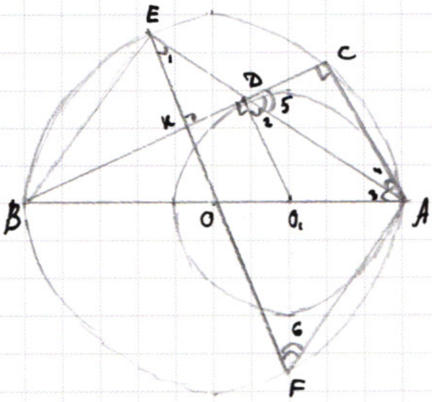
Верш. $g(x)$ коорд. $(\frac{9}{16}; 7\frac{1}{8})$

Пусть $ax + b = h(x)$

Тогда, чтобы нер-во было выполнено для $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, необходимо, чтобы $3 \le h(\frac{1}{4}) \le 4$; $0 \le h(1) \le 1$.

Однако, данное усл-е не яв-ся достаточным

№4



Пусть центр Ω - O, центр ω - O_1, рад. $\Omega = R$, рад. $\omega = r$

1) $\left.\begin{array}{l} DO_1 \perp BC \\ EO \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow EO \parallel DO_1 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ как соотв при $EO \parallel DO_1$ и с. ED

2) $\triangle DO_1A$ р/б $(DO_1 = O_1A = r) \Rightarrow \angle 2 = \angle 3$, но $\angle 2 = \angle 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \triangle EOA$ р/б, но $OA = R \Rightarrow EO = OA = R$, т.е.

EO - радиус и EF - диаметр, тогда $\angle EAF = 90°$.

3) Соед. точку C и A, тогда в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$ т.к. опир. на диам.

4) $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ $(\angle D = \angle C = 90°, \angle B$ общ$) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$ (1)

Пусть $OO_1 = x$, тогда (1): $\frac{R+x}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$; $16R + 16x = 17R \Rightarrow x = \frac{R}{16}$

но $OA = OO_1 + O_1A = x + r = R \Rightarrow r = R - \frac{R}{16} = \frac{15R}{16}$

5) Тогда по т. Пиф для $\triangle BDO_1$:

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{16}\right)^2 R^2 - \left(\frac{15}{16}R\right)^2 = \frac{64}{256}R^2 = \frac{1}{4}R^2$

$\frac{289}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow R^2 = 289 \Rightarrow R = 17$, $r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

6) $\angle 4 = 90° - \angle 5$ ($\triangle DCA$ п/у т.к. $\angle C$ опир. на AB) $= 90° - (90° - \angle 2)$ ($\angle O_1DC$) $=$

$= \angle 2$.

7) Из $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$:

$\frac{DO_1}{CA} = \frac{O_1B}{AB}$; $CA = \frac{r \cdot 2R}{2R - r} = \frac{\frac{255}{16} \cdot 2 \cdot 17}{34 - \frac{255}{16}} = \frac{\overset{15}{\cancel{255}} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{16}^2}{8 \cdot 289} = 30$

8) Из п/у $\triangle DCA$ $\operatorname{tg}\angle 5 = \frac{CA}{DC} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4 \Rightarrow \angle 5 = \operatorname{arctg} 4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) $\angle 5 = \angle 6$ (верт) $= 90° - \angle 1$ (ΔEDK) $= \angle 6$ (ΔEAF п/у) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle 6 = \angle EFA = \operatorname{arctg} 4$

10) Т.к. $\operatorname{tg} \angle EFA = \frac{EA}{AF} = 4$, то $EA = 4AF$. Пусть $AF = y$.

11) $EF = 2R = 34$. По т. Пиф из Δ EAF:

$(4y)^2 + y^2 = 34^2$

$17y^2 = 17^2 \cdot 2^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{17} = AF \Rightarrow EA = 8\sqrt{17}$

12) Тогда $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 17 \cdot 8 = 136$

Ответ: 17 и $\frac{255}{16}$; $\operatorname{arctg} 4$; 136.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3 \le f\left(\frac{1}{4}\right) \le 4 \\ 0 \le f(1) \le 1 \end{cases}$$

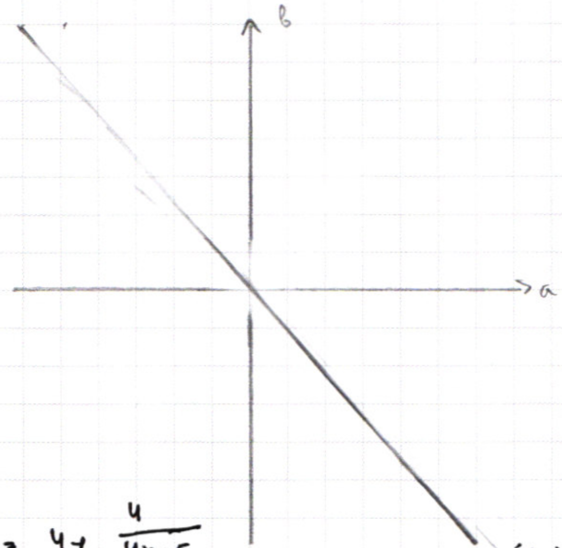
$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b \le 4 \\ \frac{1}{4}a + b \ge 3 \end{cases}$$

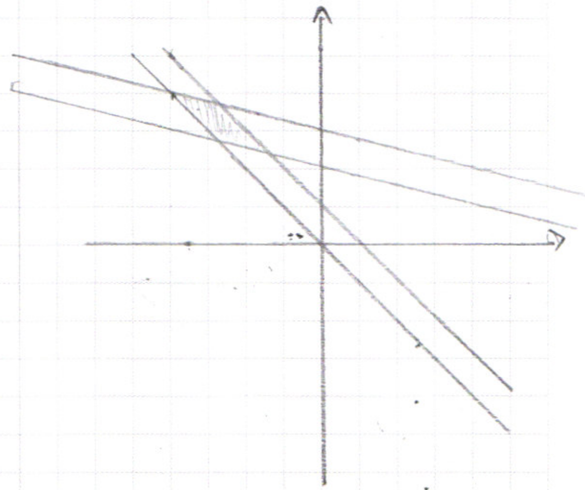
$b \le 4 - \frac{1}{4}a$

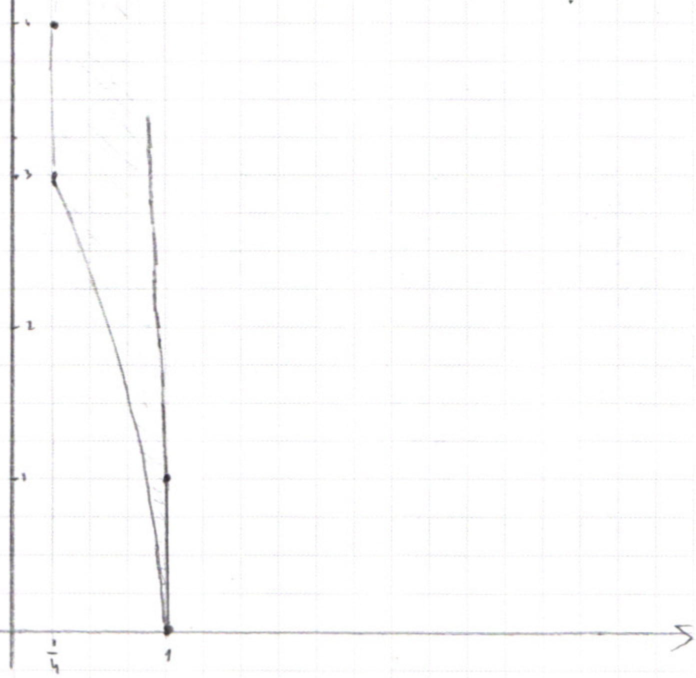
$b \ge 3 - \frac{1}{4}a$

$a + b \ge 0$ $\quad b \ge -a$

$a + b \le 1$ $\quad b \le$







$y = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x) = 4\left(\frac{1}{4x-5}\right)' =$

$= 4\left(-\frac{4}{(4x-5)^2}\right) = 16$

$\left(\frac{1}{a}\right)' =$

$= a^{-1} =$

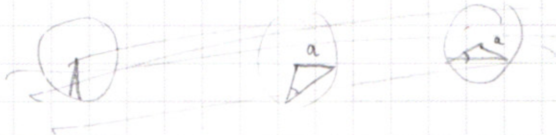
$= -\frac{1}{a^2}$

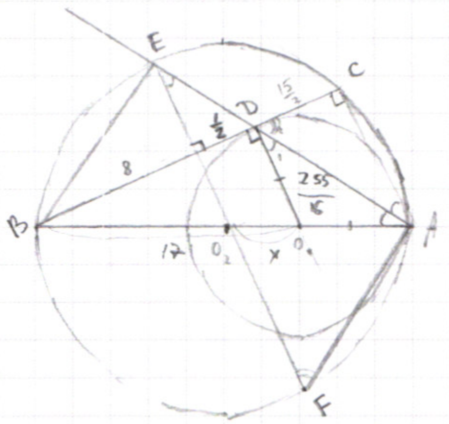
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$\frac{R+x}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$;

$16R + 16x = 17R$ 16

$R = 16x$; $x = \frac{R}{16}$

$\angle 1 = \angle 2$

~~$180 - 2\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 90 - \alpha + 90 =$~~

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$; $\frac{R}{\sin\alpha} = 2R$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{16}{\frac{17}{2}}$

$17R = 32R - 16r$; $r = \frac{15}{16}R$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{16}R\right)^2 - \left(\frac{15}{16}R\right)^2$

$\frac{289}{4} = \frac{289R^2}{256} - \frac{225R^2}{256}$; $\frac{289}{4} = \frac{\cancel{64}}{\cancel{256}}R^2 \frac{1}{4} \Rightarrow R^2 = 289 \Rightarrow r = 17$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 255 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times 34 \\ 16 \\ \hline 204 \\ 34 \\ \hline 544 \\ - 255 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ 51 \\ \hline 136 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{5^{\log_2 a} = 5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 2}}}$

$2^{\log_3 9} = 4 \qquad 9^{\log_3 2}$

$\cancel{16^{\log}}$ $\qquad 27^{\log_3 9} = 27^2$; $9^{\log_3 27} = 9^3$

$81^{\log_3 9} = 81^2$; $9^{\log_3 81} = 9^4$

$3^{5\cdot\log_3 9} = 3^{10}$; $3^{2\cdot\log_3 243} = 3^{10}$

$5^{\log_2 4}$

$4^{\log_2 5}$

$a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$?

$\cancel{a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0}$

$\log_b c \log_b a = \log_b a \log_b c$

$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq$

$(\log_3 a)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = \ln a (a^x)$

$\cancel{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

$\cancel{\log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$

$(3^{\log_3 a}) = \ln 3 \cdot (3^{\log_3 a})$.

$f(x/y) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$;
$f(23) = 5$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2-36x-3$$

$$\frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$$

$x=0 \Rightarrow y = 4+\frac{4}{-5} = 4-0{,}8 = 3{,}2$

$4x=5$ $x=\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}-4 = 1{,}25-4 = -2{,}75$

$x=1 \Rightarrow y = 4+\frac{4}{4-5} = 4-4=0 = -\frac{11}{4}$

$4+\frac{4}{1-5} = 4-1=3$

$4+\frac{4}{-11-5} = 4-\frac{1}{4}$

$-32x^2+36x-3$

$x_0 = +\frac{36}{64} = +\frac{9}{16}$

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{12}{4} = 3$

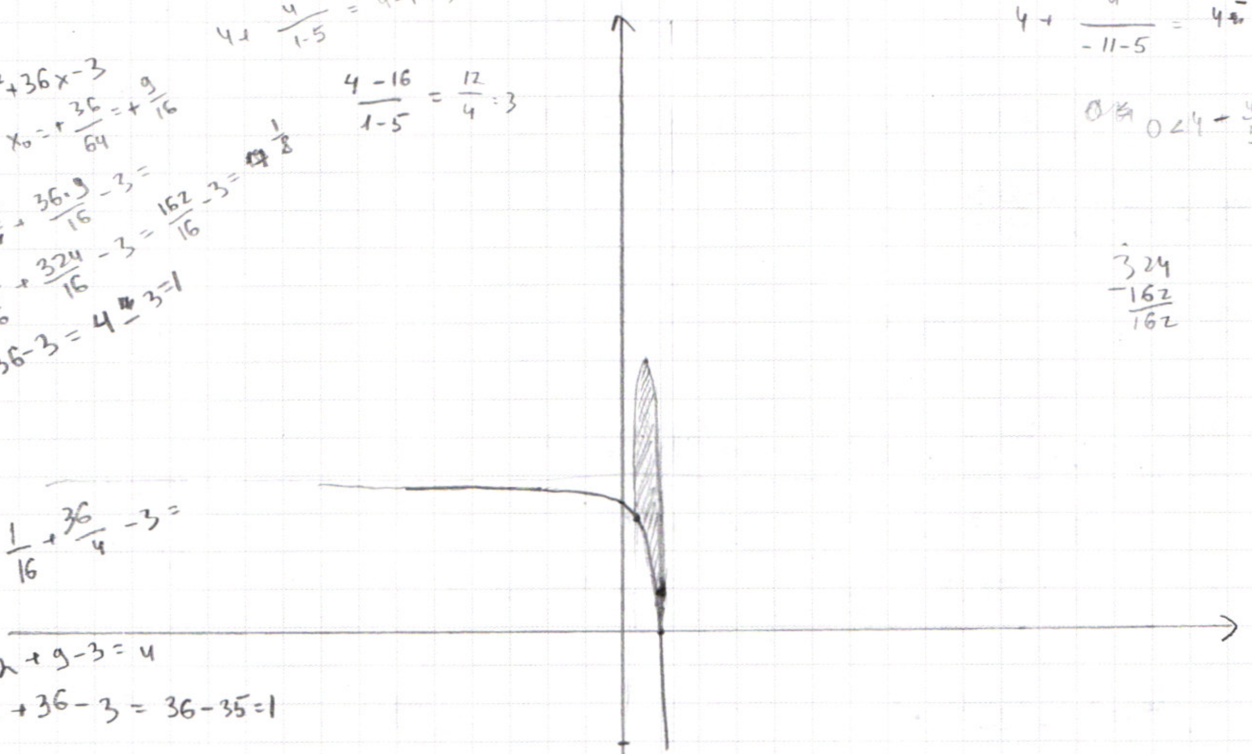
$0<4-\frac{4}{3}$

$-\frac{81\cdot 32}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3 = \frac{162}{16}-3 = \frac{1}{8}$

$= -\frac{162}{16}+\frac{324}{16}-3 =$

$-32+36-3 = 4-3=1$

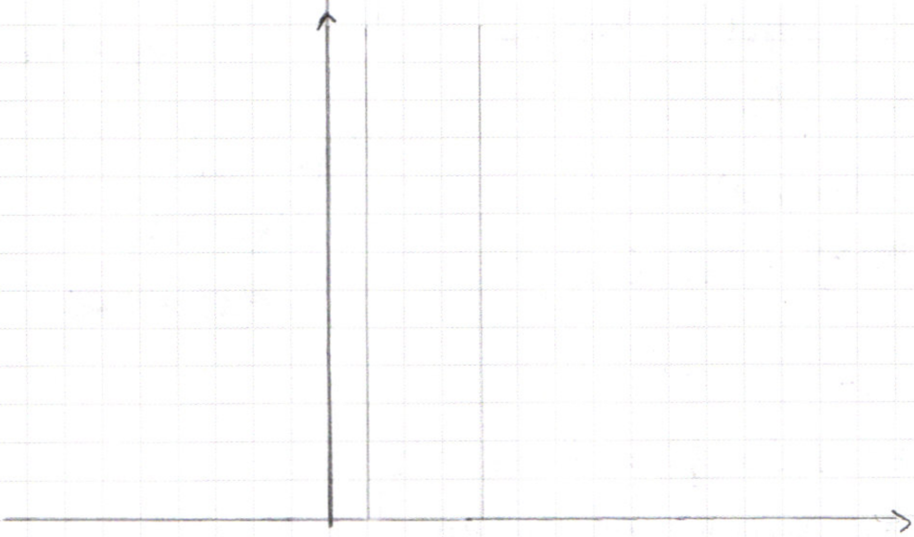
$324 - 162 = 162$



$-32\cdot\frac{1}{16}+\frac{36}{4}-3 =$

$= -2+9-3=4$

$-32+36-3 = 36-35=1$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha - ?$ $\quad$ $\cancel{\sin 2\alpha =}$ $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad$ $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) =}$

$\cancel{= 2(\sin\alpha\cos}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ ⊜

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$ $\quad$ $+\sin 2\alpha$

⊜ $\cancel{\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1)}$ $\sin 2\alpha \cancel{(\cos 2\beta - \sin 2\beta)(\cos 2\beta + \sin 2\beta)} + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta =$

$= \sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha =$

$\cancel{= \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta + 1)}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha =$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$\sin^2\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) +$

$+ 2\cos\beta\sin\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + 2\cos\beta\sin\beta\cos^2\alpha - 2\cos\beta\sin\beta\sin^2\alpha =$

$= 2\cos\beta\cos\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos$

$\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad a = \frac{1}{5}$; $a = \frac{1}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos$

$\cos\alpha = a \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = \arccos a \\ \alpha = -\arccos a\end{array}\right.$

$\cancel{225 + 36 - 180 - 36 = 45}$ ✓

$\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4}$

$\cancel{\left(6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)^2 + 36\left(\frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}\right)^2}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$

(

№2

$\cancel{x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}}$

$\cancel{x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45}$

$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_n}{n}$

$\cancel{(x^2 + 36y^2 + 12yx) - 12xy - 12x - 36y - 45 = 0}$

$\sqrt{ab} \le a + b$

$\cancel{(x+6)^2 - 12x(y+1) - 36(y}$

$a + b$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$ab = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + ab$

$x^2 - 24yx + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$\cancel{x - 12y = 2y(x-6)(}$

$2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6) = \underset{b}{(2y-1)}\underset{a}{(x-6)}$ $\quad 12y - 6$

$x - 12y = \cancel{x - 6 + 6 - 12y + 6 - 6} -$

$\frac{2y-1}{2} = (y - \frac{1}{2})^2$

$a - 6b = x - 6 - 12y + 6 = x - 12y =$

$x^2 - 12x + 36$

$45 + 36$

$36y^2 - 36y = 36(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 36((y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) =$

$= 36\left(\frac{(2y-1)^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$

$ab = a^2 - 12ab + 36b^2$

$a^2 - 13ab$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5} + \frac{18\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$; $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{36 \cdot 10}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$

$\frac{144 \cdot 10^2}{25_5} + \frac{9 \cdot 9 \cdot 10^2}{25_5} =$

$144 + 81 = 225 \Rightarrow 450$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)