МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

$\cos4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha = \sin2\alpha(\underbrace{\cos4\beta+1}_{=2\cos^2 2\beta}) +$

$+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha = 2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha =$

$= 2\cos2\beta(\underbrace{\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}) = 2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta$

Т.о. $-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac45 \Leftrightarrow \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

тогда рассмотрим 2 случая:

1) $\sin2\beta \geq 0 \Rightarrow \sin2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac45} = \frac{1}{\sqrt5}$

($\sin2\beta\neq0$, т.к. при $\sin2\beta=0$ $\cos^2 2\beta=1$ – не так)

Тогда из (1): $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow 2\sin2\alpha+\underbrace{\cos2\alpha}_{=2\cos^2\alpha-1} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \text{ неопределен – не подходит}\\ 2\sin\alpha+\cos\alpha=0 \underset{:\cos\alpha\neq0}{\Leftrightarrow} 2\,\text{tg}\,\alpha=-1 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha=-\frac12\end{array}\right.$

2) $\sin2\beta<0 \Rightarrow \sin2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\sqrt{1-\frac45} = -\frac{1}{\sqrt5}$

Тогда из (1): $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow 2\cdot\underbrace{\sin2\alpha}_{=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\underbrace{\cos2\alpha}_{=-1+2\sin^2\alpha} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ 2\cos\alpha+\sin\alpha=0 \underset{:\cos\alpha\neq0}{\Rightarrow} 2+\text{tg}\,\alpha=0\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tg}\,\alpha=0\\ \text{tg}\,\alpha=-2\end{array}\right.$

Т.о. $\text{tg}\,\alpha=0$ или $\text{tg}\,\alpha=-2$ или $\text{tg}\,\alpha=-\frac12$

Ответ: $\{0; -2; -\frac12\}$

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = x(y-1)-2(y-1) \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = (y-1)(x-2) \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9 \Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \Leftrightarrow$

п.1) $(2):\quad (x-2)^2+(3(y-1))^2+2\cdot 3(x-2)(y-1)=25+6(x-2)(y-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2+3y-3)^2=25+6(x-2)(y-1)$

тогда (1) и (2): $(x-2y+5y-5)^2=25+6(x-2y)^2 \Leftrightarrow$

(условие $x-2y\geq 0$ проверим позже) $\Leftrightarrow (x-2y)^2+2\cdot 5(y-1)(x-2y)+25(y-1)^2=25+6(x-2y)^2$

п.2) $(2):\quad (x-2)^2+(3(y-1))^2-6(x-2)(y-1)=25-6(x-2)(y-1) \Leftrightarrow$

из (1): $\Leftrightarrow (x-2-3y+3)^2=25-6(x-2y)^2 \Leftrightarrow ((x-2y)-(y-1))^2=25-6(x-2y)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2-2(x-2y)(y-1)+(y-1)^2=25-6(x-2y)^2$

тогда из п.1 и п.2:

$\begin{cases} 5(x-2y)^2+25-10(y-1)(x-2y)-25(y-1)^2=0 \\ 7(x-2y)^2-25-2(y-1)(x-2y)+(y-1)^2=0 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 12(x-2y)^2-12(y-1)(x-2y)-24(y-1)^2=0 \quad \overset{:12}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2-(y-1)(x-2y)-2(y-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x-2y+y-1)-2(y-1)(y-1+x-2y)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y-1)(x-2y-2y+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x&=y+1 \\ x&=4y-2 \end{aligned}\right.$ следствие из системы

~~тогда система~~ $\Leftrightarrow$ $\cancel{\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=y+1 \\ (y-1)(x-2)=(x-2y)^2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x=4y-2 \\ (y-1)(x-2)=(x-2y)^2 \end{cases} \end{aligned}\right.}$ $\Leftrightarrow$ $\cancel{\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=y+1 \\ (y-1)^2=(1-y)^2 \end{cases} (*) \\ &\begin{cases} x=4y-2 \\ 4y(y-1)=4(y+1)^2 \end{cases} \end{aligned}\right.}$

$\cancel{4(y-1)^2=(2y-2)^2}$

$\cancel{(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ y-1= \end{cases}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда система $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y+1 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} x=4y-2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad (**) \\ x-2y \geq 0 \end{array}\right.$

$(*)$: $(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y=12 \Leftrightarrow 10y^2-20y-15=0 \Leftrightarrow 2y^2-4y-3=0 \Leftrightarrow$ $\frac{D}{4}=4+6=10$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}+1 \\ y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ x-2y\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1 \\ y = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{4+\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ \frac{4+\sqrt{10}-4-2\sqrt{10}}{2} \geq 0 \text{ — неверно} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ \frac{4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10}}{2}\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

$(**)$: $(x=4y-2)$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0 \Leftrightarrow 16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-$

$-18y-12=0 \Leftrightarrow 25y^2-50y=0 \Leftrightarrow y(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \\ x-2y\geq 0 \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} y=2 \\ x=6 \\ x-2y\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

Таким образом, система $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{(6;2);\ \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)\right\}$

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \Leftrightarrow$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \Rightarrow$ для таких x $|x^2+18x|=x^2+18x$

по св-ву логарифма: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant 13^{\log_{12}(x^2+18x)} \quad : 13^{\log_{12}(x^2+18x)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant 1 \Leftrightarrow$

пусть $t=\log_{12}(x^2+18x)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geqslant 1$ Заметим, что при $t=2$: $\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{5^2+12^2}{13^2}=1$

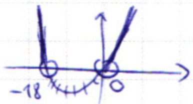
1) $t\uparrow \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t}_{f(t)}\downarrow \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geqslant 1 \Leftrightarrow t\leqslant 2$

и $f(2)=1$

2) $t\downarrow \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t}_{f(t)}\uparrow$ $\Big| \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geqslant 1 \Leftrightarrow t\geqslant 2$

и $f(2)=1$

Р. $y=x^2+18x$ на $(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$



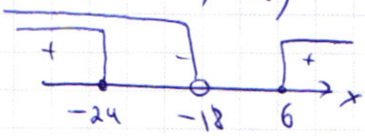
$y\downarrow(-\infty;-18) \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x)\downarrow$ на $(-\infty;-18)$ (т.к. $12>1$)

$y\uparrow(0;+\infty) \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x)\uparrow$ на $(0;+\infty)$ (т.к. $12>1$

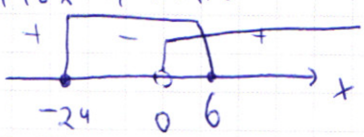
Тогда: 1) $\begin{cases} x\in(-\infty;-18) \\ \log_{12}(x^2+18x)\geqslant \underset{=\log_{12}144}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+18x-144\geqslant 0 \\ x\in(-\infty;-18) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-24]$

$\frac{D}{4}=9^2+144=225$

$\left[\begin{array}{l} x=-9+15 \\ x=-9-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-24 \end{array}\right.$



2) $\begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ \log_{12}(x^2+18x)\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(0;+\infty) \\ x^2+18x-144\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;6]$



т.о. нер-во $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-24]\cup(0;6]$

Ответ: $(-\infty;-24]\cup(0;6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\underbrace{\frac{12x+11}{4x+3}}_{f(x)} \le ax+b \le \underbrace{-8x^2-30x-17}_{g(x)}$

$f(x) = 3+\frac{2}{4x+3}$ гориз. асимптота $y=3$

верт. асимптота: $x=-\frac{3}{4}$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = 3+\frac{2}{3-11} = 3-\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$g(x) = -8x^2-30x-17$

$x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$; $y_в = -\frac{15^2}{8} + \frac{30\cdot15}{8} - 17 = 11\frac{1}{8}$

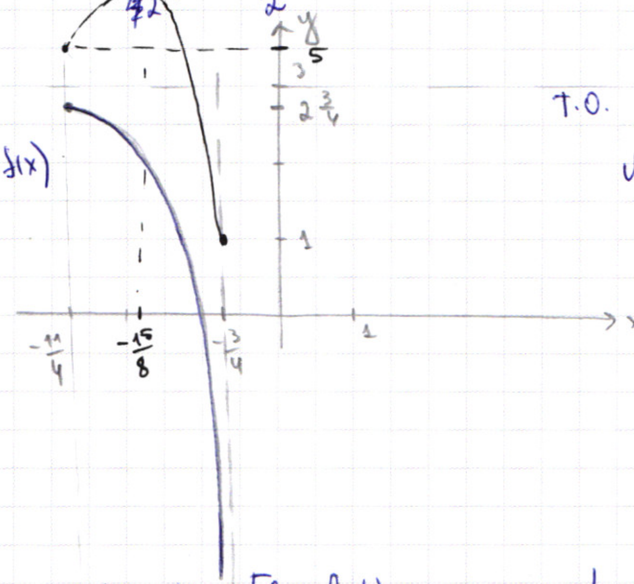
$\cancel{-\frac{15}{8} < -\frac{11}{4} = -\frac{22}{}}$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{121\cdot2}{4} + \frac{30\cdot11}{4} - 17 = 22-17=5$

$-\frac{11}{4} < -\frac{15}{8} < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{3\cdot15}{2} - 17 = 18-17=1$

$\Leftrightarrow -\frac{22}{8} < -\frac{15}{8} < -\frac{6}{8}$



т.о. прямая $y=ax+b$ лежит между 2 графиками при $\forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$a \ge 0$ — не подходит, т.к. прямая будет либо выше Гg, либо пересекать Гf или Гg

Найдем касательную к Гf в (·) с абсц. $x=t$:

$y = f'(t)(x-t)+f(t) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{(4t+3)^2}\cdot 4 = -8 \,(x-t) + 3 + \frac{2}{4t+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{8}{(4t+3)^2}(x-t) + 3 + \frac{2}{4t+3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 $\forall a, b \in \mathbb{Q}_+ \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, где p - простое число

? $x \in [1;24]$, $y \in [1;24]$ $\quad f(\frac{x}{y}) < 0$

$x, y \in \mathbb{R}$

рассмотрим число $\frac{x}{y}$ $\quad \forall a \in \mathbb{Q}_+ \quad \frac{x}{y} = \frac{ax}{ay} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(\frac{ax}{ay}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(a) + f(x) + f(\frac{1}{a}) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

1) $\frac{x}{y} = \frac{1}{24} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = -f(24) = -\underbrace{f(2)}_{[\frac{2}{4}]=0} - \underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(3)}_{[\frac{3}{4}]=0} = 0$

2) $\frac{x}{y} = \frac{1}{23} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = -f(23) = -[\frac{23}{4}] = -5 < 0$ ✓

3) $\frac{x}{y} = \frac{1}{22} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = -f(22) = -\underbrace{f(2)}_{0} - f(11) = -[\frac{11}{4}] = -2$ ✓

4) $\frac{x}{y} = \frac{1}{21} \Rightarrow f(\frac{1}{21}) = -f(21) = -\underbrace{f(3)}_{0} - f(7) = -[\frac{7}{4}] = -1$ ✓

5) $\frac{x}{y} = \frac{1}{20} \Rightarrow f(\frac{1}{20}) = -f(20) = -\underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(2)}_{0} - f(5) = -[\frac{5}{4}] = -1$ ✓

6) $\frac{x}{y} = \frac{1}{19} \Rightarrow f(\frac{1}{19}) = -f(19) = -[\frac{19}{4}] = -4 < 0$ ✓

7) $\frac{x}{y} = \frac{1}{18} \Rightarrow f(\frac{1}{18}) = -f(18) = -f(3) - f(3) - f(2) = 0$

8) $\frac{x}{y} = \frac{1}{17} \Rightarrow f(\frac{1}{17}) = -\underbrace{[\frac{17}{4}]}_{-4} < 0$ ✓

9) $\frac{x}{y} = \frac{1}{16} \Rightarrow f(\frac{1}{16}) = -4f(2) = 0$

10) $\frac{x}{y} = \frac{1}{15} \Rightarrow f(\frac{1}{15}) = -\underbrace{f(3)}_{0} - f(5) = -[\frac{5}{4}] = -1$ ✓

11) $\frac{x}{y} = \frac{1}{14} \Rightarrow f(\frac{1}{14}) = -\underbrace{f(2)}_{0} - f(7) = -[\frac{7}{4}] = -1$ ✓

12) $\frac{x}{y} = \frac{1}{13} \Rightarrow f(\frac{1}{13}) = -f(13) = -[\frac{13}{4}] = -3$ ✓

13) $\frac{x}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow f(\frac{1}{12}) = -f(2) - f(2) - f(3) = 0$

14) $\frac{x}{y} = \frac{1}{11} \Rightarrow f(\frac{1}{11}) = -f(11) = -[\frac{11}{4}] = -2$ ✓

15) $\frac{x}{y} = \frac{1}{10} = \frac{2}{20} \Rightarrow f(\frac{1}{10}) = -f(5) = -1$ ✓

16) $\frac{x}{y} = \frac{1}{9} \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = -f(3) - f(3) = 0$

Т.о. для $x = 1$ кол-во пар: 13

17) $\frac{x}{y} = \frac{1}{8} \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = -f(2) - f(2) - f(2) = 0$

18) $\frac{x}{y} = \frac{1}{7} \Rightarrow f(\frac{1}{7}) = -f(7) = -[\frac{7}{4}] = -1$ ✓

19) $\frac{x}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(\frac{1}{6}) = -f(2) - f(3) = 0$

20) $\frac{x}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -[\frac{5}{4}] = -1$ ✓ ; 21) $\frac{x}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = 0$; 22) $\frac{1}{3}$. $f(\frac{1}{3}) = 0$; 23) $f(\frac{1}{2}) = 0$; 24) $f(1) = 0$

№5 (продолжение)

Заметим, что для $x=2$ $\forall y\in[1;24]$ $f\left(\frac{2}{y}\right)=\underbrace{f(2)}_{=0}-f(y)=-f(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во пар = кол-ву пар для $x=1$: 13

Аналогично : $x=3$ (13), $x=4$ (13), $x=6$, $x=8$, $x=9$, $x=12$, $x=16$, $x=18$, $x=24$

Но заметим также, что при $\frac{x}{y}\geqslant 1$ $f\left(\frac{x}{y}\right)\geqslant 0$

(т.к. $f(x)\geqslant f(y)$ $(x\geqslant y)$)

$\Rightarrow$ для $x=6$: 12 (т.к. $y=5$ не подходит)
для $x=8$: 11 (5, 7) ; $x=9$: 10 (5, 7, 11); $x=12$: 9 (5, 7, 10, 11)
$x=16$: 6 (5, 7, 10, 11, 13, 14, 15) ; $x=18$: 5 (5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17) ; $x=24$: 0

для $x=5$: $f\left(\frac{5}{y}\right)=f(5)-f(y)<0\Leftrightarrow \underbrace{f(5)}_{=}<f(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow y\in\{$ ~~10~~; 11; 13; 17; 19; 22; 23; $\}$ $\Rightarrow$ 6 пар

для $x=7$: $f\left(\frac{7}{y}\right)=f(7)-f(y)<0\Leftrightarrow \underbrace{f(7)}_{=-1}<f(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ аналогично $x=5$: 6 пар

для $x=10$: $f\left(\frac{10}{y}\right)=f(5)+\underbrace{f(2)}_{=0}-f(y)<0\Leftrightarrow f(5)<f(y)\Rightarrow$ как для $x=5$,

$\Rightarrow$ 6 пар

для $x=11$: $\underbrace{f(11)}_{=-2}<f(y)\Rightarrow y\in\{13;17;19;23\}\Rightarrow$ 4 пары

для $x=13$: $\underbrace{f(13)}_{=}<f(y)\Rightarrow y\in\{17;19;23\}\Rightarrow$ 3 пары

для $x=14$: $f\left(\frac{14}{y}\right)=f(7)<f(y)\Rightarrow$ как для $x=7$ и $y>14\Rightarrow y\in\{17;19;22;23\}\Rightarrow$ 4 пары

для $x=15$: $f\left(\frac{15}{y}\right)=f(15)-f(y)=\underbrace{f(3)}_{=0}+f(5)-f(y)=f(5)-f(y)<0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ как для $x=5$, но $y>15$! $\Rightarrow$ $y\in\{17;19;22;23\}$ – 4 пары

для $x=17$: $\underbrace{f(17)}_{=-4}>f(y)\Rightarrow y\in\{23\}\Rightarrow$ 1 пара

для $x=19$ $\underbrace{f(19)}_{=-4}>f(y)\Rightarrow y=23\Rightarrow$ 1 пара

для $x=20$: $f\left(\frac{20}{y}\right)=f(5)-f(y)\Rightarrow$ как для $x=5$, но $y>20\Rightarrow y\in\{22;23\}\Rightarrow$ 2 пары

для $x=21$: $f\left(\frac{21}{y}\right)=\underbrace{f(3)}_{=0}+f(7)-f(y)=f(7)<f(y)\Rightarrow$ как для $x=7$, но $y>21\Rightarrow$

$\Rightarrow y\in\{22;23\}\Rightarrow$ 2 пары для $x=22$: $f\left(\frac{22}{y}\right) = \underbrace{f(2)}_{40} + f(11) - f(y) \Rightarrow$ как для $x=11$, но $y > 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \{23\} \Rightarrow$ 1 пара

для $x = 23$: $y \in \varnothing$

т.о. для каждого x были рассмотрены всевозможные y,

т.е. рассмотрены все возможные пары

Итого: $\underset{x=1}{13} + \underset{2}{13} + \underset{3}{13} + \underset{4}{13} + \underset{5}{6} + \underset{6}{12} + \underset{7}{6} + \underset{8}{11} + \underset{9}{10} + \underset{10}{6} + \underset{11}{4} +$

$+ \underset{12}{9} + \underset{13}{3} + \underset{14}{4} + \underset{15}{4} + \underset{16}{6} + \underset{17}{1} + \underset{18}{5} + \underset{19}{1} + \underset{20}{2} + \underset{21}{2} + \underset{22}{1} + \underset{23}{0} + \underset{24}{0} =$

$= 145$

Ответ: 145 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2y)^2+25(y-1)^2+10(x-2y)(y-1)=25+6(x-2y)^2$

$5(x-2y)^2+25-25(y-1)^2-10(x-2y)(y-1)=0 \quad |:5$

$(x-2y)^2-2(x-2y)(y-1)-5(y-1)^2+25=0$

$(x-2y-3y+3)^2=25-6(x-2y)^2$

$(x-3y+1)^2=25-6(x-2y)^2$

$(x-2y-y+1)^2$

$(x-2y)^2+(y-1)^2-2(x-2y)(y-1)=25-6(x-2y)^2$

$7(x-2y)^2+(y-1)^2-2(x-2y)(y-1)-25=0$

$8(x-2y)^2-4(x-2y)(y-1)-4(y-1)^2=0 \quad |:4$

$2(x-2y)^2-(x-2y)(y-1)-(y-1)^2=0$

$(x-2y)(2(x-2y)-2(y-1))+(y-1)(x-2y-y+1)=0$

$2(x-2y)(x-3y+1)+(y-1)(x-3y+1)=0$

$(x-3y+1)(2x-4y+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3y-1 & (1) \\ x=\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} & (2) \end{array}\right.$

$2x-3y-1=0$

$(y-1)($

(1): $\begin{cases} x=3y-1 \\ x\geq 2y \\ (3y-3)(y-1)=(x-2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow 3(y-1)^2=(x-2y)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (y-1)\sqrt{3}=x-2y \\ (y-1)\sqrt{3}=2y-x=2y-3y+1=1-y \end{array}\right.$

$x-2y=4y-2-2y=2y-2$

$3y-1-2y==y-1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{(y-1)(\sqrt{3}-1)=0} \\ (y-1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \\ 2\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow (2;1)$

$(y-1)(4y-4)$

$y+1-2y= =(1$

$x-2=4y$

$x-2y=4y+2-2y= =2y+2$

(2) $x=\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}-2y\left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\right)(y-1)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(y-1)^2=\frac{1}{4}(y-1)^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array}$

$x=2$, $y=1$

$5(x-2y)^2+25-10(y-1)(x-2y)-25(y-1)^2$

$7(x-2y)^2-25-2(y-1)(x-2y)+(y-1)^2$

$12(x-2y)^2-12(y-1)(x-2y)-24(y-1)^2$

$4(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-12y=12$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$2x=4+6=10$

$4(2y-1)^2= =4(4y^2-4y+1)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \Leftrightarrow$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

огр: $x^2+18x>0$ $\quad x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$ $\quad x^2+18x=|x^2+18x|$

$a^b-a=a(a^{c-1}-1)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq |x^2+18x|$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = |x^2+18x|^{\log_{12}5}$

$t=\log_{12}(x^2+18x)$

$5^t+12^t \geq 13^t \quad |:13^t$

при $t>1$: $\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$

$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}} \Leftrightarrow$ ~~$\log_b a\cdot\log_b c=\log_b a\cdot bc$~~

$\Leftrightarrow |x^2+18x|^{\log_{12}5}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t>1\\t\leq 2\end{cases}\\ \begin{cases}t<1\\t\geq 2\end{cases}\end{array}\right. \quad t\in(1;2]$

$|x^2+18x|^{\log_{12}5} \geq |x^2+18x|\left(|x^2+18x|^{\log_{12}13-1}-1\right)$

$\log_{12}5<\log_{12}12$

$t=x^2+18x,\ t>0$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13} \Leftrightarrow$

$t^a+t^b \geq t^c$

$= t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\log_{12}12-\log_{12}5}\right) \geq t^{\log_{12}13}$, $\log_{12}\frac{12}{5}$

$t^a(t^{b-a}+1)\geq t^c$

$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$t^{b-a}+1 \geq t^{c-a}$

$144+81=225$

$\frac{D}{4}=9^2+144=81+144=$

$13\times 4=52$

$13\times 2=24$

$52+24=46$

$46+21=1\,7$

$+16=10\,3$

$+12=1\,4\,5$

$13\times 4=52$

$13\times 4=52$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = \cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}$ | $\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha =$

$= \sin2\alpha(\underbrace{\cos4\beta+1}_{2\cos^2 2\beta})+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha = 2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha =$

$= 2\cos2\beta\,(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha) =$

$= 2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac45 \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \cos2\beta = \frac{2\cancel{4}\cdot\sqrt5}{\cancel{5}\cdot\cancel{2}} = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\cancel{\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}} = \cancel{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}$

$\Rightarrow 2\cos^2\beta = \frac{2}{\sqrt5}+1 = \frac{2+\sqrt5}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \overset{:\cos^2\alpha}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\beta = \frac{2+\sqrt5}{2\sqrt5}$

1) $\sin2\beta = \sqrt{1-\frac45} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \overset{\cdot\sqrt5}{\Leftrightarrow}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1} = -\cancel{1}$

$2\cos\alpha\,(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \text{ не опр} \\ 2\sin\alpha+\cos\alpha=0 \overset{:\cos}{\Leftrightarrow} 2\operatorname{tg}\alpha=-1;\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac12\end{array}\right.$

2) $\sin2\beta = -\sqrt{1-\frac45} = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \overset{\cdot\sqrt5}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \underbrace{\cos2\alpha}_{1-2\sin^2\alpha} = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\,(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0 \\ 2\cos\alpha+\sin\alpha=0 \Rightarrow\end{array}\right.$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$$

$x^2-4x+4+\underbrace{9y^2}_{(3y)^2}-\underbrace{18y}_{-2\cdot3\cdot3y}+9=$

(1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} xy-x-2y+2=(x-2y)^2 \\ x-2y\geq 0\end{cases}$ $x^2-4xy+4y^2$; $x(y-1)-2(y-1)$; $(y-1)(x-2)=(x-2y)^2$

$\begin{cases} x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0 \\ x-2y\geq 0\end{cases}$!!!

$$\begin{cases} x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0\end{cases}$$

$\begin{cases} 5y^2-5x+5xy-20y-10=0 \\ \ldots\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2-x+xy-4y-2=0 \\ \ldots\end{cases}$

~~$y(y+x-4)$~~

$$\begin{cases} 9y^2-9x+9xy-36y-18=0 \\ 9y^2+x^2-4x-18y-12=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2-4x-18y-12+9x-9xy+36y+18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+5x-9xy+18y+6=0$

---

(1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(x-2)(y-1)=(x-2y)^2 \\ x-2y\geq0\end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(3y-3)^2=12+\underbrace{4+9}_{13} \Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

~~$(x-2)^2+(3(y-1))^2+2(x-2)(y-1)=25+2(x-2)(y-1)$~~

~~$(x-2+y-1)^2=25+2(x-2)(y-1)$~~

~~$(x+y-3)^2=25+2(x-2)(y-1)$~~

1) $x=2 \Rightarrow$ $\begin{cases} 2-2y=0 \\ 9(y-1)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 0=25\end{cases} \Leftrightarrow x,y\in\varnothing$

2) $x\neq 2$

$y-1=\dfrac{(x-2y)^2}{x-2} \Rightarrow (y-1)^2=\dfrac{(x-2y)^4}{(x-2)^2}$

(2) : $(x-2)^2+\dfrac{9(x-2y)^4}{(x-2)^2}=25 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^4+9(x-2y)^4}{(x-2)^2}=25$

$(x-2)^2+(3(y-1))^2+6(x-2)(y-1)=25+6(x-2)(y-1)$

$(x-2+3(y-1))^2=25+6(x-2y)^2$

$(x+3y-5)^2=25+6(x-2y)^2 \Leftrightarrow (x-2y)^2+25(y-1)^2+10(x-2y)(y-1)=25+6(x-2y)^2$

$x-2y+5y-5$ $((x-2y)+5(y-1))^2$ $25((y-1)^2-1)=$ ~~$5(x-2y)^2-5(y-1)^2$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\forall a, b \in \mathbb{Q}_+ \quad f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = [p/4]$ для простых чисел

$x \in [1; 24]$; $y \in [1; 24]$:

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x \cdot y^{-1}) = f(x) + f(y^{-1})$

$f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

№6 $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2 - 30x - 17$ ($g(x)$)

$3 + \frac{12x+11-12x-9}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$4x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$

при $x = -\frac{11}{4}$: $3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$y_B = -\frac{15}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{15 \cdot 23}{8} - 17 = \frac{435-136}{8} = \frac{299}{8} = 37\frac{3}{8}$

$-8x^2 - 30x - 17$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$y_B = -\frac{8 \cdot 15^2}{8^2} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{450-225}{8} - 17 = \frac{225 - 17 \cdot 8}{8} = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) =$

$= -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 = 22 - 17 = 5$

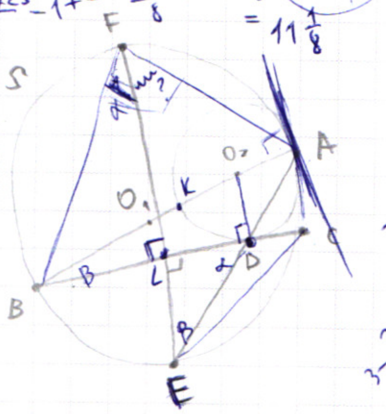
$-8x^2 + 3x + 17 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 17 < 0$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{8 \cdot 9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

N 4

R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$, $CD = 8$, $BD = 17$



$BD^2 = BK \cdot BA$, $BK = (2R - 2r)$, $BA = 2R$

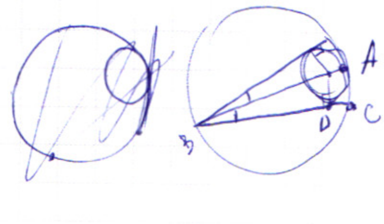
$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$\left[r^2 + BD^2 = (2R - r)^2\right]$

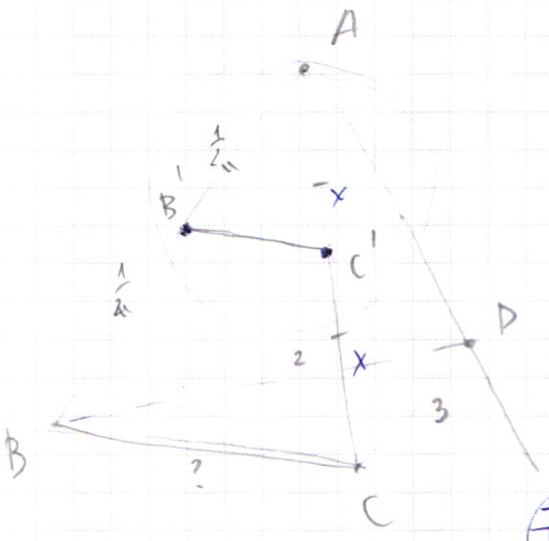
$4R(R-r) = 4R^2 - 4Rr + \dots$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad = bc$

$\frac{EL}{LE} = \frac{BL}{LC}$

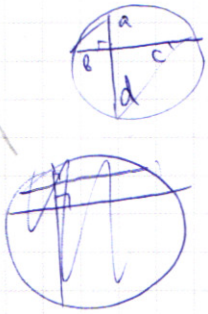


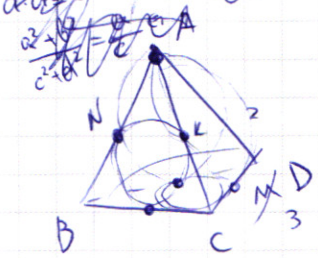
$B'C'$ - ср. линия =>
=> $BC = 2B'C'$

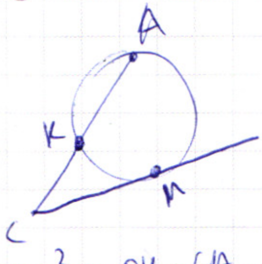


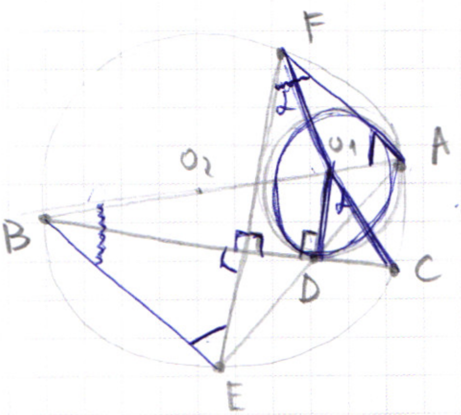
$AD \leq 2+1=3$
$AD \leq 3+2x$
$BC \leq 1+2x$
$2x \leq BC+1$

$AD \leq 3+2x \leq \cancel{4}+BC$



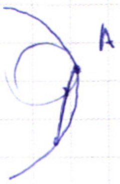


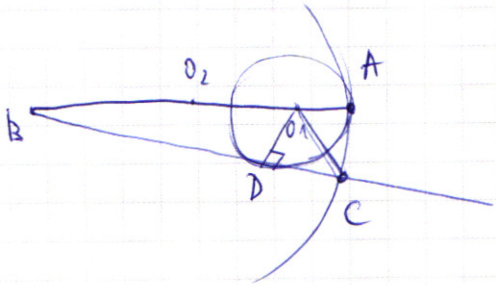


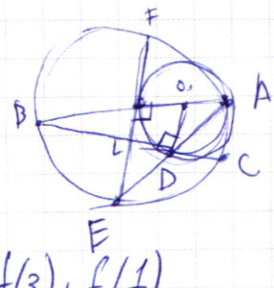


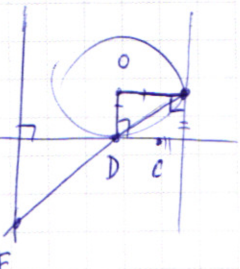
$CD = 8$, $BD = 17$
$BD \cdot DC = ED \cdot DA$
$BD^2 = (2R-r)^2 \cdot 2R$

$CM^2 = CK \cdot CA$
$\left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = CK \cdot CA = \frac{1}{2}CA^2$
$\frac{1}{4}CD^2 = \frac{1}{2}CA^2$ | $\cdot 4$
$CD = \sqrt{2}CA$ =>
=> $CA = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot CD = \frac{3}{\sqrt{2}}$
$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = \frac{1}{2}AB \cdot AB$
$\frac{1}{4}AC^2 = \frac{1}{2}AB^2$
$\frac{9}{4} = \frac{9}{16} = \frac{1}{2}AB^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{9}{8}$









$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{6}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{6}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(a) + f(x) + f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ =>
=> $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ => $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)