МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5} \quad |:2$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

Подставим из (1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

По ОТТ $\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta = 1 \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

Случай 1: $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$(1) \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot(\sqrt5)$ $\quad 1 = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = -1$ $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha = -(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$2\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |2\cos\alpha$ т.к. $tg\alpha$ определён, а $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то $\cos\alpha\neq 0$ поделим на $2\cos\alpha$

$\cos\alpha+2\sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha$

$1+2tg\alpha = 0$ $\quad \boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

Случай 2: $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

Аналогично подставим в (1)

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$, а также $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\quad 1 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |:2\cos^2\alpha$ $\quad \cos\alpha\neq 0$ т.к. $tg\alpha$ определён

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \Leftrightarrow tg^2\alpha+2tg\alpha = 0$

$tg(\alpha)(tg\alpha+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha+2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.}$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0.$

№2

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 & (2) \end{cases}$

(1) при условии $x-2y\geq 0$ возведём обе части уравнения в квадрат

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

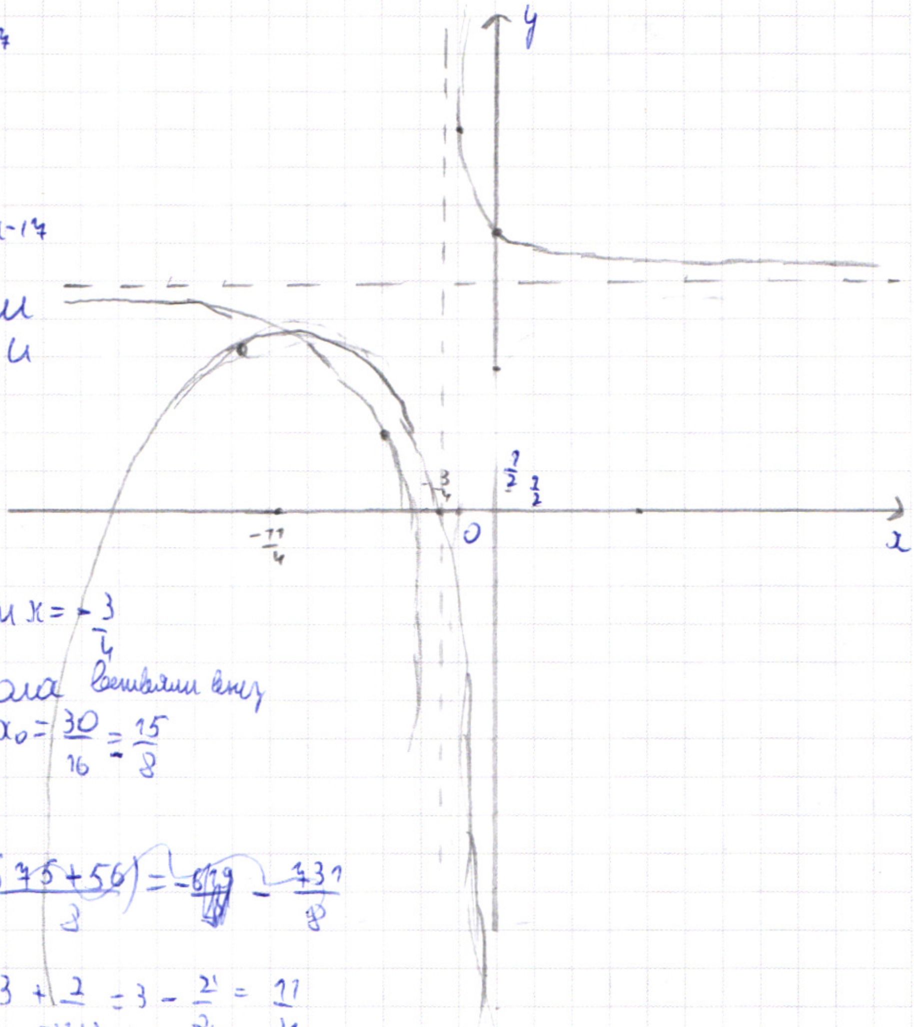
№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9}{4x+3} + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

Рассмотрим графики функции $f(y) = 3 + \frac{2}{4x+3}$ и $y = -8x^2-30x-17$ на плоскости.



$y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ – гипербола с асимптотой по $y=3$ и $x = -\frac{3}{4}$

$y = -8x^2-30x-17$ – парабола ветвями вниз с вершиной в точке $x_0 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$y_0 = -8 \cdot \frac{225}{64} - 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 =$

$= -\left(\frac{225+450}{8} + 17\right) = -\left(\frac{675+56}{8}\right) = -\frac{731}{8}$

$x=0$ $y=17$

Для гиперболы: $y = -\frac{11}{4}$ $x = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{8} = \frac{11}{4}$

Чтобы неравенство $3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b$ было выполнено для $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, достаточно и необходимо, что

$\boxed{-\frac{11a}{4} + b \ge \frac{11}{4}}$ (1), тогда прямая лежит выше гиперболы, неравенство выполнено на нужном промежутке

$+\frac{3a}{4} + b$

Прямая должна быть в точках $[-\frac{11}{4}; \frac{3}{4})$ выше гиперболы и ниже параболы, тогда неравенство будет выполнено

Пусть $g(x) = -8x^2-30x-17$ $f(x) = ax+b$

тогда $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ x \in [-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le g(-\frac{11}{4}) \\ f(-\frac{3}{4}) \le g(-\frac{3}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11a}{4} + b \le -\frac{121}{16} \cdot 8 + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 \\ -\frac{3a}{4} + b \le -8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11a}{4} + b \le 5 \\ -\frac{3a}{4} + b \le 1 \end{cases}$

$+\begin{matrix} \frac{11a}{4} - b \le -\frac{11}{4} \\ -\frac{3a}{4} + b \le 1 \end{matrix}$

$2a \le -\frac{7}{4} \Rightarrow \boxed{a \le -\frac{7}{8}}$

С учётом (1) получим $\begin{cases} -\frac{11a}{4} + b \ge \frac{11}{4} \\ -\frac{11a}{4} + b \le 5 \\ -\frac{3a}{4} + b \le 1 \end{cases}$

$b \ge \left(\frac{11}{4}\right)\left(\frac{21}{8}\right) = \frac{165}{8}$

$b \le 1 + \frac{21}{32}$ $b \le \frac{53}{32}$

$2b - \frac{7a}{2} \le 6$ $b \le 3 + \frac{7a}{4}$ $b \le \frac{11}{4} + \frac{77}{32}$ $b \le \frac{234}{32}$

$b \ge \frac{11}{4} + \frac{11a}{4}$ $3 + \frac{7a}{4} \ge \frac{11}{4} + \frac{11a}{4}$ $\frac{1}{4} \ge a$

Ответ: $(a_0; b_0)$, где $a_0 \le -\frac{7}{8}$; $b_0 \ge 16$ $\frac{165}{32} \le b_0 \le \frac{234}{32}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ $\quad$ $x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$ $\quad$ Рассмотрим уравнение, как квадратное относительно x.

$D=(5y-1)^2-16y^2-8y+8=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=$

$=\frac{8y-4}{2}=4y-2$

$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1$

Имеем 2 случая 1) $x=4y-2$ $\quad$ 2) $x=y+1$

случай 1) $x=4y-2$

Подставим в (2):

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y=12$

$25y^2-50y=0 \quad |:25 \quad y(y-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

$y=0 \quad x=-2$ $\quad$ Проверим условие $x-2y\geq 0$

$y=2 \quad x=6$ $\quad$ $-2-0<0 \quad -2<0$, значит пара $(-2;0)$ не подходит

$6-4\geq 0 \quad 2>0$ значит пара $(6;2)$ подходит.

Случай 2: $x=y+1$ подставим в (2).

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y-15=0 \quad |:5 \quad 2y^2-4y-3=0 \quad D=16+24=40$

$y_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\quad$ $y_2=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}+1=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$ $\quad$ $x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$

Проверим условие $x-2y\geq 0$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}=\frac{4+\sqrt{10}-4-2\sqrt{10}}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{2}<0$ – пара $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2};\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$ не подходит

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}=\frac{4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}>0$ – пара $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ – подходит

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x=t$

$x^2+18x\geq 0 \quad x(x+18)\geq 0 \quad \boxed{x\in(-\infty;-18)\cup \cup(0;+\infty)}$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

$5^{\log_{12}t}+t\geq |t|^{\log_{12}13}$

$f(xy)=f(xy)=f(x)+f(y)=ax+b+ay+d=a(x+y)+b+d$

$x+y<-\frac{(b+d)}{a}$ $\quad$ ~~$ax+b=$~~ $\quad f(2)=f(0)\quad f(3)=f(0)\quad f(5)=f(7)$

$f(4)=f(2)+f(2)=2f(2)=2f(0)$ $\quad$ ~~$f(0)=f(0)+ft$~~

$f(4);$ $f(5)=f(7)\quad f(5)=f(7)+f(5)\quad \boxed{f(7)=0}$

$f(5)=0\quad f(4)=0\quad f(11)=f(2)\quad a+b=0\ \boxed{a=-b}$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})\quad f(\frac{1}{y})<-f(x)$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t}=t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t\geq t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$

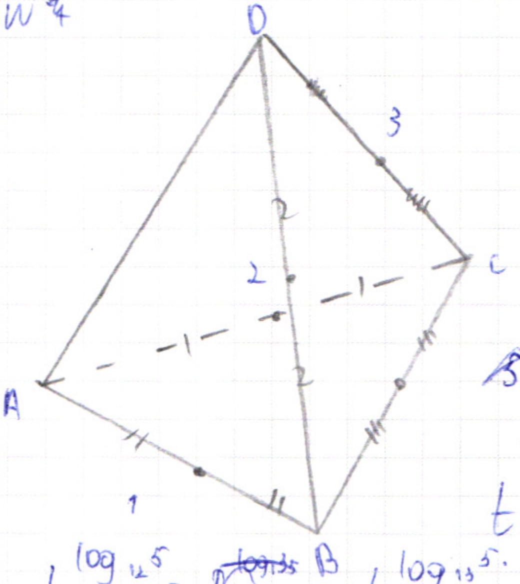
$t\geq(\sqrt{t})^{\log_{12}169}-(\sqrt{t})^{\log_{12}25}$

$5=t^{\log_t 5}$

$t^{(\log_t 5)\cdot\log_{12}t}=t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t\geq t^{\log_{12}13}$



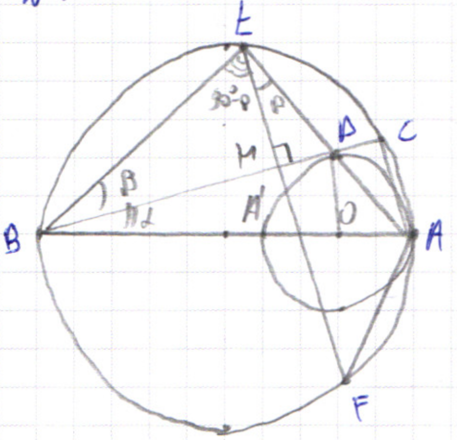
$t^{\log_{12}5}=$ B $\quad t^{\log_{13}5\cdot\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}\quad t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{13}13}$

$a(xy)=a(x+y)+2b\quad a(x+\frac{1}{y})\leq-2b\quad$ ~~$(x+\frac{1}{y})\leq-\frac{2b}{a}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: AB-диаметр; Ω; ω; BC касается ω в D; $AD \cap \Omega$ в E; $EF \perp BC$; CD=8; BD=17

Найти: R-? r-? $\angle AFE$-? S_{AEF}-?

Решение:

1) Пусть O-центр ω; $AB \cap \omega$ в A'; R-радиус Ω; r-радиус ω.

По т. о касательной и секущей:

$BD^2 = BA' \cdot BA$; где $BA' = BA - AA' = 2R - 2r$; $BA = 2R$

$289 = (2R-2r)\cdot 2R$ (1)

2) $OD \perp BC$ (свойство радиуса и касательной).

$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ODB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$ и $\angle CBA$-общий ($\angle CBA$ и $\angle OBD$) и $\angle DOB = \angle CAB$ (сумма 2-х углов в $\triangle ACB$ и $\triangle ODB$ равна, а т.к. сумма всех углов 180°, то оставшиеся равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DOB \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Leftrightarrow 50R - 25r = 34R$

$BO = BA - OA = 2R - r$; $BC = BD + DC$; $BC = 17+8 = 25$

$16R = 25r$ $R = \frac{25r}{16}$; $r = \frac{16R}{25}$ (2)

Подставим (2) в (1)

$289 = \left(2R - \frac{32R}{25}\right)\cdot 2R$ $\quad 289 = \frac{36R^2}{25}$ $\quad R^2 = \frac{289\cdot 25}{36}$ т.к. $R>0$, то

$R = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$ $\quad r = \frac{16R}{25} = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

3) Пусть $\angle EBC = \beta$; $\angle CBA = \alpha$; тогда $\angle AFE = \angle EBC + \angle CBA = \alpha + \beta$ (т.к. опираются на дугу EA); $\angle BEH = 90° - \beta$ (т.к. $EH \perp BC$), где H- точка пересечения BC и EF; $\angle BEA$ опирается на диаметр AB $\Rightarrow \angle BEA = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle DEH = \frac{\pi}{2} - \angle BEH = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \beta$; $\angle EDB = \frac{\pi}{2} - \beta$; $\angle EDO = \angle EDB + \angle BDO = \pi - \beta$; $\angle ODA = \pi - \angle EDO$ (смежные) $\Rightarrow \angle ODA = \beta$; $\triangle ODA$ - равнобедренный т.к. $OD = OA \Rightarrow \angle DAB = \beta$; ~~т.к.~~ $\Rightarrow \angle DOA = \pi - 2\beta \Rightarrow \angle DOB = \pi - \angle DOA = 2\beta$ (как смежные).

т.к. $\angle BDO = \frac{\pi}{2}$, то $\angle DBO + \angle DOB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

Из $\triangle BDO$ $\cos\alpha = \frac{BD}{BO}$ $\quad BO = 2R - r = \frac{85}{3} - \frac{136}{15} = \frac{425-136}{15} = \frac{289}{15}$ $\quad DO = r = \frac{136}{15}$

$\cos\alpha = \frac{17\cdot 15}{289} = \frac{15}{17}$ $\quad \sin\alpha = \frac{DO}{BO} = \frac{136}{15}\cdot\frac{15}{289} = \frac{8}{17}$

№4

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\quad 0 \leqslant \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ $\quad \alpha = \arcsin\frac{8}{17}$ $\quad \frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{17\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\beta = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cancel{\angle EFA = \beta+\alpha} = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{8}{17} =$

$\angle EFA = \alpha + \beta = \alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\angle FEA = \beta = \cancel{\angle EAE = 180^\circ}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ $\quad \cancel{\angle EFA =}$ $\angle EFA + \angle FEA = 2\beta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle EAF = \pi - \angle EFA - \angle FEA =$

$= \frac{\pi}{2}$ $\boxed{\Rightarrow}$

$\boxed{\Rightarrow}$ EF - диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 2R = \frac{85}{3}$

$\sin\angle FEA = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4-1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$

$\sin\angle FEA = \frac{AF}{EF}$ $\quad \frac{AF}{\frac{85}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$ $\quad AF = \frac{85}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}} = \frac{85\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$

$\cos\angle FEA = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{17}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$

$\cos\angle FEA = \frac{AE}{EF}$ $\quad \frac{AE}{\frac{85}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}$ $\quad AE = \frac{425\sqrt{2}}{6\sqrt{17}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE \cdot AF$ $\quad S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{425\cdot 85\cdot 2}{6\cdot 2\cdot 17} = \frac{2125}{12}$

$\times\ 425 \cdot 5 = 2125$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $V = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

т.к. $f(ab)=f(a)+f(b)$, то по Коши $f(ab)$ - линейная функция.

$f(p)=[p/4]$, значит ~~f(n)=...~~ $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$

$f(11)=2$ $f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$, тогда $f(x/y)<0$, если x-простое или y-составное или оба составные

Общее количество случаев: 1) x-простое, y-~~непростое~~ составное

$9\cdot 15=135$

2) x-~~составное~~ y-~~простое~~ составное $15\cdot \cancel{17}=225$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\ 135 \\ \hline 360 \end{array}$$

Ответ: ~~240~~. 360.

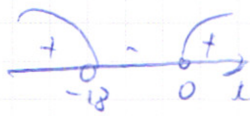
№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$



$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}=(x^2+18x)^{(\log_{x^2+18x}5)\log_{12}(x^2+18x)}=(x^2+18x)^{\log_{12}5}$$

Пусть $x^2+18x=t$ $x^2+18x>0$ (на ОДЗ), поэтому $|x^2+18x|=x^2+18x$

$$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$

$D=16-36y^2+72y+48=-36y^2+72y+64$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$(4y+1)(y-2)=4y^2-8y+y-2=4y^2-7y-2$

$4y^2-y(5x-2)+x^2+x-2=0$

$D=25x^2-20x+4-16x^2-16x+32=$

$=9x^2-36x+36=(3x-6)^2$

$(4y-2)(y+1)=$

$=4y^2+4y-2y-2=4y^2+2y-2$

$\boxed{x-2y\geq 0}$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x=\frac{5y-1+3y+3}{2}=\frac{8y+2}{2}=4y+1$

$x=\frac{5y-1-3y-3}{2}=\frac{2y-4}{2}=y-2$

$y=\frac{5x-2+3x-6}{8}=\frac{8x-8}{8}=x-1$

$y=\frac{5x-2-3x+6}{8}=\frac{2x+4}{8}=\frac{x+2}{4}$

$\frac{4-10}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

N3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=12^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5=12^{\log_{12}5}$

$\log_{12}13=\log_{12}(25-12)=$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$\log_{12}13=\frac{\log_5 13}{\log_5 12}=\log_5 13\cdot\log_{12}5$

$12^{\log_{12}(5x^2+90x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)}\geq$

$169-144=25$

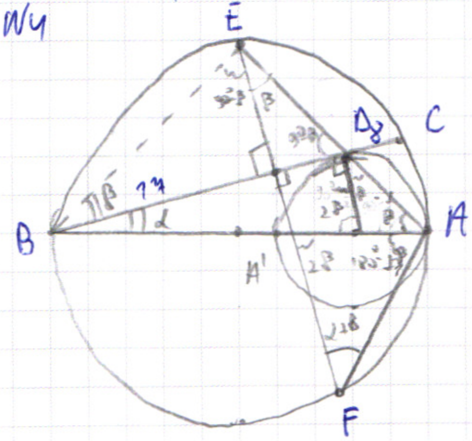
$\left(12^{\log_{12}5}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)}+\left(12^{\log_{12}(x^2+18x)}\right)\geq 12^{\log_{12}(x^2+18x)\cdot\log_{12}13}$

$12^{\log_{12}(x^2+18x)}\left(12^{\log_{12}5}+1-\log_{12}13\right)\geq 0$

$12^{\log_{12}x^2+18x}=t$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

N4



$AA'=2r$ $AB=2R$ $\boxed{289=(2R-2r)\cdot 2R}$

$BA'=(2R-2r)$

$\frac{28}{25}\cdot\frac{25}{8}=\frac{2R-r}{2R}=\frac{27}{25}$

$-\frac{136}{15}$

$2\beta+\alpha=90^\circ$ $\beta=\frac{90^\circ-\alpha}{2}$

$50R-25r=34R$

$R=\frac{25r}{16}$

$\angle EBA=\frac{90^\circ+\alpha}{2}$

$17\cdot 8=136$

$425-136=289$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{12x+11}{4x+3} - ax + b \le 0$ $\quad 3 + \frac{2}{7}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$32 \cdot 17 = 224 + 32 = 544$ $\quad 900 - 544 = 356$ $\quad 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ $\quad 3 + \frac{2}{1} = 1$ $\quad 645 - 56 = 619$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9}{4x+3} + \frac{2}{4x+3} = \frac{3(4x+3)}{4x+3} + \frac{2}{4x+3} = \frac{2}{4x+3} + 2$

$4x+3 = 2$, $x = -\frac{1}{4}$ $\quad 4x+3 = 7$, $4x = 4$

$165 - 121 = 44$

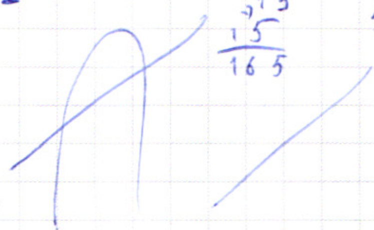
$f(-1) = 3 + \frac{2}{-1} = 1$ $\quad f(-2) = 3 + \frac{2}{-5} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$

$f(-10) = 3 + \frac{1}{}$ $\quad 165 - 121 = 44$ $\quad 15 \cdot 11 = 15 + 15 = 165$ $\quad -8+3$

$-\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 = 5$ $\quad 44 - 34 = 10$

$x(-1 \le x^2$

$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = \frac{36}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$



$-\frac{7}{2}a + 2b \le 6$ $\quad b \le 3 + \frac{7a}{4}$ $\quad b \ge \frac{11}{4} + \frac{11a}{4}$

$3 + \frac{7a}{4} = 3 + \frac{7a}{4} \ge \frac{11}{4} + \frac{11a}{4}$ $\quad \boxed{\frac{1}{4} \ge a}$ $\quad b \le 1 + \frac{3a}{4}$

$\cancel{3 + \frac{7a}{4} \ge 5 + \frac{11a}{4}}$ $\quad b \ge 5 + \frac{11a}{4}$ $\quad \frac{11}{4} + \frac{11a}{4} \ge 5 + \frac{11a}{4}$ $\quad b \le 4$ $\quad 165 - 121 = 44$

$b \ge \frac{11}{4} + \frac{11}{16} = \frac{55}{16}$ $\quad b \le 1 + \frac{3}{16}$ $\quad b \le \frac{19}{16}$ $\quad b \ge \frac{55}{16}$

$\cancel{\frac{12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 11}{-3}}$ $\quad \frac{12 \cdot \left(-\frac{21}{4}\right) + 11}{4 \cdot \left(-\frac{21}{4}\right) + 3} = -\frac{22}{7}$ $\quad 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{4} = \frac{19}{4}$

$\frac{12 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 11}{4 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$ $\quad \cancel{-\frac{11a}{4} + b \ge \frac{11}{4}}$ $\quad 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{7} = \frac{19}{4}$

$b \le 5 + \frac{11a}{4}$ $\quad \frac{11}{4} + \frac{11a}{4} \ge 1 + \frac{3a}{4}$

$-\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 = \frac{165 - 121}{2} - 17 = 22 - 17 = 5$ $\quad b \le 1 + \frac{3a}{4}$ $\quad \cancel{2a \ge -\frac{7}{4}}$

$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = \frac{36}{2} - 17 = 1$ $\quad b \ge \frac{11}{4} + \frac{11a}{4}$ $\quad 32 \cdot 5 = 160$

$\frac{7}{4} \ge$ $\quad \frac{11}{4} + \frac{11a}{4} \ge 1 + \frac{3a}{4}$ $\quad \frac{7}{4} + 2a \ge 0$ $\quad \boxed{a \ge -\frac{7}{8}}$ $\quad 484 - 165 = 319$

$\frac{21}{32} + b \le 1$ $\quad b \le \frac{11}{32}$ $\quad b \le 5 + \frac{77}{32}$ $\quad \frac{77}{32} + b \ge \frac{11}{4}$ $\quad 319 + 136 = 455$

$b \ge \frac{11}{4}\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{165}{32}$ $\quad 156 - 18 = 138$

$-8 \cdot \frac{121}{64} + 30 \cdot \frac{11}{8} - 17 = \frac{165 - 484}{8} - 17$ $\quad 330 - 242 = 88$ $\quad -88$

$-8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{90}{16} - 17 = -\frac{72}{16} + \frac{90}{16} - 17 = \frac{18}{16} - 17 = \frac{9}{8} - 17 = -\frac{138}{8}$ $\quad 330 - 242 = 88$ $\quad 88 + 77 = 165$ $\quad 160 + 44 = 204$

$-8 \cdot \frac{121}{64} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = \quad -8 \cdot \frac{121}{64} + \frac{330}{4} - 17 = 22 - 17 = 5$ $\quad 68$

$-8 \cdot \frac{9}{64} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 = -\frac{18}{4} + \frac{90}{4} - 17 = \frac{72}{4} - 17 = 18 - 17 = 1$ $\quad 5 + \frac{77}{32}$ $\quad 1 + \frac{21}{32} = \frac{53}{32}$