МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

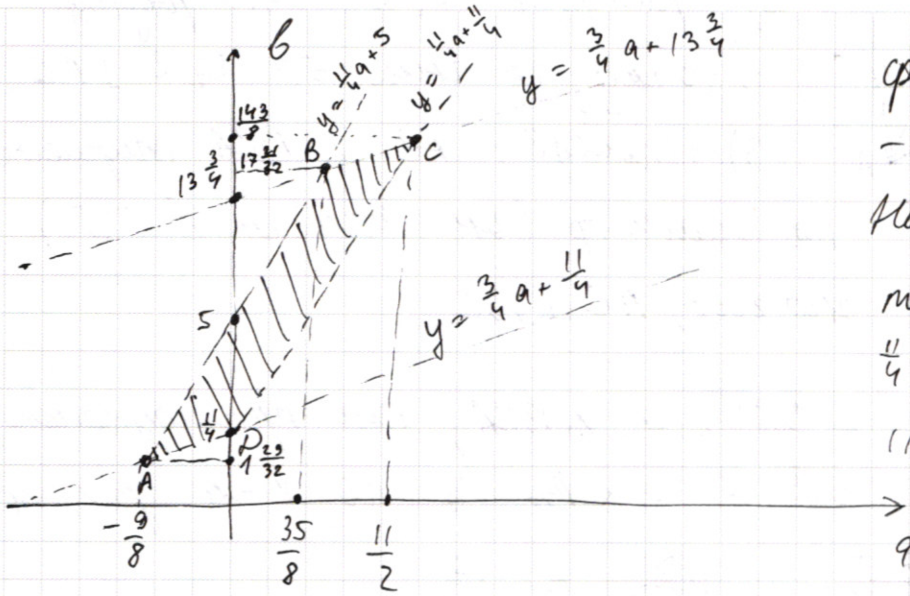


рис. 3

фигура ABCD – параллелограмм

Найдём координаты точки A

$\frac{11}{4}a+5=\frac{3}{4}a+\frac{11}{4}$

$11a+20=3a+11$

$8a=-9$

$a=-\frac{9}{8}$

$b=\frac{11}{4}\cdot -\frac{9}{8}+5=\frac{-99}{32}+5$

$b=2-\frac{3}{32}=1\frac{29}{32}$

Ответ: приведённый на рис. 3 параллелограмм ABCD содержит точки, координаты которых являются искомыми парами чисел, причём $A(-\frac{9}{8};1\frac{29}{32})$; $B(\frac{35}{8};17\frac{21}{32})$ $C(\frac{11}{2};\frac{143}{8})$; $D(0;\frac{11}{4})$.

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $(x-2)(y-1)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

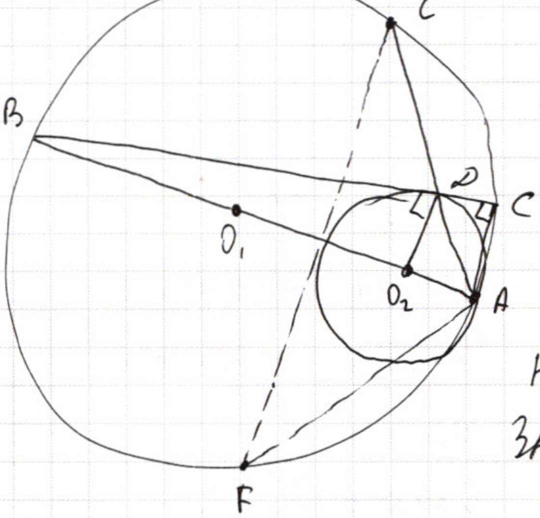
$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9-13=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$; $y-1=b$

№4

O_1 – центр ν; O_2 – центр ω



1) Точка касания окружностей лежит на линии центров, AB – диаметр, значит $O_2 \in AB$

2) Проведём O_2D, это радиус в точку касания $\Rightarrow O_2D \perp BC$

3) Проведём AC. $\angle BCA$ опирается на диаметр (он вписан в ν) Значит, $AC \perp BC$

4) $\angle CBA$ ~~общий~~ в $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$, они прямоугольны, значит, ~~[illegible]~~ $\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$ по 2-м углам

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{17}{17+8} = \frac{17}{25}$$

$BO_2 = 2R - r$; $BA = 2R$ (R – радиус ν, r – радиус ω)

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$$

$2R \cdot 17 = 2R \cdot 25 - 25r$

$25r = 16R \Rightarrow R = \frac{25}{16}r$; $4R^2 = \frac{4 \cdot 25^2}{16^2} r^2$

5) Пусть $AC = x$. ~~[illegible]~~ Из подобия $\triangle ACB$ и $\triangle O_2DB$:

$\frac{x}{O_2D} = \frac{25}{17}$; $O_2D = r$; $x = \frac{25r}{17} \Rightarrow x^2 = \frac{25^2}{17^2} r^2$

6) По т. Пифагора в $\triangle BCA$: $BC^2 + AC^2 = AB^2$ $AB^2 = 4R^2$

$(17+8)^2 + ~~[illegible]~~ + x^2 = AB^2$

$25^2 + \frac{25^2}{17^2} r^2 = \frac{4 \cdot 25^2}{16^2} r^2$

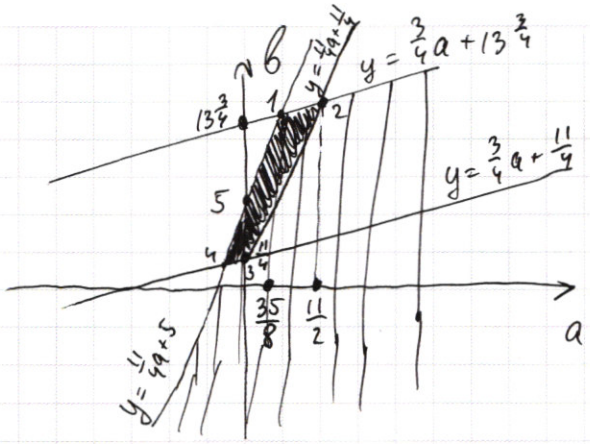
$r^2\left(\frac{4}{16^2} - \frac{1}{17^2}\right) = 1$

$r^2 \cdot \frac{900}{16^2 \cdot 17^2} = 1 \Rightarrow 900r^2 = 16^2 \cdot 17^2 \Rightarrow r = \frac{16 \cdot 17}{30} = \frac{136}{15}$

$R = \frac{25}{16} r = \frac{25}{16} \cdot \frac{16 \cdot 17}{30} = \frac{85}{6}$ Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



Теперь ~~[illegible]~~

Вторая часть неравенства рассмотрена, рассмотрим 1 часть. Прямая $f(x)$ должна быть выше гиперболы.

Из первого рисунка видно, что при $a \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы $f(-\frac{11}{4}) \geq k(-\frac{11}{4})$

$-\frac{11}{4}a + b \geq \frac{11}{4}$

$b \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$ – эта прямая параллельна $y = \frac{11}{4}a + 5$

Итого при $a \geq 0$ область такова (~~[illegible]~~)

Найдём точки пересечения прямых

$\frac{3}{4}a + 13\frac{3}{4} = \frac{11}{4}a + 5$ $\qquad$ $\frac{3}{4}a + 13\frac{3}{4} = \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$

$3a + 55 = 11a + 20$ $\qquad$ $3a + 55 = 11a + 11$

$8a = 35 \quad a = \frac{35}{8}$ $\qquad$ $8a = 44 \quad a = \frac{11}{2}$

в т. 1: $b = \frac{11}{4} \cdot \frac{35}{8} + 5 = \frac{385}{32} + 5 = 15\frac{85}{32} = 17\frac{21}{32}$ $\qquad$ в т. 2: $b = \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{2} + \frac{11}{4} = \frac{121}{8} + \frac{22}{8} = \frac{143}{8}$

Теперь рассмотрим $a < 0$. ~~Необходимо и дост~~ ~~это~~ ~~и доста~~

Достаточно, чтобы $f(-\frac{3}{4}) \geq k(-\frac{11}{4})$, потому что тогда вся прямая будет выше асимптоты

$-\frac{3}{4}a + b \geq \frac{11}{4}$. ~~Из рисунка 2 видно, что нам подойдут все подходящие~~

$b \geq +\frac{3}{4}a + \frac{11}{4}$

~~[illegible]~~

Значит, ~~[illegible]~~ подходящие пары $(a; b)$ – это координаты точек, находящихся внутри найденного параллелограмма ~~ABCD~~ 1-2-3-4.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Пусть $f(x) = ax + b$ – прямая

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$ – парабола

$k(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$ – гипербола

$y = g(x)$ – парабола, $x_0 = -\frac{-30}{2\cdot -8} = -\frac{15}{8}$

$y_0 = g(x_0) = 11\frac{1}{8}$

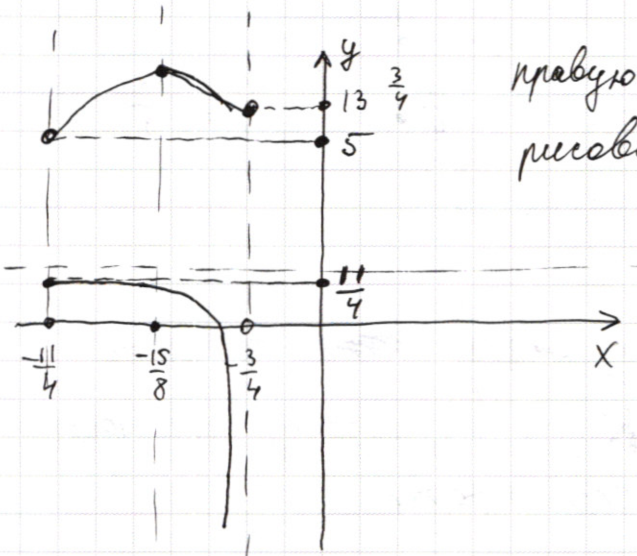
$g(-\frac{11}{4}) = -8\cdot(\frac{11}{4})^2 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 = 5$

$g(-\frac{3}{4}) = 13\frac{3}{4}$

$y = k(x)$ – гипербола

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{0,5}{x+\frac{3}{4}}$, асимптоты $y = 3$

$x = -\frac{3}{4}$



правую ветвь гиперболы можно не рисовать, т. к. она в другой области

$k(-\frac{11}{4}) = \frac{-\frac{11}{4}\cdot 12 + 11}{4\cdot -\frac{11}{4} + 3} = \frac{11}{4}$

Видно, что прямая должна быть ниже параболы, т. е.

$$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le g(-\frac{11}{4}) & (1) \\ f(-\frac{3}{4}) \le g(-\frac{3}{4}) & (2) \end{cases}$$

1) $-\frac{11}{4}a + b \le -8\cdot(\frac{11}{4})^2 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17$

$-11a + b \le 20$

$b \le 5 + \frac{11}{4}a$

2) $-\frac{3}{4}a + b \le 13\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}a + b \le \frac{55}{4}$

$b \le +\frac{3}{4}a + \frac{55}{4}$

Построим подходящую область (////)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (2)

2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

Поделим (2) на (1)

$2\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

~~По~~ Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = -1$

$\sin 4\alpha = -1$

$4\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$

~~...~~ $1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

№5

Найдём значения функции от натур. чисел от 1 до 24

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Для простых чисел — $[\frac{p}{4}]$, а остальные можно представить как произведение простых

$f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ (для $\forall a$).

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) \geq 0$ при $\forall\ x \in \mathbb{N}$ и $x \in [1; 24]$.

Значит, $f(\frac{1}{y}) < 0$, $y \neq 1$ (т.к. $f(\frac{1}{1}) = 0$)

$f(1) = f(\frac{2}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(2) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(1) = f(\frac{3}{3}) = f(3) + f(\frac{1}{3}) = 0$

$f(\frac{1}{3}) = 0$

Для $\forall a$ при $f(a) = 0$ $f(\frac{1}{a})$ тоже равно 0.

Значит, $y = \left[\begin{array}{l} 13 \\ 17 \\ 19 \\ 22 \\ 23 \end{array}\right.$ т. к. f от этих чисел не 0

$0 = f(1) = f(\frac{13}{13}) = f(13) + f(\frac{1}{13})$

$0 = 1 + f(\frac{1}{13})$

$f(\frac{1}{13}) = -1$

$f(\frac{1}{17}) = -4$

$f(\frac{1}{19}) = -4$

$f(\frac{1}{22}) = -2$

$f(\frac{1}{23}) = -5$

При $y = 13$ $f(x)$ — только 0

$x = \left[\begin{array}{lll} 1 & 8 & 18 \\ 2 & 9 & \\ 3 & 12 & 24 \\ 4 & 16 & \\ 6 & & \end{array}\right.$ 11 вариантов ×

$y = 17$ $f(x) < 4$ — 21 вариант ×

$y = 19$ $f(x) < 4$ 21 вариант ×

$y = 22$ $f(x) < 2$ 19 вариантов ×

$y = 23$ $f(x) < 5$ 23 варианта ×

$(f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) =$
$= f(x) - 1$
для $y = 13$
аналогично остальные

итого: 95

Ответ: 95

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Значит, решение системы из ур-ий 1 и 4 таково:
$(4;1)$, $(-\sqrt{2,5}; -\sqrt{2,5})$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=4\\ y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-\sqrt{2,5}\\ y-1=-\sqrt{2,5}\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2-\sqrt{2,5}\\ y=1-\sqrt{2,5}\end{cases}\end{array}\right.$$

– входит в ОДЗ пара чисел ~~входит в ОДЗ~~

– пара чисел входит в ОДЗ

т.к. $\sqrt{2,5}>0$, то $2-\sqrt{2,5}<2$

$1-\sqrt{2,5}<1$

Ответ: $(6;2)$, $(2-\sqrt{2,5}; 1-\sqrt{2,5})$.

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \qquad \text{ОДЗ}: x^2+18x>0$$

$x(x+18)>0$

Значит, на ОДЗ $|x^2+18x| = x^2+18x$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2-18x-(x^2+18x)^{\log_{12}13}\geqslant 0$$

$$(x^2+18x)^{\log_{12}13} = 12^{\log_{12}(x^2+18x)^{\log_{12}13}} = 12^{\log_{12}(x^2+18x)\cdot\log_{12}13} = 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

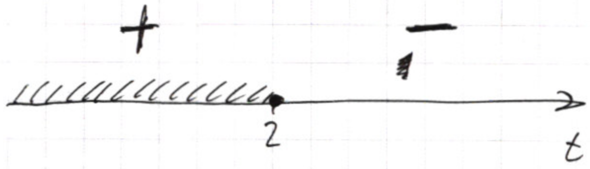
Неравенство приобретает следующий вид:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2-18x)}\geqslant 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

Пусть $\log_{12}(x^2+18x)=t$

$5^t+12^t \geqslant 13^t$ $\qquad f(t)=5^t+12^t-13^t=0$

$t=2$ – корень, больше корней нет



$f(3)=125+1728-2197$

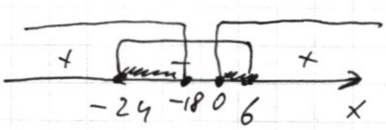
$f(3)<0$

$f(1)=5+12-13=4$, $f(1)>0$

$\log_{12}(x^2+18x)\leq 2$

$x^2+18x\leq 144$ $\qquad x^2+18x-144=0$

$x^2+18x-144\leq 0$ $\qquad D=900 \quad \sqrt{D}=30$



$x_1=\frac{-18+30}{2}=6$

$x_2=\frac{-18-30}{2}=-24$

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (4) \end{cases}$$

1) $$\begin{cases} (a-2b)^2=(\sqrt{ab})^2 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 & (2) \\ a\geq 2b & (3) \end{cases}$$

2) $a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a_1=\frac{5b+3b}{2}=4b \qquad a_2=\frac{5b-3b}{2}=b$

~~подходит в 1ур~~

4) Если $a=4b$

$16b^2+9b^2=25$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Если $a=b$

$b^2+9b^2=25$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{2,5} \\ a=\sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} b=-\sqrt{2,5} \\ a=-\sqrt{2,5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставим в систему из ур-ий (1) и (4)

$(4;1)$:

$4-2\cdot 1=\sqrt{4\cdot 1}$ – верно

$(-4;-1)$: $-4+2\cdot 1=\sqrt{4\cdot 1\cdot(-1)^2}$ – не верно

$(\sqrt{2,5};\sqrt{2,5})$: $\sqrt{2,5}-2\sqrt{2,5}=\sqrt{(\sqrt{2,5})^2}$ неверно

$(-\sqrt{2,5};-\sqrt{2,5})$: $-\sqrt{2,5}+2\sqrt{2,5}=\sqrt{(-\sqrt{2,5})^2}$ верно

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)+$

№2

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (1) \end{cases}$

1) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9-13=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2=5$ $\quad 3y-3=5$

$x_m=7$ $\quad y_m=\frac{8}{3}$

$x-2=-5$ $\quad 3y-3=-5$

$x=-3$ $\quad y=-\frac{2}{3}$

2) $x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$x-2y=(x-2)-2(y-1)=$

$=x-2-2y+2=$

$\begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$ $\quad 2y\leq x$ $\quad y\leq\frac{x}{2}$

~~$4y^2-5xy$~~ $\quad 4y^2-(2+5x)y+x^2+x-2=0$ $\quad x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$D=4+20x+25x^2-$ $\quad x^2-5xy+x+4y^2-2y-2=0$

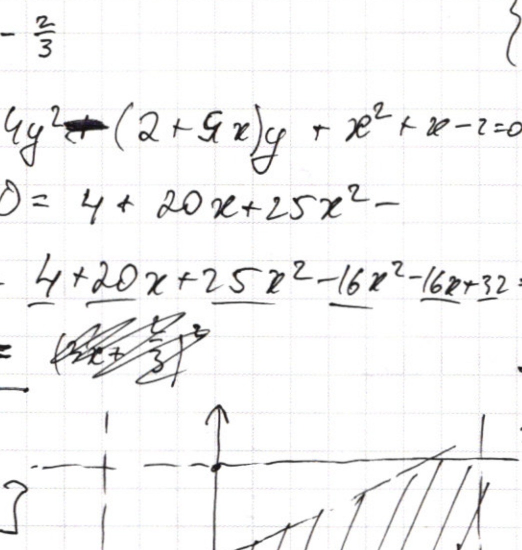
$-16(x^2+x-2)=4+20x+25x^2-16x^2-16x+32=$ $\quad x^2+(1-5y)x+4y^2-2y-2=0$

$=9x^2+4x+36=$ ~~$(3x+\frac{2}{3})^2$~~

$D=(1-5y)^2-4(4y^2-2y-2)=$

$x\in[-3;7]$

$y\in[-\frac{2}{3};\frac{8}{3}]$



$=1-10y+25y^2-16y^2+8y+8=$

$=9y^2-2y+9$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№1

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$(\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{5})$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(1-2\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$- \begin{cases} \underline{2\sin\alpha\cos\alpha} - 4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + \underline{2\sin\beta\cos\beta} - 4\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \underline{2\sin\alpha\cos\alpha} - \underline{4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 2\beta} + \underline{2\sin 2\beta\underbrace{\cos 2\beta}_{1-2\sin^2\beta}} - \underline{4\sin 2\beta\cos 2\beta\sin^2\alpha} + \underline{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$-4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 2\beta + 2\sin\beta\cos\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha -$

$- 4\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha - 4\sin\beta\cos\beta + 8\sin\beta\cos\beta\sin^2\beta + 8\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha -$

$- 16\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha\sin^2\beta = \frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt5}$

$4\sin\alpha\cos\alpha(-\sin^2\beta + \sin^2 2\beta)$

$2\alpha = a \qquad 2\beta = b$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(\underbrace{a+2b}_{a+b+b}) + \sin a = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad \cos(a+b) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$\sin(a+b)\cos b + \sin b\cos(a+b) + \sin a = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos b + \sin b \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \sin a = -\frac{4}{5}$

$-\cos b + 2\sin b + \sin a = -\frac{4}{5}$

№5

$x > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$\frac{x}{y} <$

Пусть $\frac{x}{y}$ – простое

$\frac{x}{y} > 0$

$\frac{x}{y}$ – не простое, а составное

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$\frac{x}{y}$ max $= 24$

min $= \frac{1}{24}$

$f(2) = 0$

3	0	13	3
5	1	17	4
7	1	19	4
11	2	23	5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(15)=1$ $f(10)=1$ x – нат

$f(21)=1$ $f(14)=1$ y – нат

$f(6)=0$ $f(22)=2$

1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $y=1 \to f(\frac{1}{y})=1$

Если $f(\frac{1}{y})$, 0 то иначе 0

$f(\frac{x}{y}) = f(x) < 0$ – невозможно

значит, $y=1$

$f(x) = f(x)+1$ $f(x\cdot 1) = f(x)+f(1)$ $f(1)=0$

~~$f(x)$~~ = невозможно

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $\frac{1}{24} \le \frac{1}{y} \le 1$

~~$f(\frac{x}{y}) = f(x) < 0$ нет~~

~~Если $y=1$ $f(1)=0$~~

~~$f(x) = f(x)$~~

Если $y=1$ $f(\frac{x}{y}) = f(x) < 0$ – таких нет

$y \ne 1$: $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(x) \ge 0$

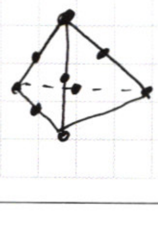
$f(\frac{2}{2y}) = f(2) + f(\frac{1}{2y})$

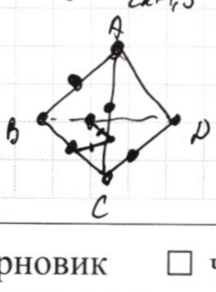
$f(\frac{2}{4y}) = f(2) + f(\frac{1}{4y})$

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad (a;b)-? \qquad [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} = 3+\frac{1}{2x+1,5} = 3+\frac{1}{2(x+\frac{3}{4})} = 3+\frac{0,5}{x+\frac{3}{4}}$$





при $a<0$

$b \le \frac{11}{4}a+5$

$\cancel{k}$ $k(-\frac{11}{4}) = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

$f(-\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}a+b$ $\qquad b \le \frac{11}{4}a+5 \qquad -\frac{3}{4}a > \frac{11}{4a}$

Док-ть: $-\frac{3}{4}a+b \geq \frac{11}{4}$ $\qquad b \le -\frac{3}{4}a+5$

$a<0$ всегда верно $-\frac{3}{4}a \geq b-5$

$b<5$ $\qquad -\frac{3}{4}a+b \geq 2b-5$

$-\frac{3}{4}a \geq 0$

$\cancel{-\frac{3}{4}a+b}$

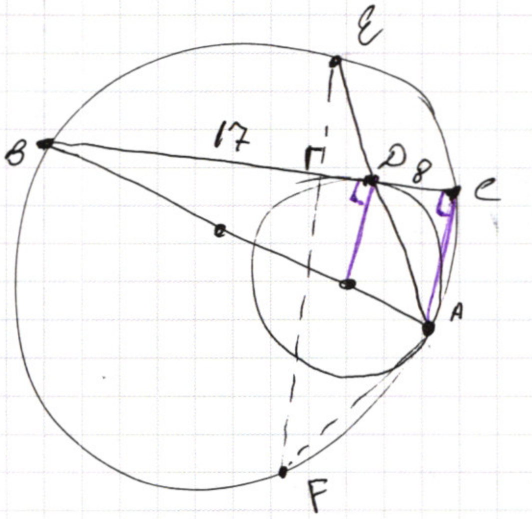
$\frac{11}{4}-b<0$

$2b-5 \le -\frac{3}{4}a+b$

$-15 \le -\frac{3}{4}a+b$

$\frac{\cancel{25}^{5}\cdot 17}{\cancel{30}6} = \frac{85}{6}$

№ 4



$1120+36$

$1156-256$

900

$R-?$ $\quad r-?$

$\angle AFE-?$

S $AEF-?$

$CD=8 \quad BD=17$

$\frac{8+17}{17} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{17}$

$2R\cdot 17 = 25\cdot 2R - 25r$

$\frac{8\cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$ $\qquad 25r = 8\cdot 2R$

$25r = 16R$

$AC^2 = 4R^2 - 25^2$

$\frac{AC}{r} = \frac{25}{17} \Rightarrow AC = \frac{25r}{17}$

$R = \frac{25}{16}r$

$R^2 = \frac{25^2}{16^2}r^2$

$4R^2 = \frac{4\cdot 25^2}{16^2}r^2$

$\left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 = \frac{4\cdot 25^2}{16^2}r^2 - 25^2$

$\frac{r^2}{17^2} = \frac{4}{16^2}r^2 - 1$

$r^2\left(\frac{4}{16^2} - \frac{1}{17^2}\right) = 1$ $\qquad \frac{4\cdot 289 - 256}{16^2\cdot 17^2} = \frac{900}{16^2\cdot 17^2}$ $\qquad r\cdot\frac{30}{16\cdot 17} = 1$

$30r = 16\cdot 17 \qquad r = \frac{8\cdot 17}{15}$

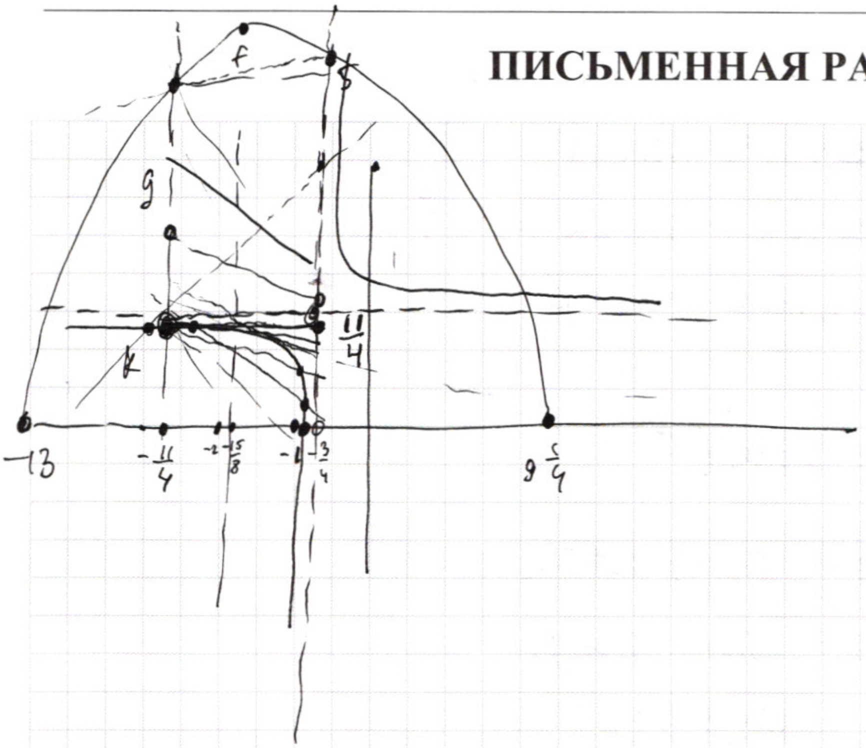
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-8x^2-30x-17$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$y_0 = -8\cdot\left(+\frac{15}{8}\right)^2 + 30\cdot\frac{15}{8_4} - 17 =$

$= -\frac{225}{8} + \frac{2\cdot 225}{8} - 17 =$

$= \frac{225-17\cdot 8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$

$\frac{D}{4} = 225 - 8\cdot 17 = 225 - 136 = 89$

$\frac{\sqrt{D}}{2} = 89 \quad \sqrt{D} = 89\cdot 2$

$x_{12} = \frac{30 \pm 89\cdot 2}{2\cdot -8} = \frac{15\pm 89}{-8}$

$x_1 = -\frac{104}{8} \quad x_2 = \frac{74}{8}$

$-\frac{52}{4} = -13 \quad x_2 = 5 + \frac{17}{4} = 9\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le g\left(-\frac{11}{4}\right) & -\frac{11}{4}a + b \le -8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le g\left(-\frac{3}{4}\right) & -\frac{3}{4}a + b \le -8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 30\cdot\frac{3}{4} - 17 \\ \frac{12x+11}{4x+3} = ax+b \text{ — нет реш. при } x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{12x+11} = 0$

$12x+11-4ax^2-3ax+4bx+3b=0$

$-4a\,x^2+(4b-3a+12)x+3b+11=0$

$ax+b \geq \frac{12x+11}{4x+13} \quad a>0$

$a\geq 0: F\left(-\frac{11}{4}\right) \geq k\left(-\frac{11}{4}\right)$

$a<0:$

$a\geq 0: -\frac{11}{4}a + b \geq \frac{12\cdot -\frac{11}{4}+11}{4\cdot -\frac{11}{4}+3}$

$-\frac{11}{4}a + b \geq \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4} \quad |\cdot 4$

$-11a+4b \geq 11$

$4b \geq 11a+11$

$b \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$

$-11a + 4b \le -8\cdot\frac{11^2}{4} + 30\cdot 11 - 17\cdot 4$

$-11a+4b \le -242 + 330 - 68$

$-11a+4b \le 20$

$4b \le 20+11a$

$b \le 5 + \frac{11}{4}a \quad b \le 2\frac{3}{4}a+5$

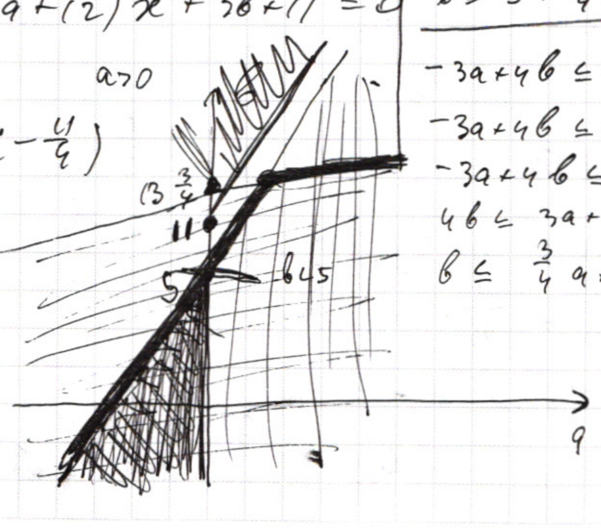
$-3a+4b \le -8\cdot\frac{9}{4} + 30\cdot 3 - 17$

$-3a+4b \le -18+90-17$

$-3a+4b \le 55$

$4b \le 3a+55$

$b \le \frac{3}{4}a + 13\frac{3}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad = \sin(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cos\alpha \cos 2\beta + (1-2\sin^2\alpha)\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta - 2\sin^2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha \cos 4\beta + 2\sin\alpha + \sin 4\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta$ — ?

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\underline{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)} = 2\sin\alpha\cos\beta$

$a = \alpha+\beta \qquad \alpha = \frac{a+b}{2}$

$b = \alpha-\beta \qquad \beta = \frac{a-b}{2}$

$\sin a + \sin\beta = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$= \begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4\cdot 2}{5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{4\cdot 2}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = -1$

$\sin 4\alpha = -1 \qquad 4\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \qquad \alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = x-2 \quad b = y-1$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$ (1)

1) $a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$ $\quad a - 2b \geq 0$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$ $\quad a \geq 2b$

$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$ $\quad \sqrt{D} = 3b$

$a = \frac{5b \pm 3b}{2}$ $\quad a_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 4b \\ b \end{array}\right.$

1) $a = b$

$10b^2 = 25$

$b^2 = 2,5$

$b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a = \pm\sqrt{2,5}$

2) $a = 4b$

$25b^2 = 25$

$b = \pm 1 \quad a = \pm 4$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 = \sqrt{2,5} \\ y-1 = \sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 = -\sqrt{2,5} \\ y-1 = -\sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 = 4 \\ y-1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 = -4 \\ y-2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2,5}+2 \\ y = \sqrt{2,5}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-\sqrt{2,5} \\ y = 1-\sqrt{2,5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 2. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2. \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

$-\sqrt{2,5}$

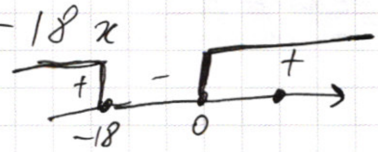
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2+18x)}} + \cancel{12^{\log_{12}}} \; 5^{\log_5 x^2} \geq$



$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq x^2-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\log_{12} x(x+18)}$

t^2-18t

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$12^{\log_{12}(x^2+18x)^{\log_{12}13}} = 12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}(x^2+18x)}$

$12^{\log_{12}5^{\log_{12}(x^2+18x)}} = 12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$= 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}-13^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq 0$ $\quad x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}+t \geq 0$

$\uparrow 5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t}\uparrow$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$ $\quad \log_{12}t=b$

$5^b+12^b \geq 13^b$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$f'(x) = 5^b\ln 5 \qquad 13^b\ln 13$

$g'(x) = 12^b\ln 12$

$(5^b+12^b)-13^b \geq 0$

$b=2$ – корень

$b\leq 2$

$5^{2b}+12^{2b} \vee$

$5^b+12^b=13^b$

17 13

$a\cdot 5+c\cdot 12=d\cdot 13$

$\frac{5}{13}a+\frac{12}{13}\cdot c \vee d$

$25a^2+144c^2+120ac$

$5^b+12^b \vee 13^b$

$5^{2b}+12^{2b} \geq 2\cdot 5^b\cdot 12^b$

$2\cdot 60^b \quad \vee 13^{2b}=169^b$

12 –12

3 –48

4 –36

$\frac{D}{4}=81+144=$

$=225$

$\frac{\sqrt{D}}{2}=15 \quad \sqrt{D}=30$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)