# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

ОДЗ: $x^2+6x>0$

т. к. $x^2+6x>0$, то $|x^2+6x|=x^2+6x$

известная формула, что ~~log~~ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 x^2+6x}+6x+x^2\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

~~Затем~~ Пусть $\log_4(6x+x^2)=t$, тогда $6x+x^2=4^t$

$3^t+4^t\geq 5^t$

(*) $\left(\frac{3}{4}\right)^t+1\geq\left(\frac{5}{4}\right)^t$

Заметим, что равенство выполнено при $t=2$

из (*) видно, что $\left(\frac{3}{4}\right)^t+1$ – убывает, а $\left(\frac{5}{4}\right)^t$ – возр.

Значит равенство достигается в одной точке, при $t<2$ этой точки убывающая ф-ция больше возрастающей, т.е. $t\leq 2$, а $\log_4 6x+x^2\leq 2$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ \log_4(6x+x^2)\leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right. \\ 6x+x^2\leq 16 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-6 \end{array}\right. \\ -8\leq x\leq 2 \end{cases}$

$-8\leq x<-6$ или $0<x\leq 2$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Составим таблицу значений для простых:

$f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$;

$f(13)=3$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$.

$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$; $f(8)=f(2\cdot 4)=0$

$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$; $f(9)=f(3\cdot 3)=0$

$f(10)=f(2\cdot 5)=f(2)+f(5)=1$; $f(12)=0$; $f(14)=1$

$f(15)=f(3\cdot 5)=f(3)+f(5)=1$; $f(16)=0$

$f(18)=0$; $f(20)=f(4)+f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$; $f(24)=f(3)+f(8)=0$;

$f(25)=2$; $f(26)=f(2)+f(13)=3$; $f(27)=0$

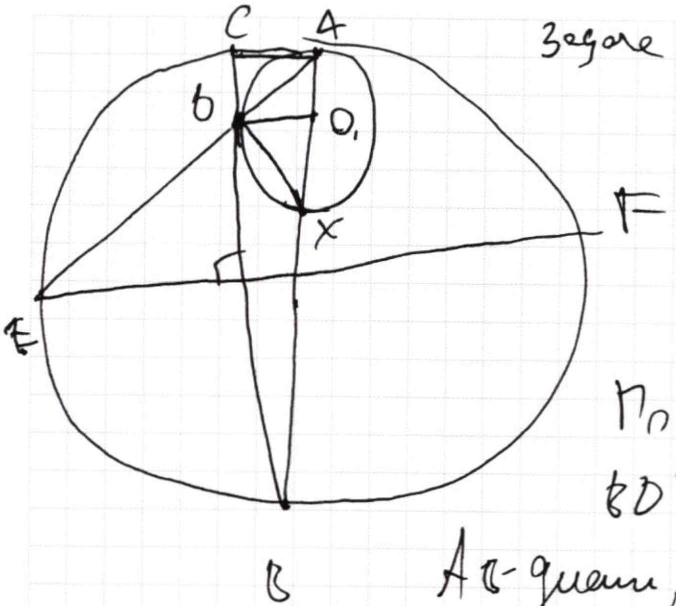
$f(\frac{1}{x})+f(x)=f(1)=0$; $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

Т.е. $f(\frac{x}{y})<0$ равносильно тому, что $f(x)<f(y)$

Из списка видно, что для для 10 $x$ 10 натурал от 3 до 27 $f(x)=0$, для 7 $x$ $f(x)=1$, для трёх $x$ $f(x)=2$, для двух $x$ $f(x)=3$, для двух $x$ $f(x)=4$ и для одного $f(x)=5$. Итого, для $x$ таких что $f(x)=0$ есть 15 значений $y$, для $x$, что $f(x)=1$ есть 8 значений $y$, для $x$, что $f(x)=2$ есть 5 значений $y$, для $f(x)=3$ есть 3 $y$, и для $f(x)=4$ есть 1 $y$.
Итого: $10\cdot 15+7\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=229$. Ответ: 229.

Задача 4




~~Пусть $AX=2r$~~,

$AX$ — диамет мень окруж., $AX = 2r$, $AB$ — больш., $AB = 2R$.

~~$BO_1 = 2R$~~. $BX = 2R - 2r$.

По теореме о секущ. и касат.:

$BD^2 = BX \cdot AB = 4R(R-r)$

$AB$ — диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \triangle O_1BD \sim \triangle ABC$.

$\frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD}$, $\frac{2R}{2R-r} = \frac{BC}{BD}$, $\frac{2R(BC-BD)}{BC} = r$, $\frac{5}{8}R = r$

$BD^2 = \frac{18}{9}R^2$, $R = \frac{3}{4}BD = \frac{39}{8}$, $r = \frac{5}{8}R = \frac{65}{24}$

$AC^2 = BA^2 - BC^2$, $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{AB^2 + CD^2 - BC^2} = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

$\angle AFE = \angle EBA = 90^\circ - \angle DAB$

$\sin\angle DAB = O_1D : AD = \frac{65}{24} : \frac{5}{4}\sqrt{13} = \frac{13}{6\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

$\cos\angle EF\cancel{A} = \cos\angle EBA = \sin\angle DAB$, $\angle AFE = \arccos\frac{13}{6\sqrt{13}}$

$\angle AEF = \angle DAC$; $\sin DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{6\sqrt{13}}$

По теореме синусов $AE = 2R \cdot \sin\angle EFA = \cancel{\frac{13\sqrt{21}}{8\sqrt{5}}} = \frac{13\sqrt{23}}{8}$

$EF = 2R \cdot \sin(180^\circ - \angle AEF - \angle EFA) = 2R\sin(\angle EFA + \angle AEF)$

$S = EF \cdot EA \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle AEF = AE \cdot 2R\sin(\angle EFA + \angle AEF) \cdot \sin\angle AEF$

~~$S = \frac{13\sqrt{21}}{8\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{21}+13}{30} \cdot \frac{13\sqrt{21}}{6\sqrt{5}} = \frac{163\sqrt{21}(\sqrt{21}+13)}{7290}$~~

$S = \left(\frac{\sqrt{23}+2\sqrt{13}}{6\sqrt{13}}\right) \cdot \frac{\sqrt{23}}{6} \cdot \frac{13\sqrt{23}}{8} \cdot \frac{39}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$f(x)=8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0.$

Т.к. нер-во должно выполнятся при всех $x \in [1;3]$, то функция слева не должна менять знак в этом пр. Это возможно, когда либо значения в точ. 1 и 3 меньше нуля, ~~либо когда $f(1),f(3)>0$, но верш. наход. за пределом $[1;3]$~~

$f(1)=4-a-b.$

$f(3)=-3a-b;$

~~$f(x_0)=17+\frac{a}{2}; x_0$ - вершин.~~

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(1)<0 \\ f(3)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(1)>0 \\ f(3)>0 \\ x_0>3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0<3 \\ f(1)>0 \\ f(3)>0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$, т.к. $x>1$, то $(2x-2)>0$

$4x-3 \geq 2ax^2+2bx-2ax-2b$

$g(x): 2ax^2-(2a+4-2b)x-2b+3 \leq 0.$

При $a>0$ условия совпадают с предыдущим, при $a<0$ вершина должна находится за границ. $[1;3]$ и при этом $g(1)$ и $g(3)<0$

$g(1)=$ ~~$4a+b$~~ $-1$

$g(3)=12a+4b-9$

$x_0=\frac{a+2-b}{2a}$ (Продолжение стр

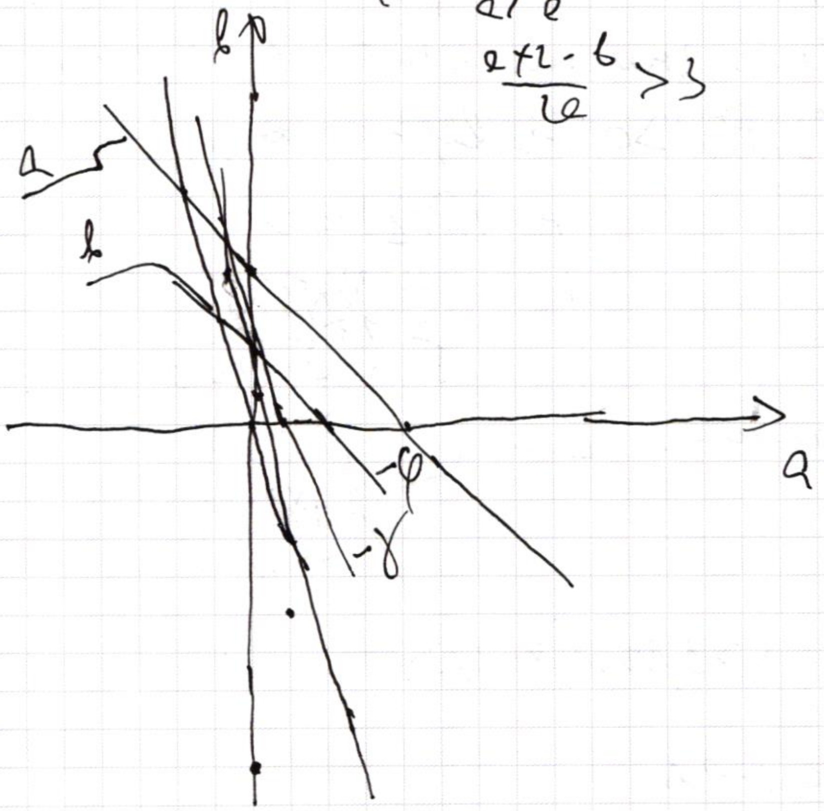
☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 6 (продолжение)

$$\left\{\begin{array}{l} 4-a-b<0 \\ -3a-b<0 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -1<0 \\ 12a+4b-9<0 \\ a>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -1<0 \\ 12a+4b-9<0 \\ a<0 \\ \frac{a+2-b}{2a}<3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -1<0 \\ 12a+4b-9<0 \\ a<0 \\ \frac{a+2-b}{2a}>3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b>4 \ (\alpha) \\ 3a+b>0 \ (\beta) \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 12a+4b-9<0 \ (\gamma) \\ a>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 12a+4b-9<0 \\ a+b<2 \ (\varphi) \\ a<0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 12a+4b-9<0 \\ a<0 \\ 2<5a+b \ (\theta) \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$




Из рисунка видно, что все значения $a, b$: $a+b>4$ и $a>0$ удовлетворяют условию. Также подходят те, которые имеют левей полупл. от $\theta$, $\gamma$ и выше $\alpha$, $\beta$.

Значит, подходят $a, b$:
$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a+b>4 \\ a>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a<0 \\ a+b>4 \\ 3a+b>0 \\ 12a+4b-9<0 \\ 2<5a+b. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

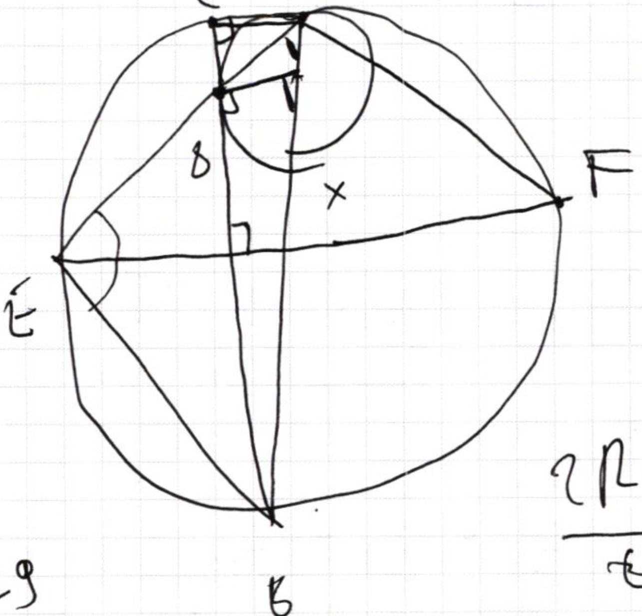
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$AC^2 = \left(\frac{39}{8}\right)^2 + 9^2$

~~BX~~

R

$AD^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{39}{8}\right)^2 + 9$

$2R \cdot (2R - 2r) = BD^2$

$4R^2 - 4Rr = BD^2$

~~(BD(CD) =~~

$BC = 9$

$\frac{2R - r}{BD} = \frac{BC}{2R}$ $\quad 2Rr = BD(BC - BD)$

$\frac{25}{4} + \frac{39}{4} \vee 9$

$\frac{BD}{BC} = \cancel{2Rr}$

$BD \cdot BC = 4R^2 - 2Rr \quad \cdot 9 + \frac{3}{4}$

$9 \cdot 13 \cdot 4 =$

$BD \cdot CD = 2Rr \quad \cancel{8} 4R$

$36 \cdot 13 =$

$\frac{65}{8} = Rr \qquad r = \frac{65 \cdot 8R^2}{8R} =$

$360 - 108 =$

$= 252 - 65 =$

$= 187.$

$4R^2 - \frac{65}{8} = BD \cdot BC$

$2R(BD - BC)$

$32R^2 = 8BDBC - 65 \qquad 2R(BC - \cancel{BD}) = r$

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R - r}{2R}$

$R = \frac{\sqrt{187}}{16\sqrt{2}}. \qquad r = \frac{65\sqrt{2}}{\sqrt{187}}$

$BD^2 \cdot BC = 4R(R - r)$

$\frac{BC}{BD} = 9 \cdot \frac{15}{2} = \frac{3}{2}.$

$\frac{13}{18} = \frac{2R - r}{2R}$ $\quad \frac{26}{9} R \quad \frac{5}{9}R = r.$

3

$BD^2 = \frac{26}{9} R^2 \quad \frac{4}{7} \quad \cancel{BD} \qquad R = \frac{3}{4} \quad BD = \frac{39}{8}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2 \cdot R \cdot \frac{5}{2}}{9}$ $\quad \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{3}$ $\qquad r = \frac{65}{\cancel{8}4} \quad \frac{5}{9}$

$\frac{1}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left(\frac{39}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 9^2 = \left(10 - \frac{1}{4}\right)^2 = 100 - 5 + \frac{1}{16} - 81 - \frac{25}{5} =$

$2\alpha + 3\beta)\ 2\beta$

$= 19 - 5 - 6 = 8 \quad 8 + 8 - \frac{3}{16} = \frac{8 \cdot 16 - 3}{16} =$

~~Sin~~

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\quad = \frac{128 - 3}{16} = \frac{5^2 \cdot 5}{4^2}$

~~$\sin \alpha + \beta$~~

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\beta}$ $\quad \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(\alpha + 2\beta) + \sin\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\cdot S = ab \sin \alpha =$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

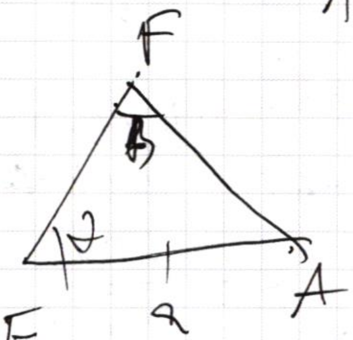
~~$AE =$~~ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{AE}{\sin}$ $\quad \frac{AE}{AB} = \sin \angle EBA \quad \sin(\alpha + \beta)\cos\beta + \sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos\beta + \frac{4}{\sqrt{17}} \sin + \sin\alpha = -\frac{8}{17}$.

$AE = AB \cdot \sin \angle EBA$

~~$\sin \alpha +$~~



$\frac{39}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{6\sqrt{5}}$ $\quad \sin AFE = \frac{\sqrt{21}}{6\sqrt{5}}$

$\sin \angle AEF = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$EF = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta)$

$S = \underline{2R \sin(\alpha + \beta) \cdot EA} \cdot \sin\alpha$.

$\sin EFA \cos AEF$

$\frac{\sqrt{21}}{6\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{13}{6\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{21} + 13}{30} \cdot 13\sqrt{21}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

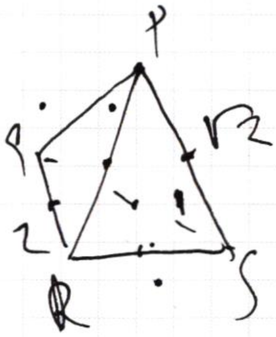
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$

$3y-2x = \sqrt{3xy}$



$3^t$

$6x+x^2 < 16$

$\log_4 t = 2$

$x^2+6x-16<0$

$t = 4^2$

$x=-8$

$8x^2-54x+30-ex-e$

$x = 2.$

$8x^2-(34+e)x+30-e$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$x_0 \in (1;3)$ $f(1)<0$

$f(3)<0$

$t=2$

$(3y-2)(x-1)>0$

$\cancel{x>1}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^t + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^t$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$x$ $1$ $3$ $x_0$

$9y^2-15xy+4x^2-4x-3y-2=0$

$9y^2-4y+12$

$\frac{4x-3-(ax+e)(4x-4)}{2x-2}<0$

$-2ax^2+2bx+2ax-2b+4x-3$

$9-12a-4b>0$

$12-3-(3a-e)4=12$

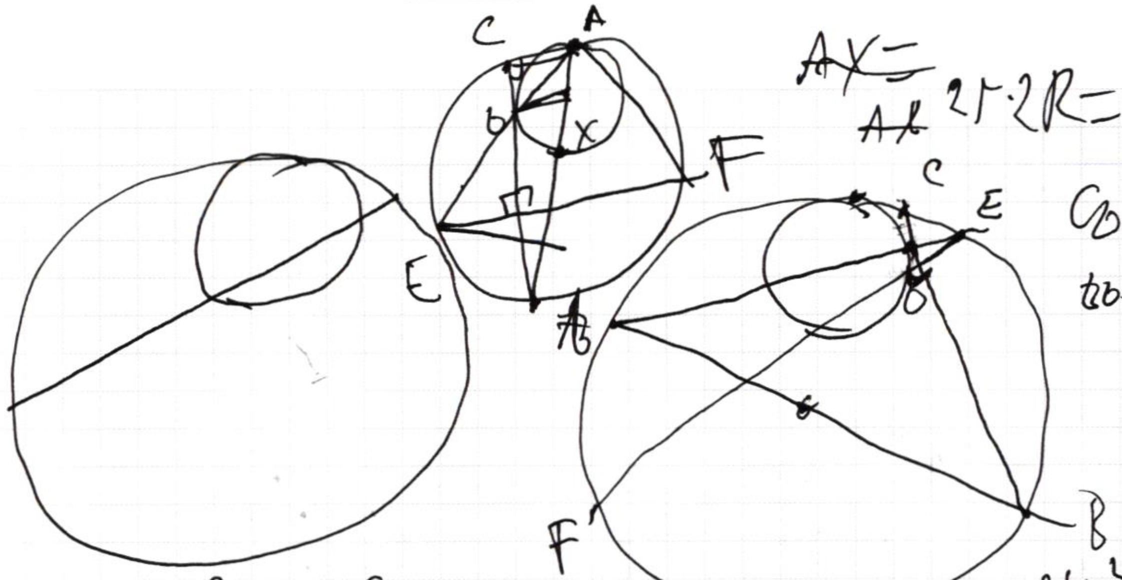
$-2ax^2+(4+2a+2b)-2b-3$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)




~~AX =~~ AX $2r\cdot 2R = bb^2$

$Cb = \frac{r}{2}$

$bb = \frac{13}{2}$

$34\cdot 3 = 10^2$

$r^2 \cancel{+ bb^2}\ bb^2 = (2R-r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr$

$\sin(2\alpha + 2B) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$ $\quad y^2 - 2x$

$72 - 34\cdot 3 - 3a + 3a - b$

$+ 10a = 0$

$\cancel{3y}\ 3y - 2$

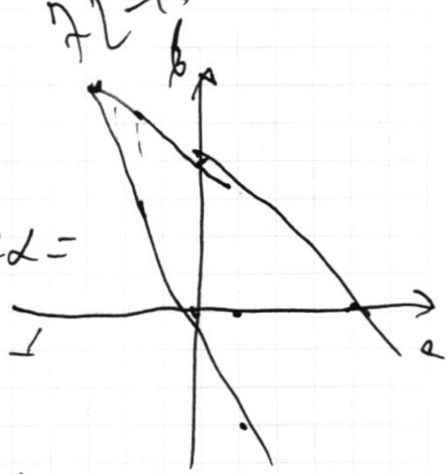
$72 - 10^2$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 4B) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha \cos 4B + \cos 2\alpha \sin 4B + \sin 2\alpha =$

$\sin 2\cos(\alpha + 2B) + \cos 2\sin(\alpha + 2B) = -1$




$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2B + \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2B + \sin 2\alpha$

$\frac{4x-3}{2}$ $\quad 4x - 3 - (2x-2)(ax+b) =$

$= 4x - 3 - 2ax^2 - 2bx + 2ax$

$+2b =$

$= -2ax^2 + (2a - 2b + 4)x$

$+2b - 3$

~~$3(x^k - 1)^2 + 3$~~

$x(3y-2) - (3y-2) = (x-1)(3y-2)$

$9y^2 - 12xy + 4y^2 = 3xy - 2x + 2 - 3y$

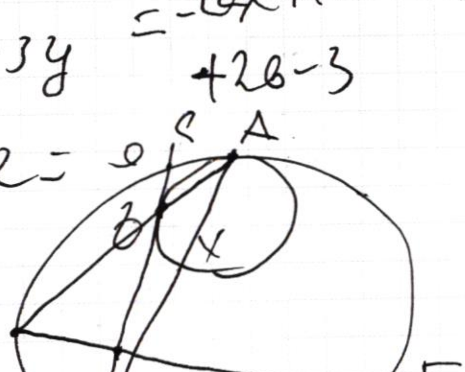
$9y^2 - 15xy + 4y^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$bb^2 = bx\cdot Ab$.

$Ab\cdot Eb = Bb\cdot Cb$.

$12a + 4b - 9$

$2a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{2}$.




☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}$ $\quad \frac{23}{52}\vee\frac{4}{9}\ \frac{26}{45}.$

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{6}+\frac{\sqrt{23}}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{13}}$

$\cos\beta=\frac{\sqrt{13}}{6}$ $\quad 36-13=23$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=1$ $\quad \frac{\sqrt{23}}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{23}}{\sqrt{13}}$

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}.$

$3(x-1)^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$ $\quad =\frac{1}{3}+$

$\left(10-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}-81=$

$3y^2-4y-\cancel{4}$

$\cancel{3x^2-6x+3+3y^2-4y=7}$

$=100-5+\frac{1}{16}+6+\frac{1}{4}-81$

$20+\frac{5}{16}=\frac{325}{16}$

$\frac{23}{52}\vee\frac{4}{9}$ $\quad AB=\frac{39}{4}=\left(10-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}-81=\frac{25\cdot13}{16}.$

$23\cdot9=207\quad 208$

$100-10\cdot2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{25}{4}-81$

$100-5-81+6=8$ $\quad 20+\frac{5}{4}=\frac{85}{4}.$

$100-80\quad \frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.=9+\frac{1}{4}=\frac{37}{4}$

$\frac{39}{4}\cdot\frac{\sqrt{26}}{6}=\frac{13\sqrt{26}}{8}$ $\quad \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{13}=\frac{2}{\sqrt{13}}\quad\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{13}}$

$\left(\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{23}{52}}\right)\cdot\frac{\sqrt{23}}{6}\cdot\frac{13\sqrt{23}}{8}\cdot\frac{39}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$   $150+56+15+6+2$

$206+23=229$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\cancel{3(x-1)}^2$

$f(\frac{8}{15})+f(15)=f(8)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$   $-1$   $1$

$f(p)=\left\{\frac{p}{4}\right]$

$3\le x\le 27$

$3\le y\le 27$

$f(\frac{x}{y})<0$

$f(2\cdot 2)=0$

$f(2\cdot 3)=0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 11 | 2 | 21 | 1 |
| 2 | 0 | 12 | 0 | 22 | 2 |
| 3 | 0 | 13 | 3 | 23 | 5 |
| 4 | 0 | 14 | 1 | 24 | 0 |
| 5 | 1 | 15 | 1 | 25 | 2 |
| 6 | 0 | 16 | 0 | 26 | 3 |
| 7 | 1 | 17 | 4 | 27 | 0 |
| 8 | 0 | 18 | 0 | | |
| 9 | 0 | 19 | 4 | | |
| 10 | 1 | 20 | 1 | | |

$f(7)=1$

$f(11)=2$   $f(13)=3$;   $f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$.

$f(0)=2f(0)$   $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$

$f(0)=0$   $f(1)=0$

$f(1)=2f(1)$   $f(4)=f(1)+f(4)$

$f(1)=0$   $f(4)=2f(2)$   $f(\frac{1}{x})=-f(x)$

$f($   $f(x^2)=2f(x)$

$\cancel{f[2]}$   $f[3]=0$   $\cancel{f(\frac{1}{2})\cdot f}$

$f(2)=f$   $f(5)=1$   $f(1)=f(\frac{1}{2})+f(2)=0$

$f(2)=0$; $f(4$

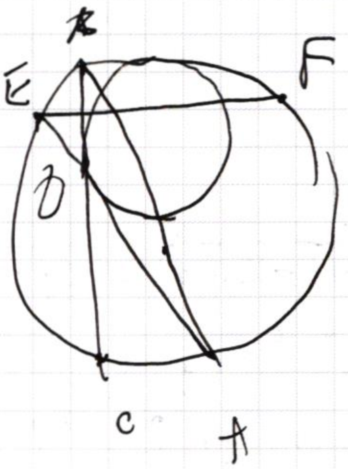
$\cancel{f(\frac{8}{15})=f(8)}$   $f(\frac{1}{x})+f(x)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)




$4x^2-17x+15$ $\quad \frac{17\pm 7}{8};\ 3$

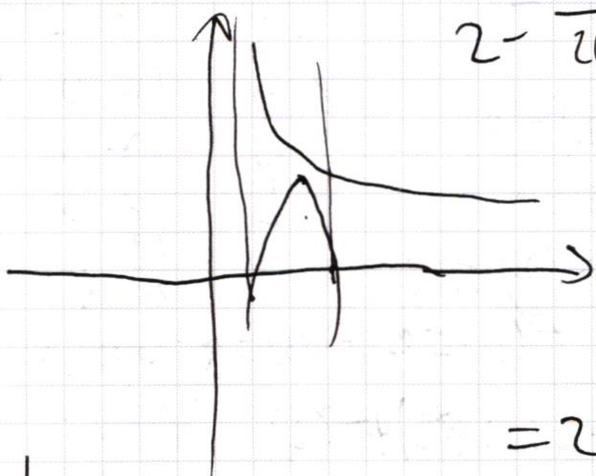
$D=289-240=49$

$8x^2+34x+30$ $\quad \frac{17}{8}\ \frac{10}{8}$

$$\frac{4x-5}{2x-2}=\frac{(4x-4)+1}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$$

$$2+\frac{2x-1}{2x-2}=\cancel{8}-\frac{1}{2x-2}$$

$$2-\frac{1}{2(x-2)}$$



$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(90^\circ-\alpha)+\cos(90^\circ-\beta)=$

$=2\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cancel{\sin}\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2})$

$2+\frac{1}{2x-2}\geqslant ax+b$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(\alpha+2\beta)\cos 2\beta=\frac{4}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)