

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ . Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$x \neq 1$$

уб.

$$f_1(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$f_2(x) = 8x^2 - 34x + 30 = 2(4x^2 - 17x + 15)$$

график $f_2(x)$ - парабола ветвями вверх
точки пересечения с осью абсцисс

$$2(4x^2 - 17x + 15) = 0$$

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

$$D = 289 - 4 \cdot 15 \cdot 4 = 49$$

$$x_1 = \frac{17+7}{8} = 3$$

$$x_2 = \frac{17-7}{8} = 1,25$$

$$f_2(1) = 8 - 34 + 30 = 4$$

$$f_1 = 4 \text{ при } x = 1,25$$

$$f_3(x) = ax + b$$

график - прямая

не выше касательной к

графикам $f_1(x)$ и не

ниже прямой $a \mid (1; 4)$ и

$(0; 0)$ лежит на a^*

a^* - график функции $f_4(x)$

$$4 = a \cdot 1 + b \Rightarrow 2a = -4, a = -2 \Rightarrow b = -3a = 6$$

$$0 = a \cdot 3 + b$$

$$-2x + 6 = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

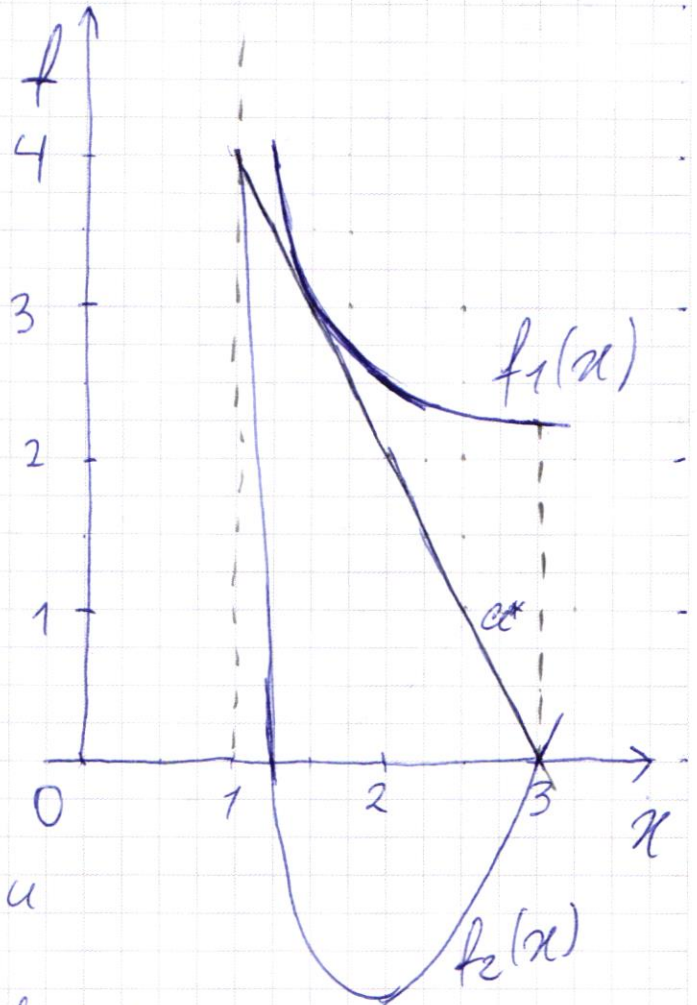
$$12(x-1) = 4x(x-1) + 4(x-1) + 1$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x-3)^2 = 0$$

единств. общая точка
 $x = 1,5, a^*$ и есть
касательная

Ответ: $a = -2, b = 6$



$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

пусть $x^2+6x=a$, т.к. есть $\log_4 a$, $a > 0$

$$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$$

$$(4^{\log_4 3})^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$$

$$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$$

$$a \geq a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3}$$

$$4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a}$$

$$a \geq a^{\log_4 3} (a^{\log_4 5 - \log_4 3} - 1) \text{ если } 4^{\log_4 a} = 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a}$$

$$a \geq a^{\log_4 3} (a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1)$$

то $\log_4 a = 2$, $a = 16$,

$$a^{1-\log_4 3} \geq a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1$$

если $a > 16$, то $\log_4 a > 2$,

$$1 \leq a^{1-\log_4 3} - a^{\log_4 5 - \log_4 3}$$

$$4^{\log_4 a} < 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a}$$

если $a < 16$ то $\log_4 a < 2$,

$$4^{\log_4 a} > 5^{\log_4 a} - 3^{\log_4 a} \text{ (например, при } a=4 \text{)}$$

это можно доказать через производные, но подобрать, что при равенстве $\log_4 a = 2$, проще.

$$0 < a \leq 16$$

$$0 < x^2 + 6x \leq 16$$

$$0 < x(x+6) \leq 16$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x > 0 \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \end{cases}$$

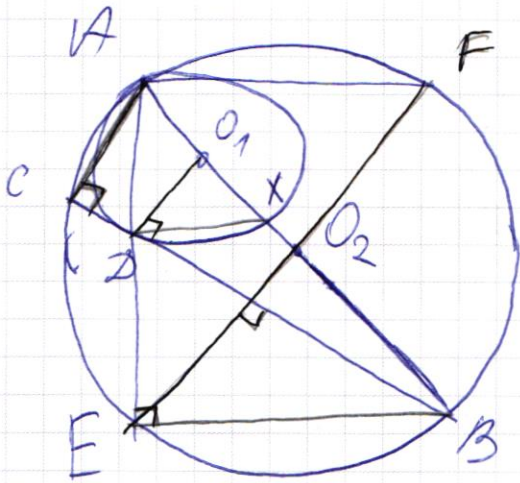
$$(x+3)^2 - 25 \leq 0$$

$$(x+8)(x-2) \leq 0$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-8; 2] \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$



УЧ.

1) т.к. AB - диаметр Ω , то и диаметр ω (перп. к общей касательной через т. A)

2) т.к. AB - диаметр Ω , $\angle ACB = 90^\circ$ ($\triangle ABC$ - прямой.

треуг., вписанный в Ω), поэтому $AC \parallel O_1D$ (AC - касательная, O_1D - радиус)

3) треугольнички $BD O_1$ и ABC подобны, $\angle ABC$ - общий, а $AC \parallel O_1D$

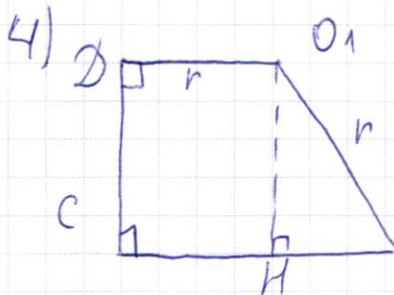
$$\frac{AB}{O_1B} = \frac{CB}{DB} = \frac{CD+DB}{DB} = \frac{5+13}{13} = \frac{18}{13}; \quad AB = 2R, \quad O_1B = 2R - r$$

$$13 \cdot 2R = 18 \cdot 2R - 18r$$

$$13R = 18R - 9r$$

$$9r = 5R$$

O_1 - центр ω , O_2 - центр Ω ,
 R - радиус Ω , r - радиус ω
($X = \omega \cap \Omega$)



$$O_1A = O_1D = r$$

$$O_1H = CP = \frac{5}{2}$$

$$AH = AC - r = \frac{18}{13}r - r = \frac{5}{13}r$$

по т. Пифагора (в $\triangle O_1HA$)

$$r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 r^2$$

$$r^2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$r \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{2} \Rightarrow r = \frac{65}{24}, \quad \text{тогда } R = \frac{9}{5}r = \frac{13 \cdot 9}{24} = \frac{39}{8}$$

5) из $\triangle ACD$ $AD = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{13} \cdot \frac{65}{24}\right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

6) $\triangle ADX$ и $\triangle BEA$ - т.к. прямоугольные (отражены на диаметры ω и Ω), они подобны,

$O_1,$
 $O_2,$
 $r,$
 R

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle DAX$ - острый, DX и BE - перпендикулярны к одной прямой, AE .

$$\frac{AE}{AD} = \frac{R}{r} = \frac{9}{5}, \quad AE = \frac{9}{5} AD = \frac{9}{5} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{4} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

7) т.к. $EF \perp BD$, $EF \parallel O_1D$, потому что треугол. AO_1D и EAO_2 - подобные

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_1}{AO_2} - \text{это доказывает, что } EF$$

проходит через O_2 , $EF = AB$, EF - диаметр

8) т.к. EF - диаметр, $\triangle FAE$ - прямоугольный,
 $\cos \angle AFE = \sin \angle AFE = AE : EF = \frac{9\sqrt{13}}{4} : (2R) = \frac{9\sqrt{13}}{4} : \frac{2 \cdot 39}{8} =$
 $= \frac{9\sqrt{13}}{4} : \frac{39}{4} = \frac{9\sqrt{13}}{39}, \quad \angle AFE = \arcsin \frac{9\sqrt{13}}{39}$

9) $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EF \cdot \sin \angle AEF$ по т. Пифагора

$$AF = \sqrt{\frac{39^2}{8^2} - \frac{81 \cdot 13}{16}} = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9^2 - 13^2 \cdot 9^2 \cdot 4}{8}} = \frac{9}{8} \sqrt{13 \cdot (13 - 4)} = \frac{27\sqrt{13}}{8}$$

потому $\angle AFE = \arcsin \frac{9\sqrt{13}}{39}$

$$10) S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{27\sqrt{13}}{8} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 27}{64} =$$

$$= \frac{3159}{64}$$

Ответ: радиусы $\frac{65}{24}$ и $\frac{39}{8}$, $\angle AFE = \arcsin \frac{9\sqrt{13}}{39}$

$$S_{AEF} = \frac{3159}{64}$$

У2.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \\ 3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 - 3 - \frac{4}{3} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3xy - 2x - 3y + 2 &\geq 0 \\ x(3y-2) - (3y-2) &\geq 0 \\ (x-1)(3y-2) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{8}{9}$$

$$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$$

графически это окружность с центром $(1, \frac{2}{3})$ и радиусом $\frac{\sqrt{8}}{3}$, а с учётом ОДЗ - две дуги по $\frac{1}{4}$ окружности

$$4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y = 2$$

$$\cancel{(3y-2)^2} + 15y - 4 + 4(x-1)^2$$

$$(3y-2)^2 + 15y - 4 + 4(x-1)^2 + 10x - 4 - 15xy = 2$$

$$(3y-2)^2 + 4(x-1)^2 = 10 - 10x - 15xy$$

$$(3y-2)^2 + 4(x-1)^2 = -5(3y-2)x - 5(3y-2)(x-2)$$

пусть $a = y - \frac{2}{3}$, $b = x - 1$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{8}{9} \\ 9a^2 + 4b^2 = -5(a(b+1) - 2) \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{8}{9} - b^2$$

$$9a^2 + 4b^2 = -5(a(b+1) - 2)$$

$$8 - 5b^2 = 10 - 5ab - 5a$$

$$\frac{0,16 + b^4 + 0,8b^2}{(b+1)^2} + b^2 = \frac{8}{9}$$

$$8 - 5b^2 = 5(2 - a(b+1))$$

$$2 - a(b+1) = \frac{8}{5} - b^2$$

$$a(b+1) = \frac{2}{5} + b^2$$

$$2b^4 + 0,8b^2 + 0,16 + 2b^3 + b^2 = \frac{8}{9}(b^2 + 2b + 1)$$

$$18b^4 + 18b^3 + 0,2b^2 - 16b + 0,44 = 0$$

$$9b^4 + 9b^3 + 0,1b^2 - 8b + 0,22 = 0$$

$$a = \frac{0,4 + b^2}{b+1}$$

($b = -1$ не явл. решением)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(xy) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \quad \omega 5.$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$$

простые числа	3	5	7	11	13	17	19	23
знач. f	0	1	1	2	3	4	4	5

(8 знач.)

всего пар натуральных чисел от 3 до 27 ~~125~~

$\frac{x}{y}$ не явл. простым числом ²⁵ 25

при $x \neq y$ x - простое (любое знач.)

или $\frac{x}{y}$ где $x = ky$, k - не составное

или x не делится на y нацело

($x < y$)

$\frac{x}{y}$ - простое число, если

~~x 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18~~

~~x 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18 20 21 22 24 25~~

~~y 2 3 4 3 5 3, 4 4 3, 5 4, 8~~

~~x 26 27 7~~

x	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25	26	27
y	-	3	3	5	4, 6	7	3, 5	8	6	9	4	3	11	8	5	13	9

2 варианта x и y

$$125 - 21 = 104; \quad \cancel{104}$$

когда x - простое пар x и y $8 \cdot 25 = 400$

когда $y > x$ (x - составное)

1 - не явл. простым числом

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \neq 1$$

уб.

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 1190 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\frac{17}{8} = 2,125$$

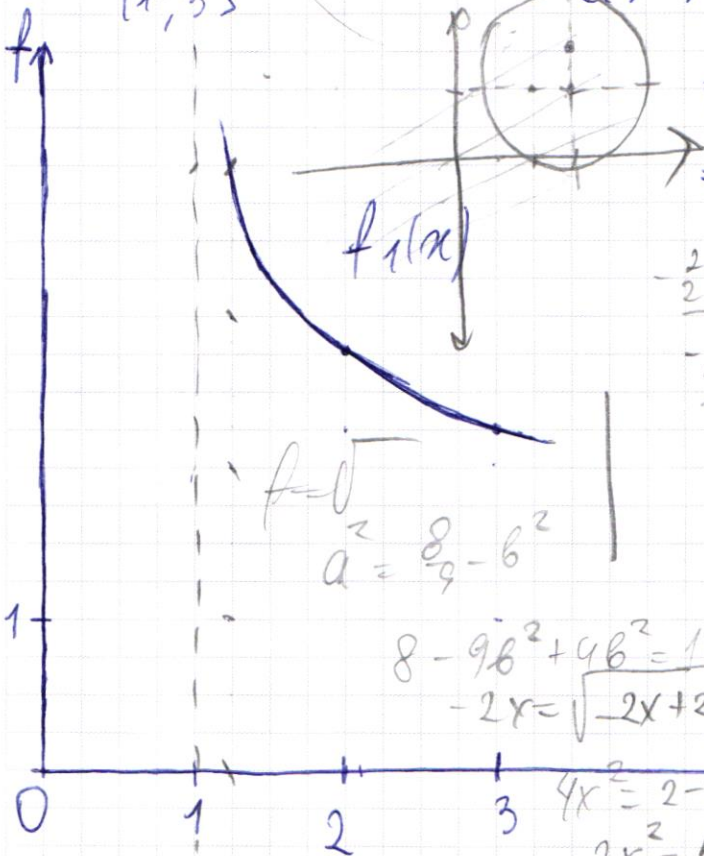
$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4(x-1)+1}{2(x-1)} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$8x^2 - 34x + 30 = 2(4x^2 - 17x + 15) = 2\left(2x - \frac{17}{4}\right)^2 + 30 - \frac{17^2}{8}$$

функция $f_1(x) = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ убывает на $(1; 3]$

$$\min(f_1(x)) = f_1(3) = 2 + \frac{1}{2(3-1)} = 2,25$$

$$10 - 5ab - 5a$$



$$f_2(x) = 2\left(2x - \frac{17}{4}\right)^2 + 30 - \frac{17^2}{8} = 2\left(2x - \frac{17}{4}\right)^2 - 6,125$$

$\frac{-289}{20} \mid \frac{8}{36,125}$ точки пересечения графиков

$$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 2\left(2x - \frac{17}{4}\right)^2 - 6,125$$

$$8 - 9b^2 + 4b^2 = 10 - 5ab - 5a \quad 2 + \frac{1}{2(x-1)} = 2(4x^2 - 17x + 15)$$

$$-2x = \sqrt{-2x+2} \quad x = -1$$

$$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 2(2x-15)$$

$$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 2(2x-15)$$

$$f_2(1) = 8 - 34 + 30 = 4$$

$$3 + 6$$

$$8x \quad 4x^2 - 17x + 15 = 0$$

$$289 - 16 \cdot 4 \cdot 60 = 0$$

$$D = 49 \quad 9(6 \cdot 9 - 1)$$

$$x_0 = \frac{17 \pm 7}{8} = 1,25 \quad 0,9 + 0,54 = 1,44$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$$f(x) < f(y)$$

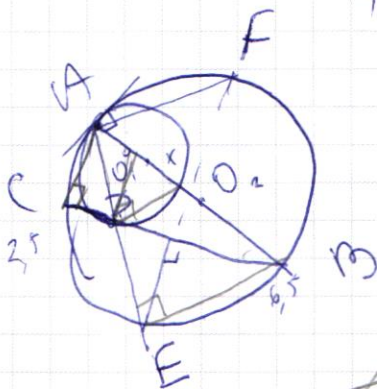
$$f(x) - f(y) < 0$$

$$BC = 9$$

простые числа от 3 до 27

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

f 0 1 1 2 3 4 4 5



$90^\circ - \angle \alpha$

$$a^2 + b^2 = \frac{8}{9}$$

$$a^2 + b^2 = 25(a(b+1) - 2)$$

$$AE \cos \alpha = 2R$$

$$V \sin \alpha = V \cos \alpha$$

$$V = \frac{V \cos \alpha}{2}$$

$$2R \cos \alpha = AD$$

$$2R \cos \alpha = AE =$$

$$2R \cos \beta = BC$$

3 5

$$\beta = 90 - 2\alpha$$

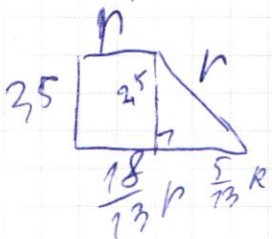
$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{324}{169}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2$$

$$AC = BC \tan \beta$$

$$\tan \beta = \frac{r \cdot 2}{13} = \frac{18}{13} r$$

$$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} = \frac{5}{9}$$



$$\frac{r}{R} = \frac{5}{9} = \frac{AD}{DE}$$

$$\left(2 \cdot \frac{5}{9}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot (4 + 9)$$

$$1 + 2 = \frac{1}{\cos^2}$$

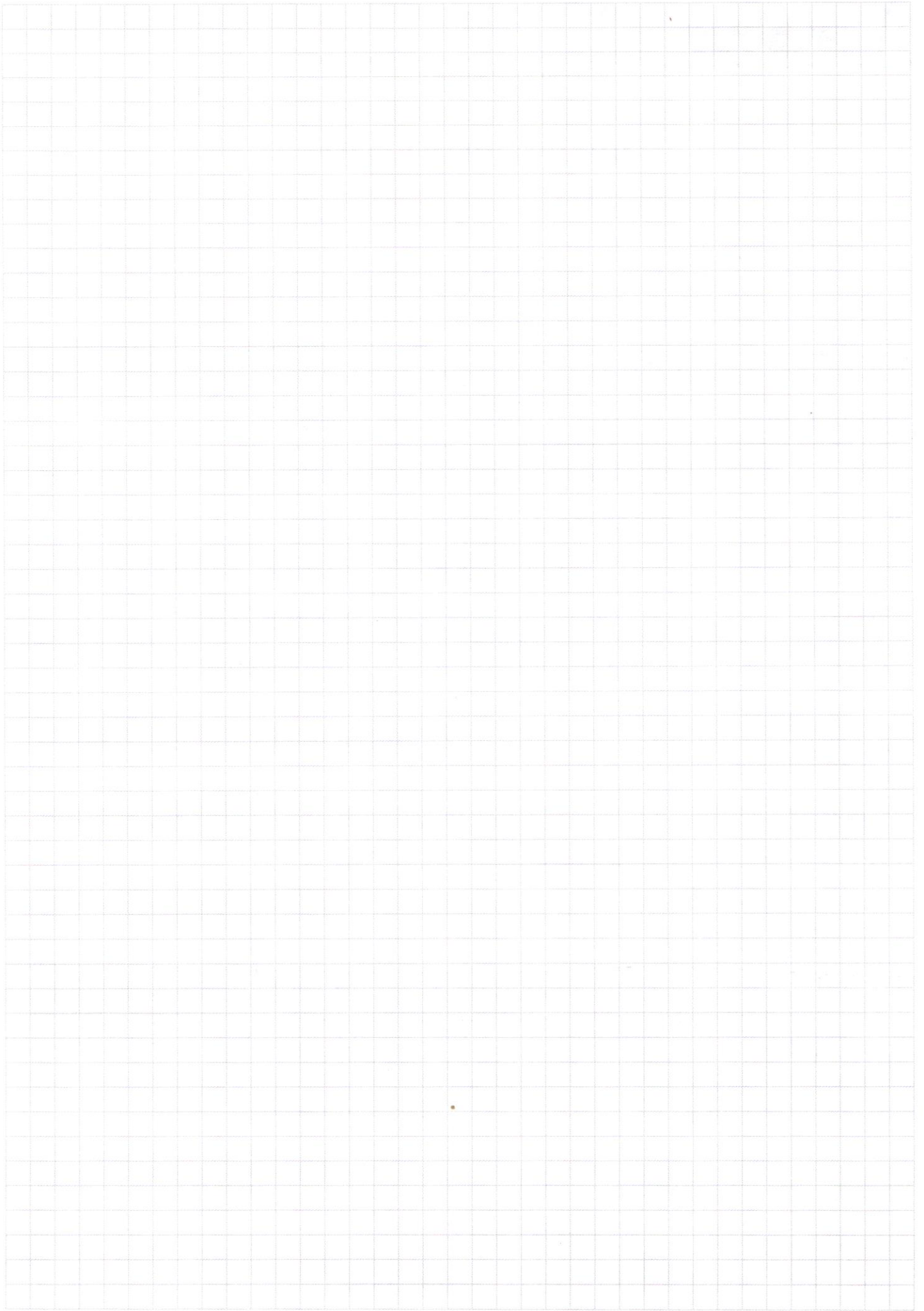
$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{225}{16} = \frac{25}{4} + \frac{225}{16}$$

$$\frac{100 + 225}{16} = \frac{325}{16}$$

$$= \frac{325}{16}$$

$$\frac{13^2 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 9^2 \cdot 4}{8^2} = \frac{5 \sqrt{13}}{4}$$

$$5 = \frac{1}{c} \quad c = \frac{1}{5}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)