МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

+3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

+ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

+ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

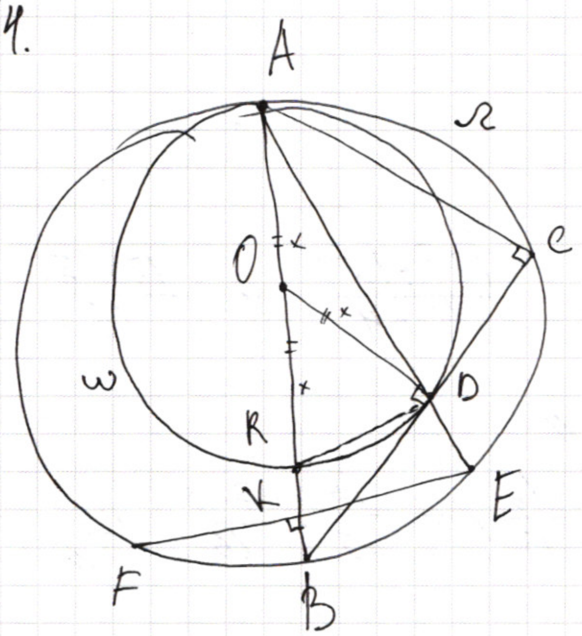
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

$R_\Omega = ?$ $R_\omega = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$

O – центр ω.

BC – касательная к ω, OD – R_ω $\Rightarrow OD \perp BC$

AB – диаметр Ω $\Rightarrow \angle ACB = 90 \Rightarrow AC \perp BC$.

$OD \perp BC$, $AC \perp BC$ $\Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow$ по теореме Фалеса для $\angle ABC$:

$$\frac{OB}{BD} = \frac{AO}{DC}$$

$$\frac{BO}{AO} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{15} \quad AO = x \Rightarrow BO = \frac{17}{15}x$$

$\triangle ADR$: $\angle ADR = 90$, т.к. AR – диаметр ω.

O – центр AR (гипотенузы) $\Rightarrow AO = OR = OD = x$

$BR = \cancel{AB - AO = AO + OB} - AB - AR = AO + OB - 2AO =$

$= OB - AO = \frac{17}{15}x - x = \frac{2}{15}x$

Степень B относительно ω:

$BD^2 = BR \cdot AB$

$\frac{17^2}{4} = \frac{2}{15}x \cdot \left(\frac{17}{15}x + \frac{15}{15}x\right)$

$\frac{17^2}{4} = \frac{2}{15}x^2 \cdot \frac{32}{15} \qquad x^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{4 \cdot 64} \quad x = \frac{17 \cdot 15}{16}$

$AO = x = \frac{17 \cdot 15}{16} = R_\omega$ //

$R_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{32}{15}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{15}x = \frac{16}{15} \cdot \frac{17 \cdot 15}{16} = 17$ //

Δ BCA:

$\angle C = 90$ по теореме Пифагора:

$AC^2 = AB^2 - BC^2 \quad AC = \sqrt{(17 \cdot 2)^2 - \left(\frac{15}{2} + \frac{17}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{17^2 \cdot 4 - 16^2} = 30$

Δ ACD:

$\angle C = 90$ по теореме Пифагора:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad AD = \sqrt{900 + \frac{225}{4}} = \cancel{\sqrt{\frac{1125}{4}}} =$

$= \cancel{\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{4}} = \frac{15}{2}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3600}{4} + \frac{225}{4}} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

Δ AOD: по теореме cos:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2\cos\angle AOD \cdot AO \cdot OD$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad$ $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$17 \times 15 = 85 + 170 = 255$ $\quad$ $32 \times 8 = 256$

$\cancel{\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\beta)+}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha($

$\cancel{\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\beta)} + 2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha +$

$2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha(\cancel{1-2\sin^2 2\beta}) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad$ $\cancel{+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$

$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\quad 2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta(2\cos 2\beta \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$

$32 \times 32 = 64 + 96 = 1024$ $\quad$ $64 \times 17 = 448 + 64 = 1088$; $1088 - 1024 = 64$

$\cancel{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}}$ $\quad$ $\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\boxed{\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \cancel{\frac{\sqrt2}{\sqrt5}}\ \frac{2}{\sqrt5}}$ или $-\frac{2}{\sqrt5}$

$2\sin\beta\cos\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad$ $\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \cancel{2\sin}\ \cos^2$ $\quad$ $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad$ $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$ $\quad$ $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$

$4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ΔAEK: по теореме Пифагора

$$KE = \sqrt{AE^2 - AK^2} = \sqrt{64 \cdot 17 - 32^2} = 8$$

~~$S_{\Delta}E$~~ $S_{\Delta}AEF = AK \cdot KE = 32 \cdot 8 = 256$ //

Ответ: $R_{\Omega} = 17$; $R_{\omega} = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$;

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$; $S_{\Delta AEF} = 256$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2t^2 + 8t \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} - 3 = 0$ $\quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

$t_{1,2} = \frac{-\frac{8}{\sqrt{14}} \pm \sqrt{\frac{64}{14} + 24}}{4} = \frac{-\frac{8}{\sqrt{14}} \pm \frac{20}{\sqrt{14}}}{4}$

$t_1 = \frac{3}{\sqrt{14}}$ $\quad t_2 = -\frac{7}{\sqrt{14}}$ н/у

при $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \,\Big|\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0 \,|\cdot(-1)$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(1 - 2\cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha\, 2\sin\beta\cos\beta$

$+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

(+)

$6\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \sin 2\alpha\left(1 - \frac{2}{5}\right) + \cos 2\alpha\, \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \,\Big|\cdot 5$

$8\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 2 = 0 \,|: 2$

$4\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 + 1 = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left.\begin{array}{l} AB\text{– диаметр} \\ FE\text{– хорда} \perp AB \\ K\text{– точка пересечения } (AB \cap FE) \end{array}\right| \Rightarrow FB = BE.$$

$\triangle AFE$:

AK– медиана и высота $\Rightarrow \triangle AFE$ равнобедр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle AFE = \angle AEF = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \;//$$

$\triangle AKE$:

$$\sin\angle AEF = \sqrt{1-\cos^2\angle AEF} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$\cancel{\sin\angle AEF = \frac{AK}{AE}}$ Степень D относительно Ω:

$$-AD\cdot DE = -BD\cdot DC$$

$$AD\cdot DE = BD\cdot DC$$

$$DE = \frac{BD\cdot DC}{AD} = \frac{\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 2}{15\cdot\sqrt{17}} = \frac{17\cdot\cancel{15}}{2\cdot\cancel{15}\cdot\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$AE = AD + DE = \frac{15\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$$

$$\sin\angle AEF = \frac{AK}{AE} \qquad AK = \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot 8\sqrt{17} = 32$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha(1-2\cos^2 2\beta)+\cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(1-\frac{2}{5})+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{5}+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{3}{\cancel{5}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\cancel{5}}+5\sin 2\alpha=-2$

$8\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha+2=0 \quad |:2$

$4\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha+1=0$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2-4\sin^2\alpha+1=0$

$\cancel{8\sin\alpha\cos\alpha}$ — $4\sin^2\alpha-8\sin\alpha\cos\alpha-3=0 \;|\cdot(-2)$

$-4\sin^2\alpha+16\sin\alpha\cos\alpha+6=0$

⊕

$14\sin\alpha\cos\alpha+3=0$

$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{14}$ $\quad \cancel{\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{14}} \quad \cancel{\sin\alpha=-\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}$

$\cancel{\cos\alpha=-\frac{3}{14\sin\alpha}} \quad \sin\alpha=-\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$

$\cancel{4\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\frac{(-3)}{14\sin\alpha}}$

$4\cdot\frac{9}{14^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{3}{7}-3=0 \;|\cdot\cos^2\alpha$

$\frac{36}{14^2}-\frac{18}{7}\cos^2\alpha=0$

$\cos^2\alpha=\frac{36^2}{14^2_{28}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{18}}$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{14}$ $\quad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}$

$2t^2+8t\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}-3=0$

$\frac{\frac{8}{\sqrt{14}}\pm\sqrt{\frac{64}{14}+24}}{4}=$

$=\frac{\frac{8}{\sqrt{14}}\pm\frac{20}{\sqrt{14}}}{4}$ $\quad t_1=\frac{7}{\sqrt{14}}$ н/у $\quad \boxed{t_2=-\frac{3}{\sqrt{14}}}$ $\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$

1
24
144
46
44
336
64
400

$\frac{21}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\cos\angle AOD = \frac{AO^2+OD^2-AD^2}{2\cdot AO\cdot OD} = \frac{\frac{2\cdot 17^2\cdot 15^2}{16^2} - \frac{15^2\cdot 5}{4}}{2\cdot\frac{17^2\cdot 15^2}{16^2}} =$$

$$= 1 - \frac{15^2\cdot 5}{4}\cdot\frac{16^2}{2\cdot 17^2\cdot 15^2} = 1 - \frac{5\cdot 16\cdot 16}{8\cdot 17} =$$

$$= 1 - \frac{160}{17} =$$

$$\frac{\frac{2\cdot 17^2\cdot 15^2}{16^2} - \frac{15^2\cdot 17}{4}}{2\cdot\frac{17^2\cdot 15^2}{16^2}} = 1 - \frac{\cancel{15^2}\cdot\cancel{17}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{16^2}\,16\cdot 2}{17^{\cancel{2}}\cdot\cancel{15^2}\cdot\cancel{2}} =$$

$$= 1 - \frac{16\cdot 2}{17} = \frac{17-32}{17} = -\frac{15}{17}$$

$\cancel{\cos\angle BAE} = \angle OAD = \angle ODA = \alpha \quad \angle AOD = 180 - 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cancel{\cos 180}\ 2\cos^2\alpha - 1$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(180-2\alpha) = -\cos\angle AOD = \frac{15}{17}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\angle OAD = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin\angle OAD = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos\angle AEF = \cos(90-\angle OAD) = \sin\angle OAD = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОО:
$10x-x^2>0$
$x^2-10x<0$
$x\in(0;10)$

т.к. $10x-x^2>0$,
то $x^2-10x<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$

$10x\ (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+3^{\log_3 5\cdot\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2-10x+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t=10x-x^2 \quad t>0$

$t^{\log_3 4} \geq -t+t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$f(t)=t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}$

при $t\in(0;1)$ $f(t)>0$, т.к. $t^{\log_3 4}>t^{\log_3 5}$

при $t\in[1;+\infty)$
$f(t)$ монотонно ~~возрастает~~ убывает,
$f(t)=0$ достигается при $t=9$.
если $t>9$, то $f(t)<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t\in(0;9]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$0 \underset{(1)}{<} 10x-x^2 \underset{(2)}{\le} 9$

1) $0<10x-x^2$

$x^2-10x<0$

$x\in(0;10)$

2) $10x-x^2\le 9$

$x^2-10x+9\ge 0$

$\cancel{x_{1,2}=5\pm\sqrt{25}}$

$\cancel{D=10^2-}$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-9}}{1}$

$x_1=9 \quad x_2=1$

$(x-1)(x-9)\ge 0$

$x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$

Общее решение:

$x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$.

№5.

Посчитаем все $f(p)$, где p — простое и $p\le 25$:

$f(1)=0 \quad f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(5)=1 \quad f(7)=1$

$f(11)=2 \quad f(13)=3 \quad f(17)=4 \quad f(19)=4 \quad f(23)=5$

Используя $f(ab)=f(a)+f(b)$, посчитаем значения всех остальных x: $2\le x\le 25$:

$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$

$f(8)=f(2^3)=3f(2)=0$

$f(9)=f(3^2)=2f(3)=0$

$f(10)=f(5\cdot 2)=f(5)+f(2)=$
$=1$

$f(12)=f(6)+f(2)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(15)= f(3)+f(5)=1$ $\quad f(18)= f(2)+f(9)=0$

$f(16)= f(8)+f(2)=0$ $\quad f(20)= f(4)+f(5)=0$

$f(21)= f(7)+f(3)=1$

$f(22)= f(11)+f(2)=2$ $\quad f(25)=2f(5)=2$

$f(24)= f(8)+f(3)=0$

Докажем, что $f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} &f(1)=0\\ &f(1)=f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)\end{aligned}\right| \Rightarrow 0=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$$

тогда, если $f(y)>0$, то $f\left(\frac{1}{y}\right)<0$.

Заметим, что т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$,

но т.к. $x\in[2;25]$ и $x\in\mathbb{N}$, то „отрицательность" получается только за счёт $f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\Rightarrow$ $f(x)>f\left(\frac{1}{y}\right)$ и $|f(x)|<\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right|$ — подходят только такие x и y.

при $x\in[2;25]$ и $x\in\mathbb{N}$:

$f(x)=\{0;1;2;3;4;5\}$

при $y \in [2;25]$ и $y \in \mathbb{N}$:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \{0; -1; -2; -3; -4; -5\}$$

Возможные пары значений $f(x)$ и $f\left(\frac{1}{y}\right)$:

$(0;-1)$ $12 \cdot 6 = 72$

$(0;-2)$ $12 \cdot 3 = 36$

$(0;-3)$ $12 \cdot 1 = 12$

$(0;-4)$ $12 \cdot 2 = 24$

$(0;-5)$ $12 \cdot 1 = 12$

$(1;-2)$ $6 \cdot 3 = 18$

$(1;-3)$ $6 \cdot 1 = 6$

$(1;-4)$ $6 \cdot 2 = 12$

$(1;-5)$ $6 \cdot 1 = 6$

$(2;-3)$ $3 \cdot 1 = 3$

$(2;-4)$ $3 \cdot 2 = 6$

$(2;-5)$ $3 \cdot 1 = 3$

$(3;-4)$ $1 \cdot 2 = 2$

$(3;-5)$ $1 \cdot 1 = 1$

$(4;-5)$ $2 \cdot 1 = 2$

+

$$72 + 36 + 12 + 24 + 12 + 18 + 6 + 12 + 6 + 3 + 6 + 3 + 2 + 1 + 2 =$$

$$= 108 + 30 + 36 + 20 + 10 + 11 =$$

$$= 144 + 60 + 11 =$$

$$= 204 + 11 = 215$$

Ответ: 215 пар.

Посмотрим, сколько встречается каждое значение (это значения $f\left(\frac{1}{y}\right)$ и $f(x)$ соответственно) (от целых от -5 до 5) и для каждой выше-написанной пары посчитаем кол-во:

0: 12 2: 3 4: 2 −1: 6 −3: 1 −5: 1

1: 6 3: 1 5: 1 −2: 3 −4: 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1) $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

(2):

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (3)

$\cos 2\beta (2\cos 2\beta \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$ (2')

$\frac{(2')}{(1)}$:

$$\boxed{\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \cdot (-\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

1) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cdot\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad /\cdot\sqrt{5}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$$

$$4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$$

подставим $\cos 2\beta$ и $\sin 2\beta$ в (3):

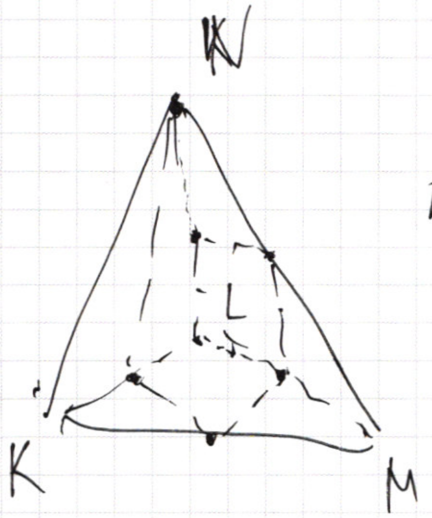
$$\frac{2\sin 2\alpha}{5} + \frac{4\cos 2\alpha}{5} = -\frac{2}{5} \quad /\cdot\frac{5}{2}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 2 - 4\sin^2\alpha = -1$$

$$4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$KL=3$

$KA=1$

$MN=\sqrt{2}$

f( )	res		
6:	0	8:	0
10:	1	16:	0
14:	1	24:	0
15:	1	18:	0
21:	1	12:	0
22:	2	20:	1
4:	0		
9:	0		
25:	2		

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \quad = f($

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2)=0$ $\quad f(1)=0 \quad f(2)=0 \quad f(3)=0$

$f(5)=1 \quad f(7)=1$

$f(1\cdot1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$f(11)=2 \quad f(13)=3$

$f(17)=4 \quad f(19)=4$

$f(25\cdot1)=f(25)+0$ $\quad f(23)=5$

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$~~

$y\geq3$ $\quad f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f(\cancel{4})=f(7)+f\left(\frac{1}{7}\right)$

$0 \quad 4 \quad -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$4 \geq -3+5$

ОДЗ: $\cancel{2xy-12y-x+6 \geq 0}$

$x-12y \geq 0$

$\log_3(t^{\log_3 4}+t) \geq \log_3(t^{\log_3 5})$

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq -1+t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}}-t^{\log_3 \frac{5}{3}} \leq 1$

$x^2-26xy+12y+144y^2+x=6$

$\ominus$

$t^{\log_3 5}=\cancel{t^{\log_3 20}-t}$

$x^2+36y+36y^2-12x=45$

$-26xy+48y+108y^2+13x=-39$

$t^{\log_3 20-\log_3 4}$

$9+3^{2\log_3 4}$

25

$\frac{t^{\log_3 20}}{t^{\log_3 4}}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$9+16$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+3^{\log_3 5\cdot\log_3(10x-x^2)}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 5}-t^{-\log_3 4} \leq 1$

$|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2-10x+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t=10x-x^2 \qquad t>0$

$x(x-10) \geq 0$

$x \in (-\infty;0] \cup [10;+\infty)$

$t^{\log_3 4} \geq -t+t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 20}=t^{\log_3 4+\log_3 5}$

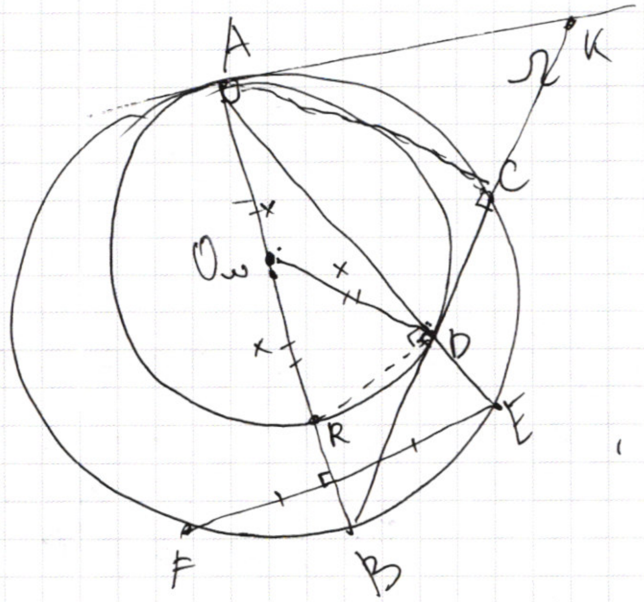
$t^{\log} \quad t^{\log_3 4}\cdot t^{\log_3 5}-t \leq t^{\log_3 4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

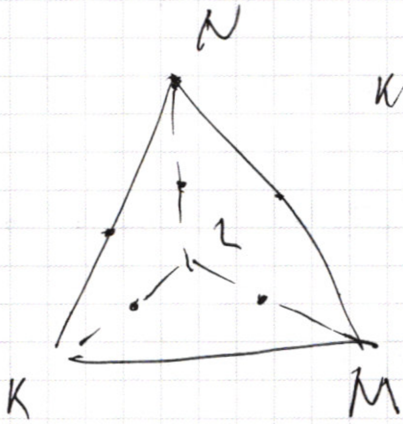


$\angle AFE = ?$

$R_1 = ?\ R_2 = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$

$CD = \frac{15}{2}\quad BD = \frac{17}{2}$



$KL = 3$

$KM = 1$

$\frac{BD}{AB} = \frac{R_\omega}{\ }$ $\quad \frac{BD}{2R_\Omega} = \frac{R_\omega}{AK}$

$$\frac{BO_\omega}{BD} = \frac{AO_\omega}{CD} \qquad \frac{BO_\omega}{AO_\omega} = \frac{17}{15} \qquad BO_\omega = \frac{17}{15}x$$

$AO_\omega = x$

$BR = \frac{2}{15}x$

$$\frac{2}{15}x \cdot \frac{32}{15}x = \frac{17^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{4 \cdot 64} \qquad \boxed{x = \frac{17 \cdot 15}{16}} \qquad R_\omega = \frac{17 \cdot 15}{16}$$

$$R_\Omega = \frac{32}{15}x = \frac{32}{15} \cdot \frac{17 \cdot 15}{16} = 34$$

$17 \times 17 = 119 \ldots 289$; $289 \times 4 = 1156$; $1156 - 256 = 900$; $900 + 225 = 1125$

$16 \times 16 = 96 \ldots 256$

$160 \,|\, 17$

$1125 : 25 = 45$

$5^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad 153 : 9 = 17$ $\quad 25 \cdot 9 \cdot 17$

$3600 + 225 = 3825$; $3825 : 25 = 153$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)