МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена: $a=x-2$; $b=y-1$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (2) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} a-2b \geq 0 \\ a^2+4b^2-5ab=0 \end{cases}$

$(a-4b)(a-b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} 10a^2=25 \\ 25b^2=25 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} & b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\pm 4 & b=\pm 1 \end{cases} \end{array}\right.$

1) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$: $\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0 \Rightarrow$ неуд.

2) $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$: $\sqrt{\frac{5}{2}}>0 \Rightarrow$ уд

~~3) $(1;1)$: $1-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow$ не~~ уд.

4) ~~$(-1;-1)$: $-1-(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow$~~ неуд.

~~обратная замена:~~

$\cancel{\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=\pm1\\ y-1=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-\sqrt[4]{\frac{5}{2}}\\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\end{array}\right.}$ $\cancel{x=3 \quad y=1{,}25}$

3) $(4;1)$ $4-2>0 \Rightarrow$ уд.

4) $(-4;-1)$ $-4+2<0 \Rightarrow$ не уд.

обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=4\\ y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}}\\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}\\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

$y=x^2+18x=0,\ x=\{-18;0\}$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}=(x^2+18x)^{\log_{12}5}$;

замена $t=x^2+18x>0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}13} > 0 \Rightarrow$

$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right)} + t^{\log_{12}\left(\frac{12}{13}\right)} \geq 1$

$y = t^{\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right)} + t^{\log_{12}\left(\frac{12}{13}\right)}$

$y' = \log_{12}\left(\frac{5}{13}\right) t^{\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right)} + \log_{12}\left(\frac{12}{13}\right) t^{\log_{12}\left(\frac{12}{13}\right)}$

$\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right) < 0$, т.к. $12 > 1$; $\frac{5}{13} < 1$

$\log_{12}\left(\frac{12}{13}\right) < 0$, т.к. $12 > 1$; $\frac{12}{13} < 1$ $\Rightarrow$

$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right)}$; $t^{\log_{12}\left(\frac{12}{13}\right)} > 0$

$y' < 0 \Rightarrow y \downarrow$

$y(24) = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ $\Rightarrow$

$t > 24$ $\quad y(t) < 1$

$t \leq 24$ $\quad y(t) \geq 1$ $\Rightarrow x \leq 24$

$\begin{cases} t \leq 24 \\ \cancel{x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)} \end{cases}$ $\quad x^2 + 18x - 24 \leq 0$ $\Rightarrow$

$y = x^2 + 18x - 24 \geq 0$

$D_1 = 81 + 24 = 105$

$x = -9 \pm \sqrt{105}$

$-9-\sqrt{105}$ $\quad$ $-9+\sqrt{105}$

~~Ответ: $(-\infty; -18) \cup (0; 24]$~~

$1 < \sqrt{105} - 9 < 2$ $\quad$ $-20 < -9 - \sqrt{105} < -19$

$-9-\sqrt{105}$ $\quad -18 \quad 0 \quad -9+\sqrt{105}$ $\quad x$

Ответ: $[-9-\sqrt{105}; -18) \cup (0; -9+\sqrt{105}]$

№ 5

1) $a = \frac{x}{y}$ $b = y$ $\Rightarrow$

$f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0$ при

$f(x) < f(y)$ $x; y \in N$ (из усл.)

2) Расс. простые числа:

2 · $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$

3) $f(1) = f(\frac{2}{2}) = f(2) - f(2) = 0$

4) $f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

~~5)~~ $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(10) = f(2\cdot 5) = 1$

$f(12) = f(6\cdot 2) = 0$

$f(14) = f(7\cdot 2) = 1$

$f(15) = f(5\cdot 3) = 1$

$f(16) = f(8\cdot 2) = 0$

$f(18) = f(9\cdot 2) = 0$

$f(20) = f(10\cdot 2) = 1$

$f(21) = f(7\cdot 3) = 1$

$f(22) = f(11\cdot 2) = 2$

$f(24) = f(12\cdot 2) = 0$

Итого

11 $x \in N$ $f(x) = 0$

7 — $f(x) = 1$

2 — $f(x) = 2$

1 — $f(x) = 3$

2 — $f(x) = 4$

1 — $f(x) = 5$

5) Если $f(y) = 0$, то $f(x) - f(y) \geq 0$

$f(y) = 1$, то, если $f(x) = 0$, то

$f(\frac{x}{y}) < 0$ (11·7 случаев)

Аналогично:

$f(y) = 2$ $f(x) < 2$ $\Rightarrow$ 18·2 случаев

$f(y)=3 \quad f(x)<3 \Rightarrow 20\cdot 1$ случаев

$f(y)=4 \quad f(x)<4 \Rightarrow 21\cdot 2$ случаев

$f(y)=5 \quad f(x)<5 \Rightarrow 23\cdot 1$ случаев.

Итого $77+36+20+42+23=198$ пар.

Ответ: 198 пар.

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{5} \;\Big|\; \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ ~~$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$~~ $\Rightarrow$ (из основного триг. тж-ва)

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$$

$\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1=$

$=\frac{8}{5}-1=+\frac{3}{5}$

1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

~~$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cos 2\beta=2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\frac{4}{5}$~~

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

Пусть $\sin 2\alpha=x;\ \cos 2\alpha=y$

$$\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt5}+\frac{y}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5} \\ x(+\frac{3}{5}+1)+y\cdot\frac{4}{5}=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \cancel{2x+1y=-1} \\ \cancel{2x+4y=-4} \quad \cancel{2x+1y=-27} \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2 \cdot 1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\sqrt5\left(\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha\right) = -1$$

Пусть $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt5}$; $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5}$

$\left(\left(\frac{1}{\sqrt5}\right. \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1\right)$, что

$$\sin(2\alpha + \varphi) = -\frac{1}{\sqrt5} \; ; \; -\frac{1}{\sqrt5} = -\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\sin(2\alpha+\varphi) = -\sin\varphi$$

$$\sin(2\alpha+\varphi) = \sin(-\varphi)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\varphi = -\varphi + 2\pi k \\ 2\alpha + \varphi = \varphi + \pi + 2\pi n \end{array}\right. \qquad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\varphi + \pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$$

$$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = -\varphi + \pi k \\ \cancel{\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n} \end{cases}$$

$a)\ \sin\alpha = \sin(\pi k - \varphi) = \left[\begin{array}{l} \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt5};\ k\text{-чет} \\ -\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt5};\ k\text{-нечет} \end{array}\right.$

$\cos\alpha = \cancel{\sin}\cos(\pi k - \varphi) = \left[\begin{array}{l} -\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt5};\ k\text{-нечет} \\ +\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5};\ k\text{-чет.} \end{array}\right.$

$a)\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

$\cancel{б)\ \operatorname{tg}\alpha = -2}$

$\cancel{б)\ \sin\alpha = -1};$

$2)\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

Аналогично, что т.к. $\varphi = 2\beta$, то

$\cancel{\sin u} = \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt5},\ \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\cancel{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\cdot}\ \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \end{array}\right.} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = 2 \end{array}\right.$

~~ответ~~: $\pm\frac{1}{2};\ \pm 2$

№ 6

$\cancel{\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b} \le -8x^2 - 32x - 17$

$\cancel{x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \Rightarrow 4x+3 < 0 \Rightarrow}$

$\cancel{4ax^2 + 3b + x(3a+4b)\ \text{поп}} - 12x - 11 \le 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} \cancel{9(88a - 42b + 121) \le 0} \\ a(\end{cases}$$

$$\cancel{\mathcal{D} = 16b^2 + 9a^2 + 12^2 + 24ab - 72a - 96b -}$$
$$\cancel{- 48ab + 88a \le 0}$$
$$\cancel{16b^2 + 9a^2 + 144 - 24ab + 16a - 96b \le 0}$$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha + \varphi = \varphi + 2\pi k \\ &2\alpha + \varphi = \pi - \varphi + 2\pi k. \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\alpha = \pi k \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \\ &\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k. \end{aligned}\right.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k\right) = \cos(\varphi - \pi k) =$$
$$= \left[\begin{aligned} &+\frac{1}{\sqrt5} \quad k - \text{чет} \\ &-\frac{2}{\sqrt5} \quad k - \text{нечет} \end{aligned}\right.$$

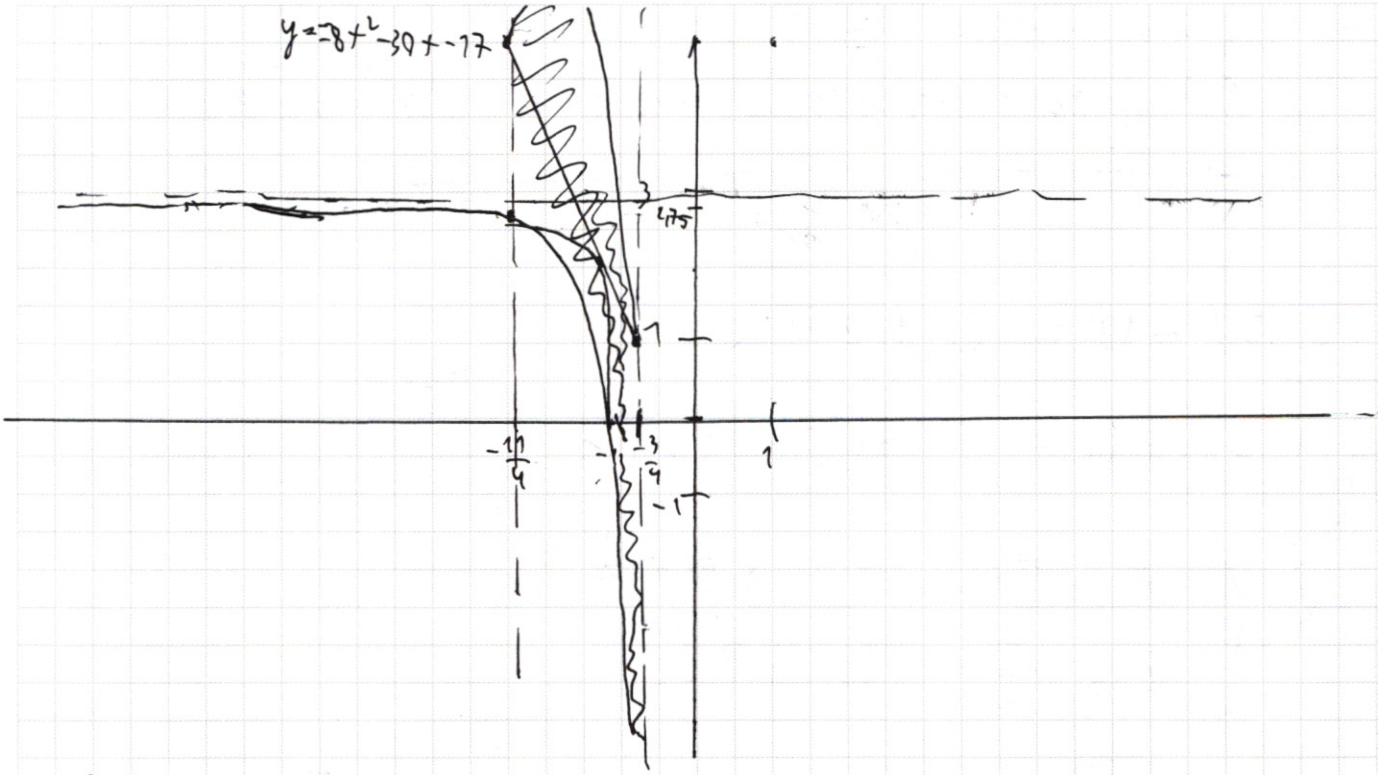
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k\right) = \sin(\varphi - \pi k) =$$
$$= \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{\sqrt5} \quad k - \text{чет} \\ &\frac{1}{\sqrt5} \quad k - \text{нечет}. \end{aligned}\right.$$

$$tg\,\alpha = 2$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; 2

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~f(x)~~ ~~Прямая дол~~

~~на отрезке~~ $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ (макси-мум касаться) и быть выше ее

$ax + b \geq \frac{12x+11}{4x+3}$ $4x+3 < 0 \Rightarrow$

$4ax^2 + x(4b+3a) + 3b \leq 12x + 11$

$4ax^2 + x(4b+3a-12) + 3b - 11 \leq 0$

~~на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$~~ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 4a\left(\frac{\cancel{4a}\cdot 121}{4}\right) - \frac{11}{4}(4b+3a-12) + 3b - 11 \leq 0 \\ 4a\left(\frac{9a}{4}\right) - \frac{3}{4}(4b+3a-12) + 3b - 11 \leq 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Расс ф-ции:

7-а $\begin{cases} y = -8x^2 - 30x - 77 \\ y = ax + b \text{ — } \forall \text{ прямая} \\ y = \dfrac{12x + 11}{4x + 3} \end{cases}$ 42 $\dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x + 77$

1) $\cancel{y = -8}$ $x_b = -\frac{15}{8}$ і парабола

$y_b = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 77 = \frac{89}{8}$

ветви вниз.

$x = -\frac{11}{4}$ $y = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 77 = 5$

$x = -\frac{3}{4}$ $y = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} = 1$

3) гипербола $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$, причем $x = -\frac{3}{4}$ - асимп ; $y = 3$ - асим.

$x = -\frac{11}{4}$ $y = 3 + \frac{2}{3 - 11} = \cancel{2{,}75}\ 2{,}75$

$f(x) = ax + b$

прямая должна проходить ниже параболы, т.е $f(-\frac{11}{4}) \le 5$; $f(-\frac{3}{4}) \le 1$

и не пересекать гиперболу

$$208 + \frac{2}{4x+3} + 8x^2 + 30x$$

$(8x+13)(x+1)$

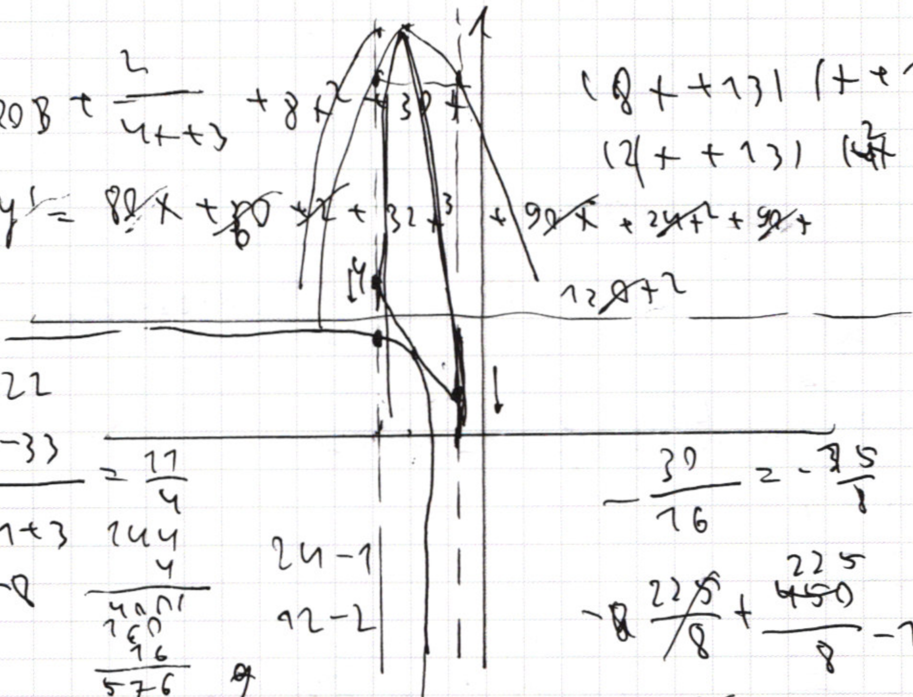
$(2x+13)(4x+7)$

$-\frac{3}{4}$

$\frac{80}{56}$, 136

$y' = 88x + 80x^2 + 32x^3 + 96x + 24x^2 + 96x$

$3 + \frac{2}{4x+3}$



1287^2

-22

$\frac{11-33}{-11+3} = \frac{11}{4}$

-8

$\frac{144}{4}$, 4001, 160, 16, 576

$24-1$

$12-2$

$8x^2 + 30x =$

$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$= 8\left(x^2 + \frac{15}{4}x\right) =$

$-8\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17$

$= 8\left(\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 - \frac{225}{64}\right) =$

$\frac{89}{8}$

$= 8\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + 17 - \frac{225}{8} =$

$-256 + 81 + 24 = 109$

$+576 - 680 + 62$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = -\frac{89}{8}$

$\frac{x + \frac{3}{4}}{2} = \frac{y-1}{-4} \Rightarrow y = -2x - 1{,}5 + 1 = -2x - 0{,}5$

$\left(-\frac{11}{4}; 5\right); \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$

80, 32, 112

$8x^2 + x(30+a) + 17 + b \le 0$

$\frac{x + \frac{3}{4}}{2} = \frac{y-1}{-42}$

$8 \cdot \frac{121}{162} + \frac{(30+a)11}{4} + 17 + b \le 0$

$-\frac{9}{2} + \frac{45 \cdot 7}{2} - 17$

$y = -2x + \frac{5}{2}$

$D_1 = 225 - 17 \cdot 8 = 89$

136

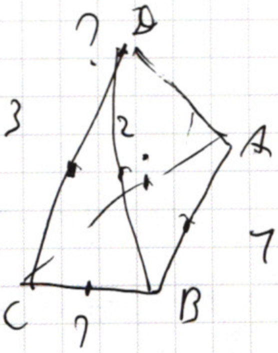
1084

85

188, 85, 23

$x(3-a) - b + \frac{2}{124x+3} \le 0$

97, 116, 118, 124, 105, 113, 121, 97, 124, 108, 113, 121



$y' = 96x^2 + 288x + 120$

$48x^2 + 144x + 85$

$3(16x^2 + 48x) =$

$= 48(x^2 + 3x) =$

$= 48\left((x+1{,}5)^2 - \frac{9}{4}\right) =$

$48(x+1{,}5)^2 - 23$

$\frac{72}{9}$, 90, 18, 108

$104 \mid 8$

$-8x^2 - 30x - 13 - 4$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Расс критическую прямую, проходящую ч/з т. $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ (критически ниже параболы)

$\cancel{\frac{y+\frac{3}{4}}{2} = \frac{x-1}{4}}$ $\quad \frac{x+\frac{3}{4}}{2} = \frac{y-1}{-4}$

$y = -2x - 0,5$ ∄ т

Найдём т. ∩ с гиперболой:

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - 0,5 \qquad x \neq -\frac{3}{4}$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \Rightarrow$ прямая касается гиперболы. $\Rightarrow$ если сдвигать $\forall$ т. ∩ с границами $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, то прямая ∩ гиперболу $\Rightarrow$ частично ниже её $\Rightarrow$

$y = -2x - 0,5$ – единств. уд. усл. $\Rightarrow$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = -0,5 \end{cases}$ Ответ: $(-2; -0,5)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - 0,5$$

$$3 + \frac{2}{4x+3} = -2x - 0,5$$

$$7 + \frac{4}{4x+3} = -4x$$

$$28x + 21 + 4 = -16x^2 - 12x$$

$$16x^2 + 40x + 25$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

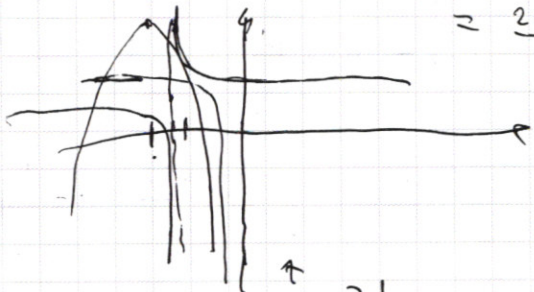
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3+\frac{2}{4x+3}$

$x_6 = -\frac{15}{4}$ $\quad -\frac{225}{2}+\frac{450}{2}-72$

$= \frac{225-34}{2}$



~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ 7

$f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x}) =$

$= f(1)$

$x=-\frac{3}{4}$ $\quad 1\cancel{3}+\frac{4}{4x+3} = -4x+2,5$

$f(\frac{x}{y})+f(y) = f(x)$

$4x+3+4 = -16x^2-12x$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y)$

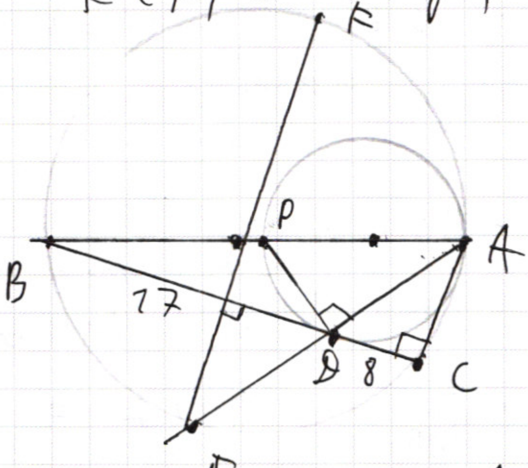
$17\cdot 33$ $\quad 16x^2+16x+7$

R, r – ? $\quad 16^2-4\cdot 16\cdot 28$

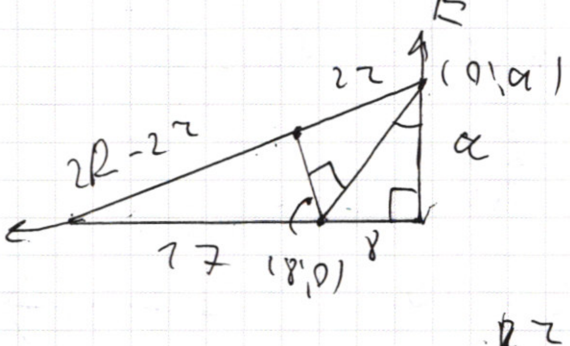
$\angle AFE$ – ?

S_{AEF} – ?

2
3
5
7



$17^2 = 2R(2R-2r)$



$AC^2 = 4R^2-25^2$

$AD^2 = 4R^2-25^2+8^2$

$DP^2 = 4r^2-4R^2+25^2-8^2$

$a^2 = 4R^2-25^2$

$\left(\frac{2ra}{R}; \frac{18r}{R}\right)$

$(-8; a)$

$\left(\frac{25r}{R}-8; \frac{ra}{R}\right)$ $\quad -8\cdot\frac{25r}{R}+64+\frac{ra^2}{R} = 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8 \cdot \cancel{77}^{25} 2 = 64R + (4R^2 - 25^2)2$

$\cancel{761}\,2 = 64R + 47R^2$

$25 \cdot 33$

$2R(2R - 27) = 77^2$ $\cancel{8}\,25$

$4R^2 = 77^2 + 4R7$.

$28(8+25) = 25 \cdot 33$

$25 \cdot 33 = 64R + 77^2 7 + 4 \cdot 77^2 R 7$

$\begin{array}{r} 77 \\ 8 \\ \hline 81 \\ 56 \\ \hline 136 \\ 628 \\ \hline 761 \end{array}$

$3 -$

$0,5$; $\frac{5 \cancel{\cdot 3}}{21} - \cancel{3} - \frac{5}{\cancel{2}} + \cancel{x} - 1$

$9 + \frac{25 \cdot 9}{16} - 12 - \frac{9 \cdot 5}{2} - 12\frac{1}{4}$ $1 - 08$

$\cancel{77}0$

1
2
3
5
6

$2 = 6 \cdot 2 - 6 - 4 + 2$

$36 + 36 - 36 - 24$ $4t + 3 < 0$

$4at^2 +$

$100 + 78 + 20$

$2x + 4y = -4$

$2\sin \cancel{\alpha} 2\beta \quad \sin\cos(2\alpha + 3\beta) + \sin 2\alpha$

$\sin t \quad \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{5}\sin(2\alpha + \varphi) = -\sin\varphi$

$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{12x + 17}{4x + 3} \le -8x^2 - 30x - 77$

$4 - \frac{121}{2} + \frac{165}{2}\, 22 - 17 = 5$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\underline{\sin(2\alpha+2\beta)}\cos(2\beta)$

$\sin x+\sin y$

~~sin~~ $\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$\sin(2$

$2\cos 2\beta=-\frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \underline{\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=-\frac{1}{5}\\ \sin 2\beta=\frac{1}{5}\end{array}\right.$

1) $\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos 2\alpha}{5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sqrt5\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-\sqrt5$

$\sqrt{21}\sin(2\alpha+\varphi)=-\sqrt5$

$\sin\varphi=$

$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha\ \cancel{\alpha}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}\cancel{2\sin}\ 2\sqrt5\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-\sqrt5\\ \sin 2\alpha(\ldots)+\cos(2\alpha)\end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$\cancel{(x-2}$ $x\cancel{+1+4+1}$

225
23

$(x-2)^2+\cancel{9y}(y-2)$

$9(y-1)^2 = 77 \quad \frac{12+4+9}{25}$

$9(y^2-2y+1-1)$

$a^2+9b^2=25 \qquad a-2b\geq 0$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$a^2+4b^2-4ab=ab$; $\boxed{(4b-a)(b-a)=0}$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq \cancel{(}x^2+18x\cancel{)}^{\log_{12}13}-18x$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2+18x \geq \cancel{\log}\ (x^2+18x)^{\log_{12}13}\cancel{-18x}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13} \qquad t>0$

$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq \cancel{\log}\ t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}+t^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geq 1$

$t=\cancel{*}\cancel{1}24=\frac{25}{1}$ . . . .

17
8
80
56
136

$(8x+17)(x+$
$8x^2+30x+72$

$D_1=225-136=\cancel{8}\ 89$

№5

$f(p)=[p/4]$ p-прост.

$12x+17\leq -32x^3-120x^2-68x-24x^2-90x-51$

$32x^3+144x^2+170x+62\cancel{+0}\leq 0$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)