# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

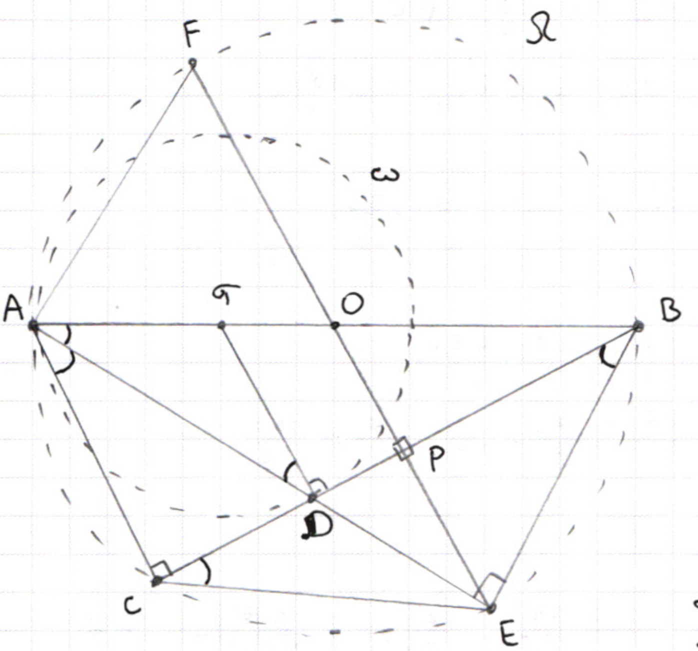
$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.




$R_{\Omega}$ - ? $R_{\omega}$ - ?
$\angle AFE$ - ?
$S_{AFE}$ - ?

$CD = 8$, $BD = 17$

T - центр окр-сти ω

Тогда $AT = TD = R_{\omega}$
=> $\triangle ATD$ - р/б
=> $\angle TAD = \angle TDA = \alpha$

$TD \perp CB$, $AC \perp CB$

т.к. BC — касательная к окр-сти ω

т.к. AB — диаметр окр-сти Ω

=> $TD \parallel AC$ => $\angle TDA = \angle DAC = \alpha$ =>

=> AD - биссектриса $\angle CAB$.

$\angle CBE = \angle CAE = \alpha$, $\angle BCE = \angle BAE = \alpha$ => $\triangle CEB$ - р/б

P - точка пересеч. EF и CB. EP - высота в р/б треуг.

=> $\triangle CPE = \triangle BPE$ => $CP = PB$

Тогда прямая $FE \perp CB$ и делит хорду CB пополам.
=> Центр окр-ти Ω принадлежит пр-ой FE.

Но центр окр-сти Ω также принадлежит диаметру AB. => O (точка пересеч. FE и AB) является центром окр-сти Ω.

$EF \perp CB$, $AC \perp CB$ => $AC \parallel FE$, при этом ACEF — вписанный четыр. => ACEF — р/б трапеция

=> $\angle AFE = \angle CEF$

$\left.\begin{array}{l} CP = PB \\ CD = 8,\ BD = 17 \end{array}\right|$ => $CD = 8$, $DP = \frac{9}{2}$, $PB = \frac{25}{2} = CP$

EP – высота, проведенная к гипотенузе DB

$$\Rightarrow EP = \sqrt{DP \cdot PB} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\operatorname{tg} \angle CEF = \frac{CP}{PE} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right).$$

$$CP \cdot PB = EP \cdot PF \Rightarrow \frac{25}{2} \cdot \cancel{\frac{25}{2}}^{5} = \cancel{\frac{15}{2}}^{3} \cdot PF$$

$$\Rightarrow PF = \frac{25}{2} \cdot \frac{5}{3} = 2R_\Omega - PE = 2R_\Omega - \frac{15}{2}$$

$$2R_\Omega = \frac{15}{2} + \frac{25 \cdot 5}{6} = \frac{15 \cdot 3 + 25 \cdot 5}{6} = \frac{170}{6} = \frac{85}{3} = FE$$

$$R_\Omega = \frac{85}{6}$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3} = \frac{2125}{12}$$

$$OP = R_\Omega - PE = \frac{85}{6} - \frac{15}{2} = \frac{85 - 45}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

$$\triangle OPB \sim \triangle QDP \Rightarrow \frac{OP}{PB} = \frac{QD}{DB}$$

$$\Rightarrow QD = \frac{OP \cdot DB}{PB} = \frac{\frac{20}{3} \cdot 17}{\frac{25}{2}} = \frac{\cancel{20}^{4} \cdot 17}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{25}_{5}} = \frac{136}{15}$$

$$QD = R_\omega$$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$

$R_\omega = \frac{136}{15}$

$\angle AEF = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$, $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

1.

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$$

$$= 2\sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Тогда $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha\,(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

а) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ – не определён
$\Rightarrow$ этот вариант не возможен.

б) $2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\alpha = -\cos\alpha$ ($\cos\alpha \neq 0$, иначе $2\cdot(\pm1) = 0$)

$\Rightarrow 2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \dfrac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\left(-\dfrac{1}{\sqrt5}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\,(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

а) $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

б) $2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -2\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = -2$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$

(1) $x - 2y = \sqrt{y(x-2) - (x-2)} = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$x - 2y = x - 2 - 2y + 2 = (x-2) - 2(y-1)$

(2) $(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 18y + 9) = 12 + 4 + 9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 = 5^2$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

Итого: $\begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} & (3) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ y < 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

Возведем рав-во (3) в квадрат:

$(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2 = (x-2)(y-1)$

$(x-2)^2 - (x-2)(y-1) - 4(x-2)(y-1) + 4(y-1)^2 = 0$

$(x-2)\big(x-2-(y-1)\big) - 4(y-1)\big(x-2-(y-1)\big) = 0$

$\big(x-2-4(y-1)\big)\big(x-2-(y-1)\big) = 0$

$(x-2-4y+4)(x-2-y+1) = 0$

$(x-4y+2)(x-y-1) = 0$

а) $x = 4y - 2$

(2): $(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$(x-2)^2 = (4y-2-2)^2 = (4y-4)^2 = 16(y-1)^2$

$16(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25(y-1)^2 = 25$

$\Rightarrow (y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array}\right.$

Если $y = 2$, то $x = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6$ (противоречия с ОДЗ нет)

Если $y = 0$, то $x = -2$ (не подходит по ОДЗ, т.к. $-2 < 0$)

б) $x = y + 1$

$(x-2)^2 = (y+1-2)^2 = (y-1)^2$

Тогда (2): $(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 10(y-1)^2 = 25$

$(y-1)^2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow y-1=\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{5}{2}}\\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\qquad y=\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+1\\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+1\end{array}\right.$

Если $y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1$, то $x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

(Не выполняется нер-во $x\geq 2y$ из ОДЗ)

Если $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$, то $x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

(подходит по ОДЗ)

Ответ: $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$, $(-2;0)$.

5. $f(1)=\left[\frac{1}{4}\right]=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

Для любого положит. рацион. $k$: $f(2k)=f(2)+f(k)=$
$=f(k)$

Аналогично $f(3k)=f(k)$

$f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$

$f(19)=4$, $f(23)=5$

Рассмотрим такие $y$, кот. содержат в разложении на простые множители только двойки и тройки.

$y=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(2\cdot\frac{x}{y}\right)=f\left(3\cdot 2\cdot\frac{x}{y}\right)=\ldots=f\left(2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot\frac{x}{y}\right)=$
$=f(x)<0$

Но $x, y$ - натур. числа $\Rightarrow$ $x$ мы можем представить в виде произведения простых множителей (положительных)

$\Rightarrow x=x_1\cdot x_2\ldots\cdot x_k$

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)$, где $f(x_i) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow$ Таких пар не существует.

$f(k \cdot n) = f(k) + f(n) = k_0 + n$

где $k$ - простое число и $k \neq 2$, $k \neq 3$, $n$ - положит. рац. число

(Например: $f(5n) = f(5) + f(n) = 1 + f(n)$)

Рассмотрим теперь $\varphi$, которые содержат в разложении простые множители, больше трёх.

- $\varphi = 5$: $f\left(\frac{x}{5}\right) = f(x) - 1 < 0$
  $\Rightarrow f(x) < 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 1/2/3/4/6/8/9/12/16/18/24$
  — 11 вариантов
- $\varphi = 7$: $f\left(\frac{x}{7}\right) = f(x) - 1$ — аналог. 11 вар-тов.
- $\varphi = 10$: $f\left(\frac{x}{10}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(5) = f(x) - 1 < 0$
  — 11 вар-тов
- $\varphi = 11$: $f\left(\frac{x}{11}\right) = f(x) - f(11) = f(x) - 2 < 0$
  $\Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow$ Для выбора $x$
  11 + 2 $(x = 5, 7)$ вар-та.
- $\varphi = 13$: $f\left(\frac{x}{13}\right) = f(x) - 3 < 0 \Rightarrow f(x) \leq 2$
  Для выбора $x$ 14 вар-тов.
- $\varphi = 14$: $f\left(\frac{x}{14}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(7) = f(x) - 1 < 0$
  11 вар-тов
- $\varphi = 15$: 11 в-тов
- $\varphi = 17$: $f\left(\frac{x}{17}\right) = f(x) - f(17) < 0 \Rightarrow f(x) \leq 3$
  $\Rightarrow$ 15 в-тов
- $\varphi = 19$: $f\left(\frac{x}{19}\right) = f(x) - f(19) = f(x) - 4 < 0$
  15 в-тов
- $\varphi = 20$: 11 в-тов
- $\varphi = 21$: 11 в-тов
- $\varphi = 22$: 13 в-тов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• $y = 23$: $f\left(\frac{x}{23}\right) = f(x) - f(23) = f(x) - 5 < 0$

$\Rightarrow f(x) \in y \Rightarrow 17$ в-тов

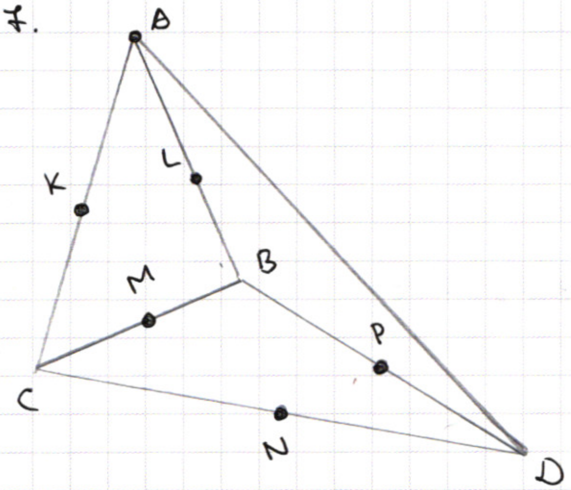
Итого: $11 + 11 + 11 + \underline{13} + 14 + 11 + 11 + 15 + 15 +$

$+ 11 + 11 + \underline{13} + 17 = 77 + 13 \cdot 2 + 14 + 17 + 2 \cdot 15 =$

$= 77 + 26 + 30 + 31 = 164$

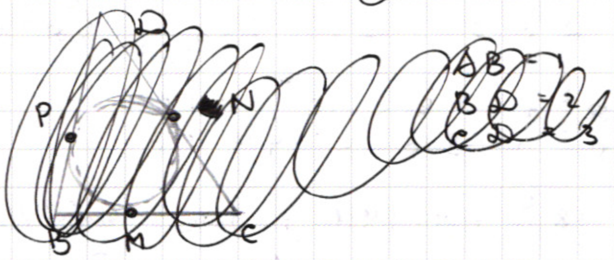
Ответ: 164 вар-та.

7.




A, K, L, M, N, P лежат на сфере

~~BK, BP и BM - касатель-ные => BL = BP = BM~~




Сечение сферы пл-стью DBC

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$t = x^2+18x$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} - t^{\log_{12}13} \geq 0$

Модуль раскрываем с плюсом, т.к. $t = x^2+18x > 0$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} - 13^{\log_{12}t} \geq 0$

$\alpha = \log_{12}t = \log_{12}(x^2+18x)$

$5^{\alpha} + 12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$

При $\alpha = 2$: $5^2+12^2 = 13^2$

При $\alpha < 2$: $5^{\alpha}+12^{\alpha} > 13^{\alpha}$

При $\alpha > 2$: $5^{\alpha}+12^{\alpha} < 13^{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha \leq 2 \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$\Rightarrow x^2+18x \leq 12^2 = 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$D = 18^2 + 4\cdot 144 = 900$

$x_{1,2} = \dfrac{-18 \pm 30}{2} = \left[\begin{array}{l} -24 \\ 6 \end{array}\right.$

$\Rightarrow x \in [-24; 6]$

Но по ОДЗ $x^2+18x = x(x+18) > 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+3(y-1)^2=25=5^2 \end{cases}$

$x-2-2y+2=(x-2)-2(y-1)$

$a=x-2,\quad b=y-1$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+3b^2=25 \end{cases}$ ОДЗ

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a^2-ab-4ab+4b^2=a(a-b)-4b(a-b)=0$

$a=b$

$x-2=y-1$

$x=y+1$

$a=4b$

$x-2=4y-4$

$x=4y-2$

$x\geqslant 2y$

$-\sqrt{\frac{5}{2}}+\cancel{2}\geqslant -2\sqrt{\frac{5}{2}}+\cancel{2}$

$-t\geqslant -2t$

$t\leq 2t$

$y<1$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}\geqslant t^{\log_{12}13}$

$t\; 5^{a}+12^{a}\geqslant 13^{a}$

$13=\sqrt{12^2+5^2}$

$\uparrow^2 \quad 5^{a}+12^{a}\geqslant \sqrt{12^2+5^2}^{\,a}$

$7+10$

13
13
169
13
507
169
2197
12
144
12
288
144
1728

13
18
91
13

$t^{\log_{12}5}+t\geqslant |t|^{\log_{12}13}$

~~Если t - отр~~ $t=0$ ✓

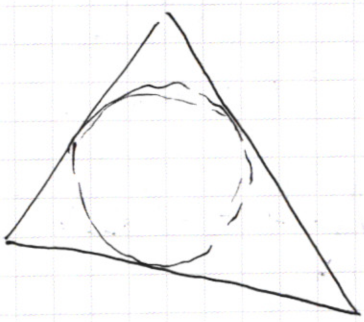
$t>0:\quad t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\frac{1}{\log_{12}5}}-t^{\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}}\right)\geqslant 0$

$\Downarrow$

$1+t^{\log_5 12}-t^{\log_5 12\cdot\log_{12}13}\geqslant 0$

1728
125
1853

D



B

C

$12+5>13$

$12^2+5^2=13$

$12^3+5^3<13$

$\frac{1}{5}+\frac{12}{12}=$

$=\frac{12+5}{60}=\frac{17}{460}$

$\frac{1}{13}\ \vee\ \frac{17}{60}$

$60\ \vee\ 17\cdot 13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_{12} 5} + t \geqslant |t|^{\log_{12} 13}$

$x^2 + 18x > 0$

$t^{\log_{12} 12}$

$t > 0$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geqslant 13^{\log_{12} t}$

$5^{d} + 12^{d} \geqslant 13^{d}$

$5^{2d} + 12^{2d} + 2 \cdot 5^{d} \cdot 12^{d} \geqslant 13^{2d} = (13^2)^d = (12^2 + 5^2)^d$

$f\left(\frac{x}{4}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p^2}\right)$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20
21 22 23 24

$f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0 \Rightarrow f(2k) = f(k) + f(2)$

$f(3) = 0 \qquad \Rightarrow f(2k) = f(k)$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(3k) = f(k)$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1 \qquad f(7k) = f(k) + 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

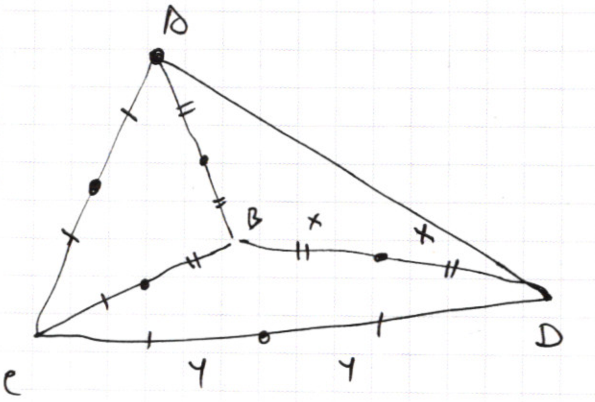
$f\left(\frac{x}{4}\right) < 0 \qquad f\left(\frac{x}{22}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(11)\right) =$

$= f(x) - 2 < 0$

$f(11) = 2$

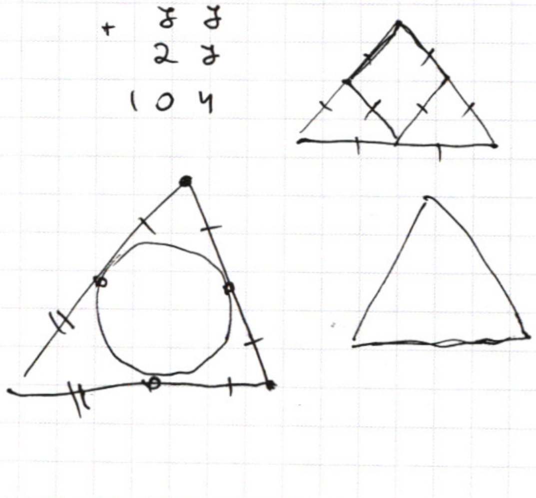
$f(13) = 3 \qquad f(23k) = f(23) + f(k) \qquad f \leq 1$

$f(17) = 4$




$BD = 2x = 2$

$+\ 77$
$\ \ 27$
$104$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$ пол. рац. числа

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] - p$ – простое

$a^{\log_b c} = (b^{\log_b a})^{\log_b c} = (b^{\log_b c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}$

Кол-во пар натур. $(x; y)$, что $\begin{cases} 1 \le x \le 24 \\ 1 \le y \le 24 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)$

пол. рац. число

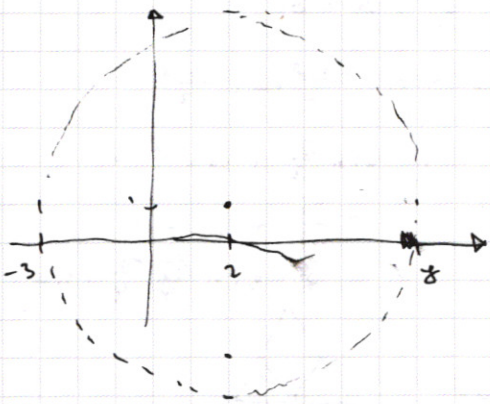
2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \quad ^2 \\ (x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 5^2 \end{cases}$ ОДЗ!

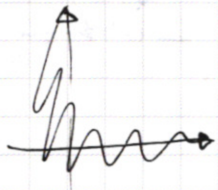
$x^2 + 4y^2 - 4xy = (x-2)(y-1) = xy - 2y - x + 2$

$x^2 + 4y^2 - 5xy + 2y + x + 2 = 0$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+y)$



$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2}\cdot 2 = \sqrt2 =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 0 = 2\cdot\frac{\sqrt2}{2}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$

$-\frac{2}{\sqrt5}$ $\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \quad \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$

1) $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$t \geq 0$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ — пол.

$\Rightarrow \frac{t^{\log_{12} 5}}{t^{\log_{12} 13}} + \frac{t}{t^{\log_{12} 13}} \geq 1$

$t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 13} = t^{\log_{12}\left(\frac{5}{13}\right)}$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 12} + 1 \geq t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 12}$

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} + 1 \geq t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

45 $\quad 25^2 \quad 5 \quad 125 \quad 45$

$12 \cdot 12$

$6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$170 \mid 2$, $16$, $10$, $85$

~~$18 \cdot 4 = 40 + 32 = 26$~~

$18 \cdot 18 = 144$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$16 + 9 = 25$

$85^2$: $25$, $425$, $170$, $2125$

$45 \cdot 17$: $40$, $00$, $68$

$17 \cdot 8 = 136$, $5$, $680$

$3(y-1)^2 = 25 - (x-2)^2 =$

$= (25 - x + 2)(25 + x - 2) =$

$= (27 - x)(23 + x)$

$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

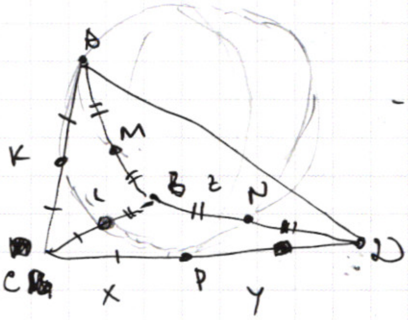
$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

6, 18

$D =$

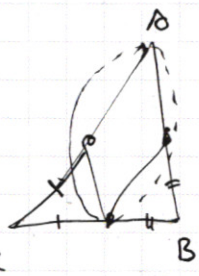
$\log_{12} 12^2$

18, 144





$-18$





$\triangle KLM$ – п-ние

$\Rightarrow$ прямоуг.

$\Rightarrow \angle A = 90$

$18 \cdot 18 = 324$

$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$x + y = 3$ $\qquad BC = z + x$ – ?

$z + y = 2$

$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} =$

$= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin$

$BM = BL = BN = z$ (касат.)

$CK = CL = CP = x$

$\Rightarrow \triangle CB$ – прав.

тко $CL = LB \Rightarrow x = z$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$144 \cdot 4 = 576$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$324$

$\sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$900$

$2 \sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

1) $4 \sin\alpha \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\alpha + 2\beta = \gamma \qquad \sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(\gamma + 2\beta) = \sin\gamma \cdot \cos 2\beta + \cos\gamma \sin 2\beta +$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$

(1) $x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

(2) $(x^2 - 4x + 4) + ((3y)^2 - 2\cdot3\cdot3y + 9) = 12 + 13 = 25$

$(x-2)^2 + (3y - 3)^2 = 25$

(1) ~~$x - 2y = x - 2 - 2y + 2 = (x-2)$~~

~~$= x - 2y + c2xy - 2xy$~~

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

ОДЗ: либо $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ либо $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$x - 2y \geq 0 \Rightarrow x \geq 2y$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$$3^{\log_2 8} = 3^3 = 27$$

$$8^{\log_2 3} =$$

$$4^{\log_2 8} = 4^3 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$8^{\log_2 4} = 8^2 = 64$$

$(x^2+18x)$

$$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

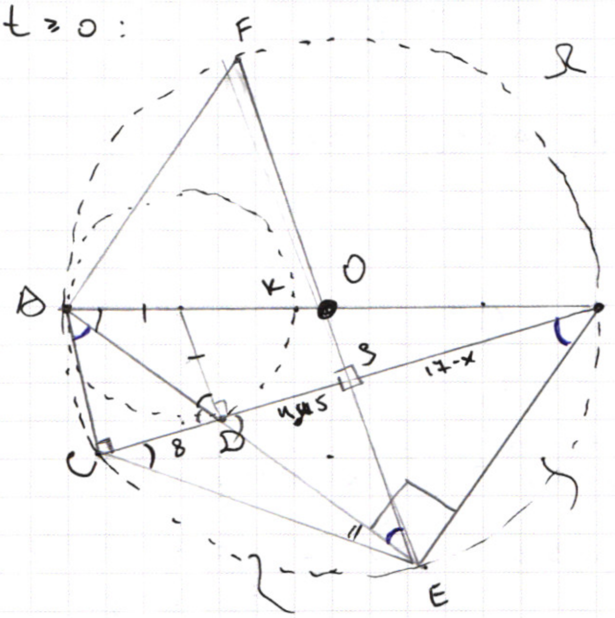
$$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$t = x^2+18x$

$$t^{\log_{12}5} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$\log bc = \log b + \log c$

$t \geq 0:$



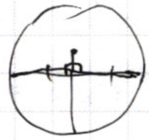

$R - ?$ $r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

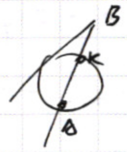
$CD = 8$

$BD = 17$



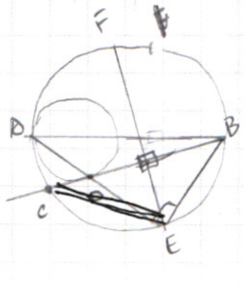
$AC \parallel FE$

$\Rightarrow ACFE$ - р/б трап




$ES = \sqrt{x(17-x)}$

$17^2 = BK \cdot BA = (2R-2r)2R$




$17^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$= 4R^2 + \cancel{r^2} - 4Rr$

14

$\Rightarrow 4Rr = 4R^2 - 17^2$

$r = R - \frac{17^2}{4R}$

$\frac{8+17}{2}$

$12.5$

$4.5$

$\cancel{\Rightarrow 2R - 2r = 2R - 2\left(R - \frac{17^2}{4R}\right)}$

$8 + x = 17 - x$

$x = \frac{17-8}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

$CS = \frac{16}{2} + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$

$12.5 = \frac{25}{2}$

$\frac{SE}{SB} = \frac{DS}{SE} \Rightarrow SE^2 = DS \cdot SB$

$SE = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

$(2R - SE)\,SE = CS \cdot SB$ ✓