МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

✓ 3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

✓ 4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

✓ 5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

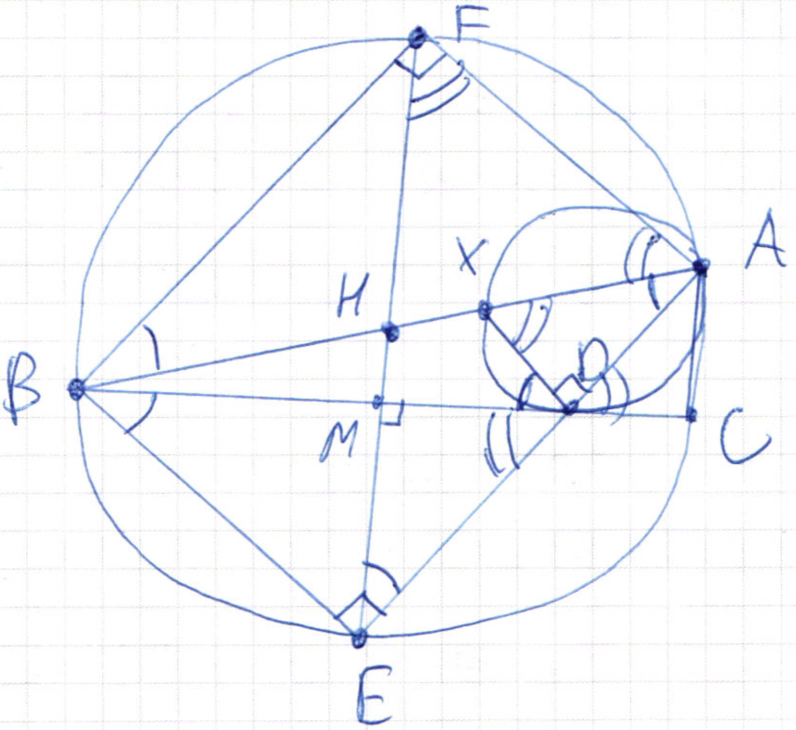
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



①

Т.к. A — общая точка касания, а AB — диаметр окр. Ω, то если X — точка пересечения AB ~~A~~ с ω, то AX — тоже диаметр окр. ω (т.к. AB перп. касательной к ~~о~~ Ω через т. A, и AX тоже перп. этой касательной => AX — диаметр), тогда ∠XDA = 90° как вписанный угол, опир. на диам. AX, также ∠BEA = 90° аналогично, тогда XD ∥ BE, т.к. XD ⊥ AE и BE ⊥ AE, значит ∠XDB = ∠OBE как накрест. лет. при BD — сек, но ∠XDB = ∠X~~D~~AD ~~ка~~ по св-ву угла между

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

хордой и касательной, ~~ко~~ заметим что $\angle AXD = \angle BDE = \angle ADC$, т.к. $\angle ADC = \angle AXD$ по св-ву методу хордой и касат, а $\angle ADC = \angle BDE$ как верт, но (M - основание перп. из т. E к BC) т.к. $\angle EMB = 90^\circ$, то $\angle MED = \angle XAD$ из суммы углов в прям. ΔXAD и ΔMED, но $\angle MED = \angle FBA$ как вписанные углы, опир. на $\smile AF$ без т. B. Т.к. AB — диаметр $\Rightarrow \angle BFA = 90^\circ$, значит $\angle FAB = \angle MDE$ из суммы углов ΔMED и ΔBFA (прямоугольных). Но: в прям. ΔXAD: $\angle AXD + \angle XAD = 90^\circ$, но $\angle$ ~~XAD~~ $AXD = \angle MDE = \angle FAB$, т.е $\angle FAB + \angle XAD = 90^\circ$, значит, т.к $\angle FAE$ - вписанный, то FE — диаметр, тогда $BM = MC$ как хорда BC, перп. диаметру FE, т.е $MC = \dfrac{BD+DC}{2} = 12,5$, значит ②

$MD = CM - CD = 0,5$. Т.к. $\angle BCA = 90^\circ$ как вписан. угол, опир. на диаметр AB, и $\angle MDE = \angle ADC \Rightarrow$ $\Delta MDE \sim \Delta ADC$ по 2 углам $\Rightarrow \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{CD}{MD} = 24$, но т.к. $XD \parallel BE$, то XD отсекает от ΔABE подобный ему ΔAXD, и $\dfrac{AD}{AD+DE} = \dfrac{AX}{AB} = \dfrac{24DE}{25DE} = \dfrac{24}{25}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Но по св-ву пер. хорд в окр:

$AD \cdot DE = BD \cdot DC = 24DE^2 => DE = \sqrt{\frac{BD \cdot DC}{24}} =$

$= \sqrt{\frac{13}{2}}$, т.е $AD = 24\sqrt{\frac{13}{2}}$. (это потом понадобится)

Т.к. BD – касательная к ω, то $BD^2 = BX \cdot AB$ (по св-ву сек. и касательной), т.е ③

$169 = BX \cdot AB$, пусть радиус ω – это r, радиус Ω – это R, тогда $AB = 2R$, $BX = AB - AX =$ $= 2(R - r)$, но $\frac{AX}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{24}{25}$, т.е

$R = \frac{25}{24}r$, тогда $169 = 2\left(\frac{25}{24}r - r\right) \cdot 2 \cdot \frac{25}{24}r$,

т.е $169 = \frac{4}{24}r \cdot \frac{25}{24}r$, или $13 = \frac{2}{24} \cdot 5r$,

или $r = \frac{24 \cdot 13}{10} = 31,2$, тогда $R = \frac{25}{24}r = 32,5$.

Поскольку FE – диаметр, то $\angle AFE = 90 - \angle FEA =$ $= 90 - \angle XAD = \angle AXD$, то есть $\angle AXD = \angle AFE$,

тогда $\sin\angle AXD = \frac{AD}{AX} = \sin\angle AFE = \frac{24\sqrt{\frac{13}{2}}}{\frac{24 \cdot 13}{10} \cdot 2} =$ ← (2r)

$= \frac{5}{\sqrt{26}} => \angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$, тогда

$FA = \cos \angle AFE \cdot FE = 2R \cdot \cos \angle AFE =$

$= 65 \cdot \sqrt{(1 - \sin^2 \angle AFE)}$ по триго. тождеству

$=> 65 \cdot (1 - \frac{25}{26}) = \frac{65}{\sqrt{26}} = FA$, тогда площадь

$\triangle AFF = \frac{1}{2} FA \cdot FE \sin \angle EFA = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot 65 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} =$

~~$= \frac{\sqrt{13}\, \sqrt{13} \cdot 5 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 26 \cdot \sqrt{26}\sqrt{2}} = \frac{5^3 \sqrt{13}}{4\sqrt{2}}$~~

$= \frac{\cancel{13}\, 5 \cdot \cancel{13} \cdot 5 \cdot 13 \cdot 5}{2 \cdot \cancel{26}\, 2} = \frac{5^3 \cdot 13}{4} =$ ~~625~~ $\frac{125 \cdot 13}{4} =$

④

$= 431,25$

Ответ: $r = 31,2$; $R = 32,5$; ~~S~~ $\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$;

$S_{\triangle AFE} = 431,25$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

По ОДЗ, $26x-x^2>0$, иначе $\log_5(26x-x^2)$ не существует, тогда $|x^2-26x|=26x-x^2$ и

$$(26-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $t=26-x^2$, где $t>0$, тогда

$$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$$

~~Т.к. $13^{\log_5 t}=t^{\log_5 13}$, тогда~~

~~$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$, или~~

~~$t\geq t^{\log_5 12}\left(t^{\log_5 13-\log_5 12}-1\right)$, или~~

~~$1\geq t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)$, т.к. $t>0$.~~

~~$1\geq t^{\log_5 2,4}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)$, или~~

~~$1\geq t^{\log_5\frac{209}{60}}-t^{\log_5 2,4}$~~

Заметим, что $t = 5^{\log_5 t}$, а $t^{\log_5 12} =$

$= 12^{\log_5 t}$, тогда

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

Заменим: $q = \log_5 t$, тогда

$12^q + 5^q \geq 13^q$, или $\left(\frac{12}{13}\right)^q + \left(\frac{5}{13}\right)^q \geq 1$.

Т.к. слева стоит убывающая функция от q, то если решим $\left(\frac{12}{13}\right)^q + \left(\frac{5}{13}\right)^q = 1$, которое имеет не более одного решения, т.к. слева убыв. функция, а $q=2$ подходит, то отсюда следует, что нер-во верно, или $q \leq 2$, т.е $\log_5 t \leq 2$, или $t \leq 25$, тогда

$26x - x^2 \leq 25$, или $x^2 - 26x + 25 \leq 0$, или $(x-1)(x-25) \leq 0$ по теореме Виета, откуда $x \in [1;25]$, но проверим ОДЗ: $26x - x^2 > 0$, или $x^2 - 26x < 0$, или $x(x-26) < 0$, т.е $x \in (0;26)$, что подходит.

Ответ: $x \in [1;25]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Заметим, что по условию:

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ (т.к. $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$), а $\frac{1}{y}$ – рац., т.к. $y \in N$), заметим, что

$f(1) = f(1) + f(1)$ (т.к. $1 = 1 \cdot 1$), т.е $f(1) = 0$,

но $f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y})$, т.е

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$, значит

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, т.е нам нужно найти количество пар $(x;y)$, что $f(x) < f(y)$.

Вычислим $f(x)$ для всех x от 1 до 28.

Для этого заметим следующее: пусть

$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$, где p_i – i-ое простое число

α_i – степень простого числа, т.е это разложение x на простые мн., тогда

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots \cdot p_m^{\alpha_m}) =$

$= f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots f(p_m^{\alpha_m}) =$

$= \underbrace{f(p_1) + \dots f(p_1)}_{\alpha_1 \text{ раз}} + \underbrace{f(p_2) \dots f(p_2)}_{\alpha_2 \text{ раз}} + \dots + f(p_m)$

$= \left[\frac{p_1}{4}\right]\cdot\alpha_1 + \left[\frac{p_2}{4}\right]\cdot\alpha_2 \ldots \left[\frac{p_m}{4}\right]\alpha_m$ (по

условию), тогда

$f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 0.$

$f(5) = 1$ (5 - простое)

$f(6) = f(2\cdot 3) = 0$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$ (7 - простое)

$f(8) = f(2^3) = 0$

$f(9) = f(3^2) = 0$

$f(10) = f(2\cdot 5) = 0 + \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$ (11 - простое)

$f(12) = f(2^2\cdot 3) = 0$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$ (13 - простое)

$f(14) = f(2\cdot 7) = 1$

$f(15) = f(3\cdot 5) = 1$

$f(16) = f(2^4) = 0$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$ (17 - простое)

$f(18) = f(3^2\cdot 2) = 0$

$f(19) = \cancel{f}\left[\frac{19}{4}\right] = 4$ (19 - простое)

$f(20) = f(2^2\cdot 5) = 1$

$f(21) = f(3\cdot 7) = 1$

$f(22) = f(2\cdot 11) = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$ (23 - простое)

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 0$

$f(25) = f(5^2) = 2$

$f(26) = f(2 \cdot 13) = 3$

$f(27) = f(3^3) = 0$. $f(28) = f(2^2 \cdot 7) = 1$

0	1	2	3	4	5
9	8	3	2	2	1

- верхняя строка значение $f(x)$, а внизу - количество чисел с таким значением. Соотв., если $f(y) = 1$, то подходят числа со значением $f(x) = 0$ т.е всего способов выбрать $8 \cdot 9 = 72$, для $f(y) = 2$, уже подходят $f(x) \le \overset{2}{\cancel{1}}$, т.е всего 17 значений, т.е способов $17 \cdot 3 = \overset{51}{\cancel{34}}$, для $f(y) = 3$, подходят $f(x) \le 2$, т.е всего $20 \cdot 2 = 40$, для $f(y) = 4$ всего способов $22 \cdot 2 = 44$, для $f(y = 5)$ всего способов $1 \cdot 24 = 24$ для $f(y)$ = опять подходящих пар. Всего способов $72 + 51 + 40 + 44 + 24 =$
$= 231$ Ответ: 231

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$ или

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0.$

$D = 4 + 4\cdot 3\cdot 5 = 64 = 8^2$, откуда

$tg\alpha = \frac{2\pm 8}{6} = -1$ или $\frac{10}{6}$. – два значения.

Если $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда

$2\cos\alpha\sin\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\cos^2 2 = -1$, или

$2tg\alpha + 4tg^2\alpha - 4 = -1 - tg^2\alpha$, или

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0.$

$D = 4 + 4\cdot 5\cdot 3 = 64$, откуда

$tg\alpha = \frac{-2\pm 8}{10}$, или -1 или $\frac{6}{10}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cancel{\sin}\cos\frac{4\beta}{2}$$

$$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

~~Но~~ Но $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, значит

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$, или

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, а $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$.

З/и два варианта

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, или

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

~~$\sin^2\alpha$~~

$2\cos\alpha\cdot\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -1$, или

$2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 4 - 4\,\mathrm{tg}^2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\mathrm{tg}^2\alpha}\cos^2\alpha}$

$t^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t}$ $t<1$ $t>\overset{5}{0}.$

$26\cdot 13-13^2.$

$26x-x^2>0.$ $13^2=169.$

$5^{-\log_5 12}+\frac{1}{5}=13^{-1}$ $-x^2+26x$

$-\frac{26}{-2}=13.$ $t>5.$

~~$0<t<5$~~

$\left(t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}\right)'=$

$5^{\log_5 12}=12.$ $1+\log_5 12\, t^{\log_5 12} > \log_5 t\cdot\frac{\ln 13}{\ln 5}$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{5}=\frac{5+12}{60}=\frac{17}{13}.$ $\cancel{(x^2)'}=2x$

$(t^x)'=xt^{x-1}$

$\log_5 12\, t^{\log_5 12-1}+1\cancel{+}\frac{\log_5 t}{t}\cdot\frac{\ln 13}{\ln 5}.$

$\log_5 12\cdot t^{\log_5 2{,}4}\cdot t+1$

$-13^{\log_5 t})'$

$5^{\frac{\ln 5}{\ln 13}\cdot\left(1+\log_5 12\, t^{\log_5 12}\right)}$

$\left(13^{\log_5 t}\right)'=$ $(a^x)'=x\ln a$

$(\log_5 t)'\cdot\log_5 t\ln 13 > t$

$(\log_5 t)'=$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x\ln a}$

$\frac{1}{t\ln 5}\cdot\log_5 t\ln 13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

y^2+36x^2-12xy

$6(y-6x)^2+(3x+3-y)^2=90$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17} \end{cases}$$

$t>0.$

$y>6x$

$26x-x^2>0.$

$9x^2+y^2-18x-12y$

$x^2-26x<0.$

$3(1-x)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}=\frac{3(1-x)+(6-y)}{2}$$

~~$3(x-1)+y-6$~~

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$$\sqrt{90}\geq\frac{3(1-x)+(6-y)}{2}$$

$\sqrt{90}>\sqrt{\ }$

$2\sqrt{90}\geq 3-3x+6-y$

$2\sqrt{90}-y\geq -3x-y.$

$t^{\log_5 12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$xy-6x-y+6\geq 0.$

$= ~~y~~(x-1) ~~+6~~(x-1).$

$(y-6x)^2 = xy-6x-y+6$ $(y-6)(x-1)$

$y^2+36x^2-12xy = xy-6x-y+6$

$x<0$

$y-6x\geq 0.$

$y\geq 6x$

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=45+9+36.$

$90.$

$9(x-1)^2+\underbrace{(y-6)^2}=90.$

~~$y\geq 6x$~~

$y\geq 6$

$x\geq 1$

$y^2+36x^2-13xy+6x+y-6=0.$

~~$45(x^2+1)^2=45.$~~

$(y-6x)^2=\underbrace{(y-6)(x-1)}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ y\geq 6x \\ (y-6)(x-1)\geq 0. \\ 6(y-6x)^2=23(y-6)(x-1) \end{cases}$$

y ~~$\geq 6 \quad x\geq 1$~~

$x<1$

$y>6x$

~~$y=6x$~~

$y<6.$

$$9(x-1)^2+(y-6)^2\geq 9(x-1)^2+36(x-1)^2$$

$$90\geq 45(x-1)^2$$

$$6(y-6x)^2+(3(x-1)-y+6)^2\geq (x-1)^2.$$

$$=90. \qquad 0\geq (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

$$6(y-6x)^2+(3x-y+3)^2=90. \quad -1-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}-1<1$$

$$(y-6)^2> \ 36(x-1)^2 \longleftrightarrow$$

$$y^2-12y+36>36(x^2-2x+1)$$

$$y^2-12y+\cancel{36}>36x^2-72x+3\cancel{6}$$

$$y(y-12)>36x(x-2)$$

~~$|y-6|>|6x-6|$~~ $\quad (y+3x-9)^2=6(y-6x)^2$

$$(3(x-1)+y-6)^2=90+6(y-6x)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{25r=24R}$

$\frac{25}{24}r=R.$

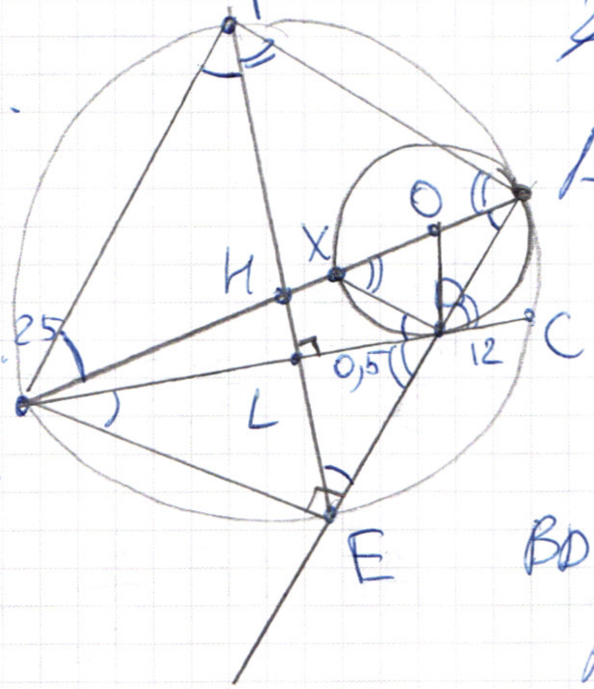
$AD\cdot DE=12\cdot13.$

$\overset{2}{\cancel{24}}DE^2=\cancel{12}\cdot13$

$\sqrt{2}DE=\sqrt{13}$

$CD=12$

$BD=13$



$169=4\left(\frac{25}{24}r-r\right).$

$BL=LC$

$BD\cdot DC=AD\cdot DE$

$\frac{AX}{AB}=\frac{AD}{DE}$

$\frac{2r}{2R}=\frac{AD}{AD+DE}$ $BD^2=\boxed{BX}\cdot AB$

$\frac{AD}{DE}=\frac{DC}{LD}$

$BL=12,5.$

$\frac{r}{R}=\frac{24}{25}.$

$BL+LD=13$

$BL-LD=12$

$\frac{12}{0,5}=24.$

$169=4(R-r)R$

$\overset{13^2}{\cancel{12}}\cdot\overset{12}{\cancel{13}}=(2R-2r)2R$

$\cancel{3\cdot12\cdot13=4(R-r)R}$

$\cancel{39=R^2-rR}$

$\frac{AD}{DE}=24$

$$169=4\left(\frac{25}{24}r-r\right)\cdot\frac{25}{24}r$$

$$169=\frac{4}{24}r\cdot\frac{25}{24}r$$

$$\frac{100r^2}{24^2}=169.$$

~~87~~

2031,25.

$$\frac{10r}{24}=13$$

$10r=24\cdot13$

$r=\frac{24\cdot13}{10}=31,2\Rightarrow R=\frac{25}{\cancel{24}}\cdot\frac{\cancel{24}\cdot13}{10}=$

$=32,5.$

$$AF=2R\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}=\frac{\overset{5}{\cancel{50}}\cdot13}{\cancel{10}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}=$$

$$=\frac{25\cdot\overset{\sqrt{13}}{\cancel{13}}}{\cancel{\sqrt{13}}\sqrt2}=\frac{25\sqrt{13}}{\sqrt2}$$

$$\frac12\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{50}}\sqrt{13}}{\cancel{10}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{25\sqrt{13}}{\sqrt2}=$$

$$=\frac{25^2\cdot\cancel{13}\cancel{\sqrt{13}}}{2\cdot\cancel{\sqrt{26}}\sqrt2}=$$

$\sqrt{13}$

~~$25^2\sqrt{13}$~~

$$\frac{25^2\cdot13}{4}$$

$$DE=\sqrt{\frac{13}{2}}\Rightarrow AD=24\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

$$\sin\angle AFE=\frac{AD}{AX}=\frac{24\sqrt{\frac{13}{2}}}{62,4}=\frac{24\sqrt{\frac{13}{2}}}{\frac{24\cdot13}{5}}=$$

$$=\frac{5\sqrt{\frac{13}{2}}}{13}=\frac{5\cancel{\sqrt{13}}}{\sqrt{13}\cdot\cancel{\sqrt{13}}\sqrt2}=\frac{5}{\sqrt{26}}.$$

$$\angle AFE=\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$24\cdot13=72+24=312$

$25\cdot25=125+50=625$

$625\cdot13=1875+625=8125$

$8125:4=2031$; -8, 12, -12, 05

$25\cdot13=75+25=325$

$2031\cdot4=8124$

$125\cdot13=375+25=1725$

$1725:4=431$; -16, 12, -12, 5, -4, 01

$24\cdot13=72+24=312$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0.$

$f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$ $4\leq x\leq 28$
и

$f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)=0.$

$f(1)=f(1)+f(1)$

$0=f(1),$

$4=2\cdot 2$
$5=5$
$6=2\cdot 3$
$7=7$
$8=2^3$
$9=3^2$
$10=2\cdot 5$
$11=11$
$12=2^2\cdot 3$
$13=13$
$14=7\cdot 2$
$15=5\cdot 3$
$16=2^4$
$17=17$
$18=3^2\cdot 2$

$19=19$
$20=2^2\cdot 5$
$21=3\cdot 7$
$22=2\cdot 11$
$23=23$
$24=2^3\cdot 3$
$25=5^2$

$26=2\cdot 13$
$27=3^3$
$28=2^2\cdot 7$

$f(4) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0.$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq$

$13x^2-51x+28$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0.$

$f(y) > f(x)$

x, y

$f(x) - f(y) < 0.$

0	1	2	3	4	5
8	7	3	2	2	1

$56+45+36+40+22$

$8-6x \geq (ax+b)(3x-2)$

$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3xb-2b$

$$\begin{array}{r} 72 \\ +51 \\ \hline 123 \end{array}$$

$3ax^2+x(3b+6-2a)-2b-8$

$\wedge\!\!|$

$0.$

$$\begin{array}{r} 123 \\ +84 \\ \hline 207 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 202 \\ +24 \\ \hline 231 \end{array}$$

$13x^2-(51+a)x+28-b \leq 0.$

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right].$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$\begin{cases} 8-6x \geq (3x-2)(ax+b) \\ \cancel{18x^2-51x+28} \\ 18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0. \end{cases}$$

$\sqrt{(y-6)(x-1)}$ ↑

$y-6x$ ↓

$$3ax^2-2ax+3xb-2b+6x-8 \leq 0.$$

$$3ax^2+x(3b-2a+6)-2b-8 \leq 0.$$

$x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$2 \geq a+b \geq -5.$

$-1 \geq 2a+b$

$-2.$

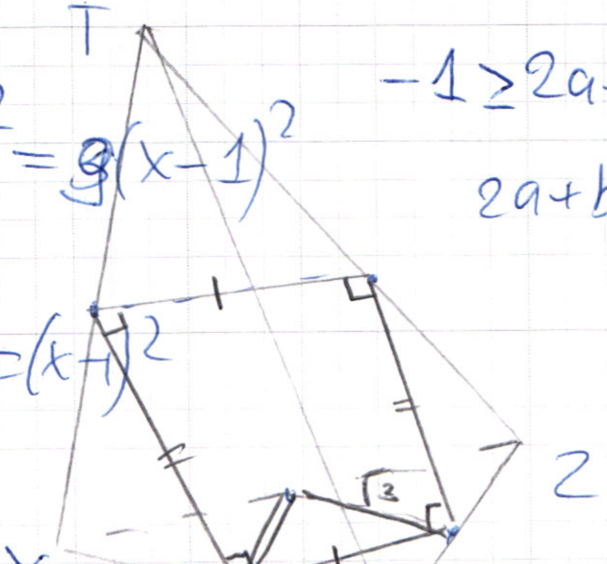
$2a+b \geq 18 \cdot 4-102+28$

$\| 72$

$-1 \geq 2a+b \geq -2.$

$$90-(y-6)^2 = 9(x-1)^2$$

$$\frac{90-(y-6)^2}{9} = (x-1)^2$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90. \end{cases}$$

~~$y=6$~~
~~$x=1$~~
~~$y=6x$~~

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$y-6x$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$(y-6x)^2$

$($~~$x+y$~~

$\cos 4\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}+1$

$(3x-9+y)^2-6(y-6x)^2=90.$

$\cos 2\beta=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{17}}+1}{2}}$

$(3x-9-y-\sqrt{6}y+6\sqrt{6}x)$

$(3x-9$~~$+y$~~$+\sqrt{6}y-6\sqrt{6}x)=90$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{17}}+\frac{1}{2}}$

$3(x+2\sqrt{6})$

$-2+\frac{4}{3x-2}\leq ax+b.$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{17}}+\frac{1}{2}}+\cos 2\alpha\cdot$

$-\frac{6x-8}{3x-2}=-\frac{2(3x-2)-4}{3x-2}.$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$

$D=18^2-4\cdot 9(y^2-12y-45)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_5 4 = 2\log_5 2$

$t^{\log_5 12} + t \geq \cancel{\log_5} 13^{\log_5 t}$ 9

$t^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t}$

$t \geq t^{\log_5 \cancel{t} 12}(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1)$

~~$0 \geq t^{\log_5 \frac{12}{5}}$~~

$\log_5$

$a^{\log_b c} = c^{\log_a b}$

$t^{\log_5 13}$

$1 \geq t^{\log_5 \boxed{\frac{13}{12}}}$

$t^{-k} \geq 1$

$t \cancel{\leq 1} \geq 1$ $t > 1$

~~$c = b$~~

$2^{-\log_2 4} = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$\log_{ba} c = \log_a c \cdot \log_a b$

$\frac{1}{t^k} \leq 1$. $2^{\frac{1}{2}}$

$1 \leq t^k$ $t \geq 1$.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

$a^{\log_a b \cdot \log_c a}$

$\log_5 t = \frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}$ $\frac{209}{60}$

$2^{\log_5 4} = 4^{\log_5 2}$ ~~$\log_{13} t$~~

$b^{\log_c a} = a^{\log_c b}$ 3

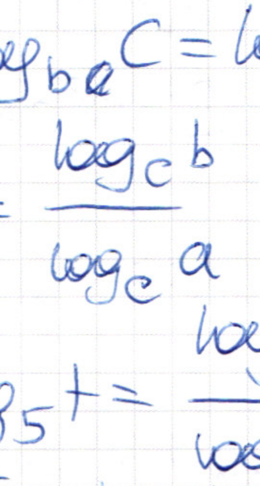
144 + 65

$\cancel{\geq}$ 26 $\frac{12}{5} + \frac{13}{12}$

$t \geq t^{\log_5 12}(t^{\log_5 13 - \log_5 12} - 1)$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$t > 0$



$\frac{12^2 + 13 \cdot 5}{60}$

$(t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13})' \geq 0$

$\log_5 12\, t^{\log_5 12 - 1} + 1 - \log_5 13\, t^{\log_5 13 - 1} <$

$$\log_5 12\, t^{(\log_5 12)-1} + 1 - \log_5 13\, t^{\log_5 13 - 1}$$

$$(\underset{>0}{\log_5 12})(\underset{\cancel{<0}\ >0}{\log_5 12 - 1})\underset{\text{пол.}}{t^{\log_5 12 - 2}} - \underset{>0}{\log_5 13}(\underset{>0.}{\log_5 13 - 1})\underset{\text{пол}}{t^{\cancel{\ }}}$$

$$\log_5 12 > \log_5 5$$

$$y - 6x = \sqrt{}$$

$$\log_5 \frac{12}{5}.$$

$$\underbrace{12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}}$$

$$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta.$$

$$2\cos^2 2\beta - 1$$

$$12^k + 5^k \geq 13^k$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^k + \left(\frac{5}{13}\right)^k \geq 1$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta =$$

$$k \cancel{\sqrt{17}} \leq 2$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos 4\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cancel{\sin}\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(\overset{4\beta}{\cancel{2\alpha+2\beta}}) = -\frac{2}{1}$$

$$\cos 4\beta \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)