AD

$AD = x.$

$DE = y$

$xy = \frac{65}{4}.$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

$\frac{R}{r} = \frac{AE}{AD} = \frac{x+y}{x}$

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

$t \quad 3^{\log_4 t} + t \geqslant t^{\log_4 5}$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

$3^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 3} + t \geqslant t^{\log_4 5}$

$\times\frac{13}{5}$ 65

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$-\ 32$
$+12$

18
$+24$
42

36
$\frac{4}{4}$

$6+3-4=$
5

$\cancel{27y^2-18y}+3+\cancel{3y^2-18y}+\cancel{6-4y}-4=0$

$24y^2-40y+5=0$

$4\cdot5\cdot24$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 20 \\ \hline 480 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1600 \\ -\ 480 \\ \hline 1120 \end{array}$

$D=1600-$

$1120=$

$\sqrt{}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) =$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos(2\beta)$

$\Downarrow$

$\cos 2\beta = \frac{8\cdot\sqrt{17}}{17\cdot 2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Downarrow$ т.к. $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$

2) ~~I случай $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

Пусть $tg\,\alpha = t$.

Тогда $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Разберем 2 случая:

I $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Тогда:

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$

$= \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} \overset{\text{т.к. } 1+t^2>0}{\Leftrightarrow} -1-t^2 = 8t+1-t^2$

$\Leftrightarrow 8t = -2 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

(II) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) =$$

$$= \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\Updownarrow$ т.к. $1+t^2>0$

$$-1-t^2 = 8t - 1 + t^2$$

$\Updownarrow$

$$2t^2 + 8t = 0$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

В итоге имеем:

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -\frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4 \end{array}\right.$$

По условию все 3 значения существуют.

Ответ: $-\frac{1}{4}$; 0; -4.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4, & (2)\end{cases}$$

1) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$\Updownarrow$

$(3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$\Updownarrow$

$((3y-2)-2(x-1))^2=(3y-2)(x-1)$

$\Updownarrow$

$(3y-2)^2+4(x-1)^2-5(3y-2)(x-1)=0$

$\Updownarrow$

$(4(x-1)-(3y-2))((x-1)-(3y-2))=0$

$\Updownarrow$

$(4x-4-3y+2)(x-1-3y+2)=0$

$\Updownarrow$

$(4x-3y-2)(x-3y+1)=0.$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} 4x=3y+2 \\ x=3y-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3y=4x-2 \Leftrightarrow y=\frac{4x-2}{3}=\frac{2}{3}(2x-1)$$

2) Пусть $x=3y-1$. Тогда подставляя это во (2) ур-е:

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0 \Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{27}y^2 - 18y + 3 + 3y^2 - \cancel{18y} + \cancel{6} - 4y - 4 = 0$

$\Updownarrow$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$

$\Updownarrow$

$6y^2 - 8y + 1 = 0$

$\Updownarrow$ $D = 64 - 4 \cdot 6 = 64 - 24 = 40 = (2\sqrt{10})^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{12} \\ y = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{4 + \sqrt{10}}{6} \\ y = \frac{4 - \sqrt{10}}{6} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ x = 3\,\frac{4+\sqrt{10}}{6} - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \\ x = 3\,\frac{4-\sqrt{10}}{6} - 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ x = \frac{\sqrt{10}+2}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \\ x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

3) Теперь пусть $4x = 3y + 2. \Leftrightarrow 3y = 4x - 2$

$\Updownarrow$

$y = \frac{2}{3}(2x - 1)$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

$\Updownarrow$

$3x(x - 2) + y(3y - 4) - 4 = 0$

$\Updownarrow$

$3x(x-2) + \frac{2}{3}(2x-1)(4x-2-4) - 4 = 0$

$\cancel{\frac{2}{3}(\ -1)}$ $\cancel{\frac{2}{3}(4-1)}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x(x-2)+\frac{2}{3}(2x-1)(4x-6)-4=0$$

$$\Updownarrow$$

$$9x(x-2)+2\cdot 2(2x-1)(2x-3)-12=0$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2-18x+4(4x^2-6x-2x+3)-12=0$$

$$\Updownarrow$$

$$9x^2-18x+16x^2-24x-8x+\cancel{12}-\cancel{12}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$25x^2-50x=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-2x=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{-2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

4) Осталось проверить, что полученные ~~корни попадают в ОДЗ первого уравнения, т.е. подкоренные~~ корни также удовл. ① уравнению.

I. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$3y - 2x = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2 \Rightarrow$ Такого не может быть, т.к. в правой части $\sqrt{3xy-2x-2y+2}$, который ≥ 0.

II. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

$6 - 4 = \sqrt{(3 \cdot 2 - 2)(2-1)}$

$2 = \sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ – подходит.

III. $\begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$ $2x = 4 - 2\sqrt{10}$ $4 - \sqrt{10}$

$3y - 2x = \frac{4-\sqrt{10} - 4 + 2\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{10} - \cancel{4}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right)}$ подходит корень.

~~подкоренное выраж. < 0 ⇒ не подходит,~~

IV. $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \end{cases}$ $2x = \frac{4+2\sqrt{10}}{2}$

$3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} = \frac{4+\sqrt{10} - 4 - 2\sqrt{10}}{2} = \frac{-\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow$ такого не может быть.

Имеем в итоге 2 корня.

Ответ: $(2;2)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$ ~~$\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}; \frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

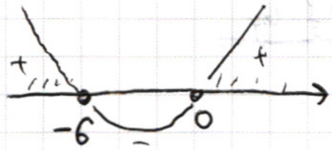
~~3 log~~ $3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$\Updownarrow$

~~3 lo~~ $3^{\log_4 (x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$.

1) ОДЗ:

$x^2+6x>0 \iff \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0. \end{array}\right.$



Отсюда следует, что на ОДЗ $|x^2+6x| = x^2+6x$.

2) Введем замену $t = x^2+6x$.

Тогд имеем ур-е:

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\Updownarrow$ $3 = 4^{\log_4 3}$

$t^1 + t^{1+\alpha} = t^{1+\beta}$

$\log_4$

$\left(4^{\log_4 t}\right)^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\Updownarrow$

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$\Updownarrow$ Т.к. на ОДЗ $t>0$, разделим на t.

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1 \geq 0$

$\Updownarrow$

$1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$\Updownarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7

(Нумеровать только чистовики)

3 + 4 = 5

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$ (*)

$4^{\frac{3}{2}}$ 8

3) Если $0<t<1$

То ~~t~~ $t > t^{\log_4 5}$, т.к. $\log_4 5 > 1$.

$\Rightarrow$ (*) выполнено.

4) Если $t>1$, то

Обе части монотонно ↑, причем правая часть возр. быстрее $\Rightarrow$ они могут иметь только 1 точку пересеч.

$t^{\log_4 3} + t = t^{\log_4 5}$.

~~Если $t = 2$, то $2^{\log_4 3} + 2 = 4^{\frac{1}{2}\log}$~~

Если $t = 16 = 4^2$, то

$16^{\log_4 3} = \left(4^{\log_4 3}\right)^2 = 9$

$(16)^{\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^2 = 25$.

$t^{\log_4 3} + t = 9 + 16 = 25 = t^{\log_4 5}$. $\Rightarrow$

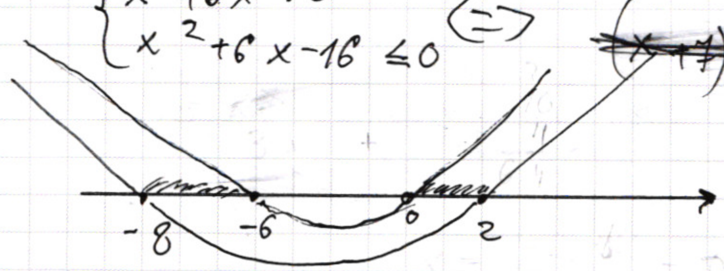
$\Rightarrow$ (*) верно титтк $0 < t \leq 16$.

5) Вернемся к x.

~~$0x^2$~~ $0 < x^2 + 6x \leq 16$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~$(x+7)(x-1)$~~ $\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ (x-2)(x+8) \leq 0 \end{cases}$



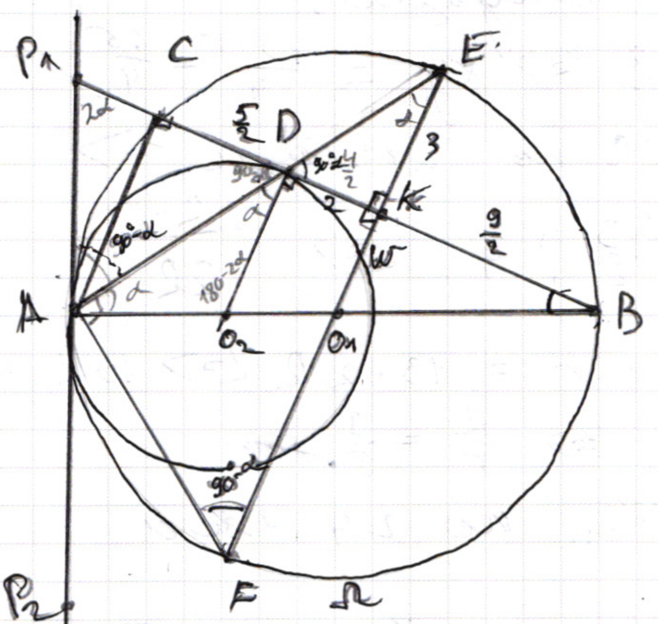
По м. инт. получаем: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\frac{R}{r} = \frac{9}{5}$

$x = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$y = \sqrt{13}$

O_1 и O_2 – центры Ω и ω соотв.

1) Пусть R, r – радиусы Ω и ω соотв.

$AD = x$, $DE = y$, K – т. пересеч CB и EF. $BC = BD = DC = \frac{18}{2} = 9$

Пусть $\angle AEF = \alpha \Rightarrow \angle EDK = 90° - \alpha$

Проведем общую кас. к Ω и ω через A.

Тогда по т. об угле между хордой и кас:

$\angle P_1AE = \angle AFE$.

Т.к. BC – кас. к ω в т. D, то $O_2D \perp BC \Rightarrow O_2D \parallel EF$.

Угол $\angle CDA = \angle EDK = 90° - \alpha \Rightarrow \angle ADO_2 =$
$= 90° - \angle CDA = \alpha$.

Т.к. $AO_2 = O_2D = r$, то $\triangle ADO_2$ – равноб. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DAO_2 = \angle ADO_2 = \alpha \Rightarrow \angle ADO_2 = 180° - 2\alpha$.

2) P_1A и P_1D – касат к $\omega \Rightarrow \angle AP_1D =$
$= 180° - \angle AO_2D = 2\alpha \Rightarrow \angle P_1AD = \angle P_1DA = 90° - 2\alpha$.

Значит, $\angle AFE = \angle P_1AD = 90° - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 180° - \angle AEF - \angle AFE = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ – диаметр и проходит через O_1.

3) По теореме о секущей:

$AD \cdot DE = CD \cdot DB \Leftrightarrow xy = \frac{13 \cdot 5}{4} = \frac{65}{4}$.

4) $\Delta BO_2D \sim \Delta BAC$ по углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{2} : 9 \Leftrightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2R \cdot 18 - 18r = 13 \cdot 2R \Leftrightarrow 10R = 18r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5R = 9r \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{9}{5}$.

5) $\Delta ADO_2 \sim \Delta AEO_1$ по углам

$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x = 5x + 5y \Leftrightarrow 4x = 5y \Leftrightarrow y = \frac{4x}{5}$.

6) Имеем: $\begin{cases} y = \frac{4x}{5} \\ xy = \frac{65}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{4} \\ y \cdot \frac{5y}{4} = \frac{65}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{13}, \ x = \frac{5\sqrt{13}}{4}$.

~~7) $\Delta EDK \sim \Delta EFA$ по углам $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{ED}{EK} = \frac{EF}{EA} \Leftrightarrow$~~

7) В ΔBAC по т. Фалеса, т.к. $O_1E \parallel AC$:

$\frac{CK}{KB} = \frac{R}{R} = \frac{1}{1} \Rightarrow KB = \frac{9}{2}, \ DK = \frac{4}{2} = 2$.

$EK = \sqrt{DE^2 - DK^2} = \sqrt{13 - 4} = 3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) ~~ΔEF~~ $\Delta EDK \sim \Delta EFA$ по 2 углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ED}{EK} = \frac{EF}{EA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2R}{AD+DE} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{2R}{9\sqrt{13}} \cdot 4 \Leftrightarrow \frac{8R}{9\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow R = \frac{9 \cdot 13}{3 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 13}{8} =$

$= \frac{39}{8}. \Rightarrow r = \frac{5R}{9} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 5}{8 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{65}{24}$

9) $\angle AFE = 90° - \alpha = \angle EDK.$

$tg \angle EDK = \frac{EK}{DK} = \frac{3}{2} \Rightarrow \angle AFE = arctg(\frac{3}{2}).$

10) $S_{AEF} = \frac{AE \cdot EF \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{9\sqrt{13}}{4 \cdot 2} \cdot \frac{39}{8} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} =$

$= \frac{9 \cdot 39}{16} = \frac{351}{16}.$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = arctg(\frac{3}{2})$;

$S_{AEF} = \frac{351}{16}.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cancel{\sin}\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) =$

$= \cancel{2}\cdot\cos(2\beta)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{\cancel{8}\,4}{\sqrt{17}}$

$\Updownarrow$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = t$

$\sin 2\alpha = \frac{2t}{t^2+1}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{t^2+1}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cancel{\sin(}\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta)$

1) $\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$-1 = 4\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)$

$-1 = 4\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}$

$\Updownarrow$

$-1 = \frac{8t+1-t^2}{t^2+1}$

$\Updownarrow$

$\cancel{-t^2}-1 = 8t+1\cancel{-t^2} \Leftrightarrow 8t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

2) $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{(1-t^2)}{t^2+1}$

$-1 = \frac{8t-1+t^2}{t^2+1} \Rightarrow -t^2\cancel{-1} = 8t\cancel{-1}+t^2$

$2t^2+8t=0$

$\Updownarrow$

$2t(t+4)=0$

$\Updownarrow$

$t=0$

$t=-4$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$
$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4.$$

$3y$

$$3y(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(3y-2)$$

$$3x(x-2) + y(3y-4) = 4$$

$$(3y-2x)^2 = 9y^2 + 4x^2 - 12xy$$

$(x-1)(3y-2)$

$$4x^2 + 4y^2 - 6x - 4y - (x^2+y^2) = 4$$

$\cancel{+2x}$

$(2y+1)^2$

$$3(x^2 - 2x + 1)$$
$$3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y = 1$$
$$3(x-1)^2 + 3\left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) = 1.$$
$$3\left(y - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 = 1$$
$$(x-1)^2 + \left(y - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1.$$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3 = 4^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0$

$1 - t^{\log_4 \frac{5}{3}} + t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq 0$

$\log_4 5 = \log_4 3 + \log_4 \frac{5}{3}$

$\log_4 4 = \log_4 3 + \log_4 \frac{4}{3}$

$1 + t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} \geq 0.$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} \geq 1.$

$t\left(1 + t^{\log_4 3 - 1} - t^{\log_4 5 - 1}\right) \geq 0$

$\log_4 3 - \log_4 4 = \log_4 \frac{3}{4}$

$\log(\log$

$4^{\log_4 t \cdot \log_4 3} \Leftrightarrow t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 5 = \log_4 \left(3 \cdot \frac{5}{3}\right) = \log$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq \log$

$\log_4 5 = \log_4 3 + \log$

$\log_4 3 = \log_4 5 - \log$

$\log_4 \frac{3}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)