МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

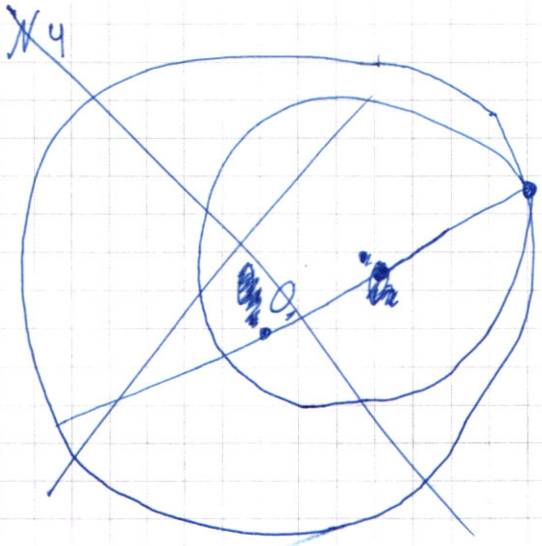
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

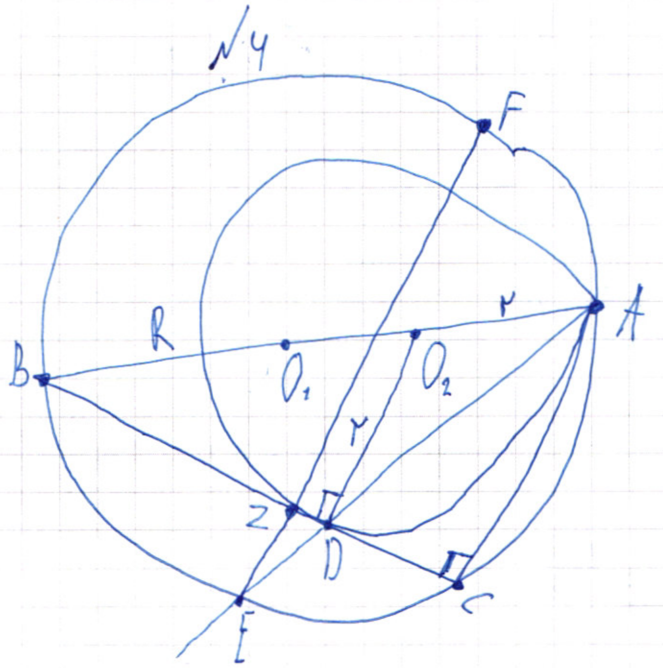
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



№4



$BD = 13 \quad CD = 12$

R – радиус большей окр., O_1 – ее центр. r — меньшая; O_2 – ее центр

① Заметим, что и O_1, и O_2 лежат на AB, так как AB — диаметр ($\Rightarrow O_1 \in AB$), и окружности касаются внутренним образом в A.

1) AB – диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$

2) $O_2A = r$, $BA = 2R$ $\Rightarrow$ $BO_1 = O_1A = R$

$O_1O_2 = R - r$

$BO_2 = 2R - r$

3) D – точка касания окр. и BC $\Rightarrow \angle O_2DB = 90^\circ$

4) тогда $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ по общ. углу $\angle B$ и равным (прямым) углам $\angle D$ и $\angle C$

Запишем пропорцию:

$$\frac{BO_2}{BD} = \frac{BA}{BC} \qquad \frac{2R-r}{13} = \frac{2R}{25} \Rightarrow 50R - 25r = 26R$$

$$24R = 25r$$

5) Напишем Пифагора в $\triangle BDO_2$:

$BO_2^2 = BD^2 + O_2D^2$

$\cancel{(2R-r)^2}$ $(2R-r)^2 = 13^2 + r^2$ Теперь найдем r и R

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr - 169 = 0 \\ 24R = 25r \Rightarrow r = \frac{24R}{25} \end{cases}$$

$4 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot \frac{24R}{25} - 169 = 0$

$\frac{4R^2}{25} = 169$ т.к. $R > 0$, то

$\frac{2R}{5} = 13 \Rightarrow R = \frac{65}{2} \Rightarrow r = \frac{24 \cdot \frac{65}{2}}{25} = \frac{12 \cdot 65}{25} = \frac{12 \cdot 13}{5}$

$\underline{R = \frac{65}{2};\ r = \frac{12 \cdot 13}{5}}$

~~6) Пусть $EF \cap BC = Z$~~

~~Тогда $\begin{cases} \angle EDZ = \angle ADC \text{ как верт.} \\ \angle EZD = \angle DCA = 90° \end{cases}$ $\Rightarrow$~~

~~$\angle AFE = \frac{\angle EO_1A}{2}$ по теореме о центральном угле~~

6) $\frac{AC}{r} = \cancel{\frac{BD}{DC}} \frac{BC}{BD} = \frac{25}{13}$

$\Downarrow$

$AC = \cancel{\frac{13r}{25}}\ \frac{25r}{13} = \frac{25 \cdot 12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = 60$

$AD^2 = DC^2 + AC^2 = 144 + 3600 = 3744$

из подобия $\triangle ZOE$ и $\triangle DAC$: $\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE = \frac{AD \cdot R}{r} = \frac{\sqrt{3744} \cdot 65 \cdot 5}{2 \cdot 12 \cdot 13} = \frac{25\sqrt{3744}}{24}$

7) по т. косинусов в $\triangle O_1EA$:

$EA^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\angle EO_1A$

поскольку нам известны все три стороны, мы найдем и угол $\angle O_1EA$. А искомый $\angle EFA$ равен половине $\angle O_1EA$ по теореме о центральном угле

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Ограничения: $y-6x\geq 0$

$\Downarrow$

$y\geq 6x$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

пусть: $a=x-1$

$b=y-6$

тогда: $y-6x=b-6a$

Ограничения: $b-6a\geq 0 \Rightarrow b\geq 6a$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} (b-6a)^2=ab \quad (1) \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

(1) $b^2-12ab+36a^2-ab=0$

$b^2-13ab+36a^2=0$

решим как кв. отн. b:

$D=(13a)^2-36\cdot 4a^2=25a^2$

$b_{1,2}=\dfrac{13a\pm 5a}{2}$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right.$$

$b=$ ~~...~~ $9a$:

$9a^2+(9a)^2=90$

$a=\pm 1$

$\Downarrow$

имеем пары (a,b):

$(1;9)$

$(-1;-9)$

вторая пара не подходит под условие $b\geq 6a$, она лишняя

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$b=4a$:

$$9a^2+16a^2=90$$

$$a^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$$

по ограничению: $b=4a\geq 6a$

$$\Downarrow$$

$$0\geq 2a$$

$$\Downarrow$$

$$a\leq 0$$

Значит, пара с $a=+\sqrt{\frac{18}{5}}$ лишняя.

Итого, получилось 2 пары:

$(1;9)$

$\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

Вернемся к x, y: $x=a+1$

$y=b+6$

Получим $\boxed{\text{ответ: } (2;15) \text{ и } \left(-\sqrt{\frac{18}{5}}+1;-4\sqrt{\frac{18}{5}}+6\right)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Ограничения: $26x - x^2 > 0$

$$\Downarrow$$

$$x \in (0;26)$$

При $x \in (0;26)$: $|x^2-26x| = 26x - x^2$

Пусть $26x - x^2 = t$; $t > 0$

Тогда имеем:

$$t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t} \geq 0$$

По св-ву логарифма, $13^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$; (с учетом ограничений)

$$t = t^{\log_5 5} = 5^{\log_5 t}$$

Тогда неравенство имеет вид:

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} \geq 0$$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \quad \Big| \cdot \frac{1}{12^{\log_5 t}} \text{; имея в виду, что } 12^{\log_5 t} > 0 \text{ всегда}$$

$$1 + \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_5 t} \geq \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_5 t}$$

~~Та~~ Т.к. $\log_5 t$ — возрастающая функция, то и вся правая часть неравенства тоже возрастающая, а левая — убывающая. Значит, „до" какого-то значения t оно верно, а после — нет (с учетом ограничений на t).

Поскольку $(5; 12; 13)$ — известная тройка Пифагора, то легко угадать, что неравенство эквивалентно:

$\log_5 t \le 2$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \le 25 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 26x - x^2 - 25 \le 0 \\ x \in (0; 26) \end{cases}$$

$-x^2 + 26x - 25 \le 0$

$x^2 - 26x + 25 \ge 0$

$(x-25)(x-1) \ge 0$

$x \in [0; 1] \cup [25; +\infty)$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in (0; 1] \cup [25; +\infty)}$

№5

Заметим, что $f(1) = 0$, ведь $\forall x \quad f(x) = f(x) + f(1)$

Тогда $\forall x: x > 0; x \in \mathbb{R} \quad f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Значит, для любого числа, взаимообратное с ним — отрицательно

№1 (продолжение):

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \frac{2}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \pm \frac{8}{17}\cos 2\alpha$

$0 = -2 - 2\sin 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha$

$0 = -1 - 1\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm (8\cos^2\alpha - 4) = -1$

① $2\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 4 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha = 3$

$\cancel{\frac{8-3x}{3x-12}} = \cancel{18x^2-51x+28}$

$f(5)=1$

$f(2)=0$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) =$

$= \cancel{\sin(\alpha+2\beta)} \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) +$

$+ \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\beta$

$\left[\begin{array}{l} f(3)=f(3)+f(1) \\ f(1)=0 \end{array}\right.$

$f(1)=0$

$\left[\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \end{array}\right.$

$+$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\cancel{\sin\beta\cos\alpha}\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta) = \cancel{2\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)}\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$\cancel{2\cdot-\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{17}}}\ 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\Downarrow$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{\sin(2\alpha}\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha$

$-1 = \sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha$

(1) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ 2\alpha+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}+2\pi k \end{array}\right.$

(2) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2\pi a \\ 2\alpha-\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}+2\pi b \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Из ограничений имеем, что $x\in(0;26)$.

Тогда $|x^2-26x|$ однозначно раскрывается как $26x-x^2$

Ограничения:

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$(x-26)(x)<0$

$x\in(0;26)$

Перепишем неравенство:

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)}+26x-x^2\geq 0$

По св-ву логарифма, $13^{\log_5(26x-x^2)}=(26x-x^2)^{\log_5 13}$ при $26x-x^2>0$

Сделаем замену $t=26x-x^2$. Тогда имеем:

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0$

$t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}+1\geq 0$

$f(1)=0$

$f(a)+f(1/a)=0$

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$t \geq \cancel{t}\, 13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 13\cdot 12}=t^{\log_5(13-5)(13+5)}=$

$=t^{\log_5}$

1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

7 — 1

8 — 0

9 — 0

10 — 1

11 —

$t^{\log_5 5}$

$\log_5 t\geq 2$

$t\geq 5$

$t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}-t^{\log_5 13}\geq 0$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t}-13^{\log_5 t}\geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b^2 = 90 - 9a^2$

$\begin{cases} (b-6a)^2 = ab \quad (1) \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$

(1) $b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$\begin{cases} -b^2 + 36a^2 = 13ab \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases}$

$27a^2 = 13ab - 90$

$13ab = 27a^2 + 90$

$b = \dfrac{27a^2+90}{13a} = \dfrac{27}{13}a + \dfrac{90}{13a} \geq 6a$

$\left(\dfrac{27a^2+90}{13a}\right)^2 + 9a^2 = 90$

$\cancel{36a^2 + 13}$ $b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$D = (13a)^2 - 4 \cdot 36 = 169a^2 - 144 = (5a)^2$

$b_{1,2} = \dfrac{13a \pm 5a}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = 9a \\ b_2 = 4a \end{array}$

$\left[\begin{array}{l} 16a^2 + 9a^2 = 90 \; (1) \\ 81a^2 + 9a^2 = 90 \; (2) \end{array}\right.$

$25a^2 = 90$

$a^2 = \dfrac{90}{25} = \dfrac{18}{5}$

$\cancel{a = \pm\sqrt{}}$

$a = \pm\sqrt{\dfrac{18}{5}}$

$3b^2 = 360 - 13ab$

$3b^2 + 13ab - 360 = 0$

$D = 169a^2 + 360 \cdot 12 = \cancel{169 + 4320 = 4489 = 67^2}$

$\cancel{b_{1,2} = \dfrac{-13a \pm 67}{6}}$

$3600 + 720 =$

$= 4320$

$\times \begin{array}{r} 67 \\ 67 \end{array}$

$67^2 = (60+7)^2 =$

$= 3600 + 840 + 49 =$

$= 4489$

(2) $a^2 = 1$

$a = \pm 1$

$(1; 9)$

$(-1; -9)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$(3x-3)^2+(y-6)^2 \cancel{=0} -45=45$$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta+\sin 2\beta \cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta+\cos 2\alpha \sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha\cos 4\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{17} \\ \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha\ne 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Ограничения: $y-6x\geq 0$; $y\geq 6x$

$x-1=a$

$y-6=b$

$\Downarrow$

$y-6x=b-6a$

(1) $y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6=(x-1)(y-6)$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$$\begin{cases} (b-6a)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$tg(\alpha) = .^{2}$, имеет 3 значений

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(4\beta) = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = \pm\frac{8}{17}$

$\cos 4\beta = 2\cdot\cos^2 2\beta - 1 = \frac{2}{17} - 1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos 2\alpha\sin 2\beta =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Downarrow$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$\sin\left(2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

① ~~sin(2α + arc~~

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha \pm \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} = \pi - \frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$ $n, k \in \mathbb{Z}$

~~$\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17} - \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha\cos 4\beta - \sin 4\beta\cos 2\alpha =$~~

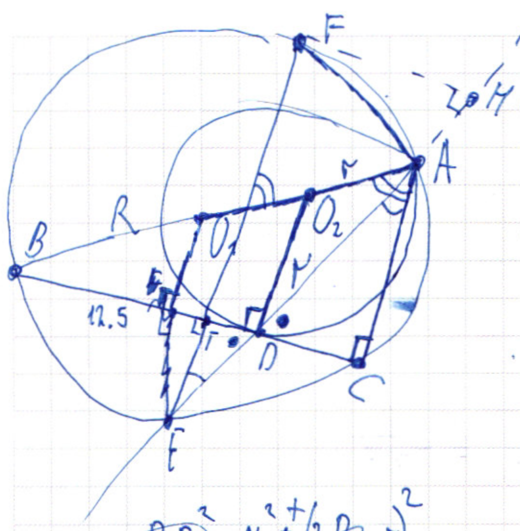
~~$= -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha\cdot\left(\frac{2}{17}-1\right) - \cos 2\alpha\left(\pm\frac{8}{17}\right)$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$AB = 2R$

$AO_1 = R$

$\cancel{O_1 D}\ O_2 A = r$

$CD = 12$

$BD = 13$

$\cancel{BD^2 = r^2 + (2R - r)^2}$

$(2R - r)^2 = \cancel{BD}\ BD^2 + r^2$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 169 \\ 24R = 25r \Rightarrow r = \frac{24R}{25} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$4R^2 - 4 \cdot R \cdot \frac{24R}{25} = 169$

$4R^2 - \frac{96R^2}{25} = 169$

$\frac{4R^2}{25} = 169$

$\left(\frac{2R}{5}\right) = 13$

$\Downarrow$

$R = \frac{65}{2}$

$\frac{AB - r}{13} = \frac{AB}{25}$

$25AB - 25r = 13AB$

$12AB = 25r$

$24R = 25r$

$\frac{R}{12.5} = \frac{2R - r}{13}$

$\cancel{13R = 25R - 12.5r}$

$62^2 = 3600 +$

$+ 240 + 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)